

*А.К.Боярчук*

## **ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА**

Справочное пособие по высшей математике. Т. 4

М.: Едиториал УРСС, 2001. — 352 с.

«Справочное пособие по высшей математике» выходит в пяти томах и представляет собой новое, исправленное и существенно дополненное издание «Справочного пособия по математическому анализу» тех же авторов. В новом издании пособие охватывает три крупных раздела курса высшей математики — математический анализ, теорию дифференциальных уравнений, теорию функций комплексной переменной.

Том 4 является логическим продолжением трех предыдущих ориентированных на практику томов и содержит более четырехсот подробно решенных задач, но при этом отличается более детальным изложением теоретических вопросов и может служить самостоятельным замкнутым курсом теории функций комплексного переменного. Помимо вопросов, обычно включаемых в курсы такого рода, в книге излагается ряд нестандартных — таких, как интеграл Ньютона—Лейбница и производная Ферма—Лагранжа.

Пособие предназначено для студентов, преподавателей и работников физико-математических, экономических и инженерно-технических специальностей, специалистов по прикладной математике, а также лиц, самостоятельно изучающих высшую математику.

### **Оглавление**

Предисловие	3
<b>Глава 1. Основные структуры математического анализа</b>	<b>4</b>
§ 1. Элементы теории множеств и отображений	4
Некоторые логические символы (4) Обозначения, используемые в теории множеств (5) Натуральные числа. Метод математической индукции (5) Простейшие операции над множествами (6) Упорядоченная пара и декартово произведение множеств (7) Бинарные отношения. Проекция и сечения бинарного отношения. Обратное бинарное отношение (7) Функциональное бинарное отношение. Функция и простейшие понятия, связанные с ней (8) Обратная функция. Композиция отображений (9) Параметрическое и неявное отображения (9) Изоморфизм (10)	
§ 2. Математические структуры	10
Группа (10) Кольцо (10) Тело (10) Поле (11) Векторное пространство над полем К. Нормированное пространство (11)	
§ 3. Метрические пространства	12
Аксиомы метрики. Предел последовательности точек метрического пространства (12) Шары, сферы, диаметр множества (13) Открытые множества (14) Внутренность множества (15) Замкнутые множества, точки прикосновения, замыкание множества (16)	
§ 4. Компактные множества	18

§ 5. Связные пространства и связные множества	70
§ 6. Предел и непрерывность отображения из одного метрического пространства в другое	20
Предел и непрерывность отображения (20) Непрерывность композиции отображений (21) Непрерывность обратного отображения (22) Предел и непрерывность отображения в смысле Коши. Некоторые свойства непрерывных отображений (22) Равномерно непрерывные отображения (24) Гомеоморфизмы. Эквивалентные расстояния (25)	
<b>Глава 2. Комплексные числа и функции комплексного переменного</b>	<b>26</b>
§ 1. Комплексные числа и комплексная плоскость	76
Определение комплексного числа (26) Аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная формы его записи. Умножение и деление комплексных чисел. Операция извлечения корня из комплексного числа (28) Стереографическая проекция и ее свойства (29) Примеры (31)	
§ 2. Топология комплексной плоскости. Последовательности комплексных чисел. Свойства функций, непрерывных на компакте	43
Топология комплексной плоскости (43) Замкнутые множества, отрезок и ломаная. Связные множества (45) Последовательность комплексных чисел и ее предел (45) Свойства компакта $K \subset \mathbb{C}$ (47) Предел и непрерывность функции комплексного переменного (48) Арифметические операции над пределами и непрерывными функциями (49) Предел и непрерывность композиции функций (49) Свойства функций, непрерывных на компакте (50)	
§ 3. Непрерывные и гладкие кривые. Односвязные и многосвязные области	50
Примеры (53)	
§ 4. Дифференцируемые функции комплексного переменного. Связь между $\mathbb{C}$ -дифференцируемостью и $\mathbb{R}^2$ -дифференцируемостью.	63
Аналитические функции	
Определение дифференцируемой функции. Правила дифференцирования (63) Дифференциал функции (66) Критерий дифференцируемости функции комплексного переменного (67) Аналитические функции (68) Геометрический смысл производной функции комплексного переменного. Понятие конформного отображения (70) Плоские физические поля и их связь с аналитическими функциями (71) Неравенство Лагранжа (73) Примеры (73)	
Упражнения для самостоятельной работы	79
<b>Глава 3. Элементарные функции в комплексной плоскости</b>	<b>83</b>
§ 1. Дробно-линейные функции и их свойства	83
Определение дробно-линейной функции. Конформность отображения (83) Геометрические свойства дробно-линейных отображений (84) Дробно-линейные изоморфизмы и автоморфизмы (86) Примеры (88)	



§2. Степенная функция $w = z^n$ ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ). Многозначная функция $w = \sqrt[n]{z}$ и ее поверхность Римана	41
Степенная функция (91) Многозначная функция $w = \sqrt[n]{z}$ и ее поверхность Римана (92) Примеры (93)	
§ 3. Показательная функция $w = e^z$ и многозначная функция $z = \text{Ln } w$	94
Показательная функция $w = e^z$ (94) Многозначная функция $z = \text{Ln } w$ (96) Примеры (96)	
§ 4. Общая степенная и общая показательная функции	97
Общая степенная функция (97) Общая показательная функция (98)	
§ 5. Функция Жуковского	99
Определение функции Жуковского. Конформность (99) Примеры (100)	
§ 6. Тригонометрические и гиперболические функции	101
Примеры (105)	
Упражнения для самостоятельной работы	145
<b>Глава 4. Интегрирование в комплексной плоскости. Интегралы</b>	<b>149</b>
<b>Ньютона — Лейбница и Коши</b>	
§ 1. Интеграл Ньютона — Лейбница	149
Первообразная (149) Интеграл Ньютона — Лейбница (150) Линейность интеграла. Замена переменных и формула интегрирования по частям (757)	
§ 2. Производные и интегралы Ньютона — Лейбница любых порядков	153
Определение $n$ -производной и $n$ -интеграла (153) Формула Ньютона — Лейбница. Производные по пределам интегрирования (154) Формула Тейлора (156)	
§ 3. Производная Ферма — Лагранжа. Формула Тейлора — Пеано	156
Производная Ферма — Лагранжа (156) Теорема Тейлора — Пеано и ее обращение (157)	
§ 4. Криволинейные интегралы	159
Интегрирование функций по ориентированной гладкой кривой (759) Гомотопия двух кривых (путей) (161)	
§ 5. Теорема и интеграл Коши	162
Существование локальной первообразной аналитической функции (162) Первообразная вдоль кривой (вдоль пути) (165) Теорема Коши (166) Интегральная формула Коши (172) Примеры (173)	
§ 6. Интеграл типа Коши	175
Определение и основное свойство интеграла типа Коши (775)	
Гармоничность действительной и мнимой частей аналитической функции. Восстановление аналитической функции по ее действительной (мнимой) части (177) Теоремы Лиувилля и Морера (178) Главное значение и предельные значения интеграла типа Коши (179) Формулы Шварца и Пуассона (181) Примеры (184)	
Упражнения для самостоятельной работы	195

<b>Глава 5. Ряды аналитических функций. Изолированные особые точки</b>	<b>197</b>
§ 1. Ряд Тейлора	197
Общие сведения о рядах (197) Последовательность функций и функциональный ряд. Поточечная сходимость (198) Равномерная норма функции. Равномерная сходимость последовательности функций и функционального ряда (199) Нормальная сходимость функционального ряда. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов (201) Функциональные свойства равномерной суммы функционального ряда (203) Степенные ряды (206) Теорема Тейлора (208) Теорема единственности (210) Примеры (212)	
§ 2. Ряд Лорана и изолированные особые точки аналитических функций	219
Теорема Лорана (219) Классификация изолированных особых точек в $\mathbb{C}$ (227) Поведение аналитической функции при подходе к изолированной особой точке (222) Бесконечная изолированная особая точка (224) Примеры (225)	
Упражнения для самостоятельной работы	229
<b>Глава 6. Аналитическое продолжение</b>	<b>231</b>
§ 1. Основные понятия. Аналитическое продолжение вдоль пути	232
Свойство единственности аналитической функции. Определение аналитического продолжения (232) Аналитическое продолжение вдоль пути (234) Инвариантность аналитического продолжения вдоль пути относительно гомотопных деформаций этого пути (235)	
§ 2. Полные аналитические функции	237
Понятие полной аналитической функции (237) Примеры полных аналитических функций (238) Особые точки полной аналитической функции (239) Существование особой точки на границе круга сходимости степенного ряда (240)	
§ 3. Принципы аналитического продолжения	240
Примеры (241)	
Упражнения для самостоятельной работы	243
<b>Глава 7. Вычеты и их применения</b>	<b>245</b>
§ 1. Определение вычета. Основная теорема	245
Вычет относительно изолированной конечной точки (245) Вычет относительно бесконечности (246) Теорема о вычетах (247) Примеры (248)	
§ 2. Целые и мероморфные функции	257
Целые функции (257) Мероморфные функции. Теорема Миттаг-Леффлера (257) Разложение мероморфных функций на простейшие дроби (259) Примеры (262)	
§ 3. Бесконечные произведения	264
Числовые бесконечные произведения (265) Равномерно сходящиеся бесконечные произведения (267) Представление целой функции в виде бесконечного произведения (267) Разложение $\sin z$ в бесконечное	

произведение (26Р) Род и порядок целой функции (270) Мероморфная функция как отношение двух целых функций (270) Примеры (271)	
§ 4. Применение вычетов для вычисления интегралов и сумм рядов	274
Применение вычетов для вычисления определенных интегралов (274)	
Применение вычетов к вычислению сумм рядов (278) Примеры (279)	
Упражнения для самостоятельной работы	291
<b>Глава 8. Некоторые общие вопросы геометрической теории аналитических функций</b>	<b>295</b>
§ 1. Принцип аргумента. Теорема Руше	295
Вычисление интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\varphi(z)f'(z)}{f(z)-A} dz$ (295) Теорема о логарифмическом вычете (296) Принцип аргумента (296) Теорема Руше (297) Примеры (298)	
§ 2. Сохранение области и локальное обращение аналитической функции	300
Принцип сохранения области (300) Локальное обращение аналитических функций (301) Примеры (303)	
§ 3. Экстремальные свойства модуля аналитической функции	304
Принцип максимума модуля аналитической функции (304) Лемма Шварца (305) Примеры (305)	
§ 4. Принцип компактности. Функционалы на семействе аналитических функций	308
Равномерно ограниченные и равностепенно непрерывные семейства функций (308) Принцип компактности (309) Функционалы, определенные на множествах функций (310) Теорема Гурвица (311)	
§ 5. Существование и единственность конформного отображения	312
Конформные изоморфизмы и автоморфизмы (312) Примеры автоморфизмов (312) Существование и единственность изоморфизмов областей, изоморфных единичному кругу (313) Теорема существования (314)	
§ 6. Соответствие границ и принцип симметрии при конформном отображении	315
Теорема о соответствии границ (315) Принцип симметрии (316) Примеры (317)	
§ 7. Конформное отображение многоугольников. Интеграл Кристоффеля — Шварца	318
Отображение верхней полуплоскости на многоугольник (318) Случай многоугольника, имеющего вершины в бесконечности (322)	
Отображение верхней полуплоскости на внешность многоугольника (322) Отображение верхней полуплоскости на прямоугольник (323)	
Эллиптический синус и его двоякая периодичность (324) Отображение единичного круга на многоугольник (326) Примеры (328)	
Упражнения для самостоятельной работы	332
Ответы	334

### Предметный указатель

Настоящий предметный указатель призван облегчить поиск терминов по алфавитному признаку. Для поиска терминов по тематическому признаку пользуйтесь подробно составленным оглавлением.

В настоящем предметном указателе, как правило, приводятся ссылки на страницу, где термин определяется. Составитель указателя не ставил своей целью отследить все упоминания приведенных терминов в книге. Исключение составляют термины, описывающие методы, приемы, практические результаты: для них в некоторых случаях указаны также задачи, в которых они используются. Номера задач указаны курсивом по схеме "число:число", где первое число — номер главы, второе — порядковый номер задачи.

#### А

##### Абеля

— теорема, 202

— — вторая, 207-208

— — первая, 207

— тождество, 202

##### абсолютное значение

— в поле, 11

— в теле, 11

автоморфизм конформный, 312

##### аддитивность

— интеграла относительно пределов  
интегрирования, 151

— криволинейного интеграла, 159

аксиома индукции, 5

##### аксиомы

— абсолютного значения, 11

— векторного пространства, 11

— длины, 11

— метрики, 12

— модуля, 11

— нормы, 11

Аполлония окружность, 41

аргумент комплексного числа, 28

—, главное значение, 28

Архимеда спираль, 40

#### Б

##### Бернулли

— лемниската, 59

— числа, 215

Бесселя функция, 226

бета-функция Эйлера, 328

Больцано—Вейерштрасса теорема, 47

Бореля—Лебега теорема, 48 2:60

#### В

##### Вейерштрасса

— бесконечное произведение, 268

— мажорантный признак равномерной  
сходимости функционального ряда,  
201

— теорема, 50, 204-205

— — о представлении целой функции  
в виде бесконечного  
произведения, 269

вектор-функция, 50

векторное пространство над полем, 11

векторы, 11

ветви многозначной функции  
однозначные, 92

ветвь многозначной функции  $\operatorname{Ln} w$   
главная, 96

Виета теорема, 2:21, 2:40, 2:41

внешность простой замкнутой кривой,  
52

##### внутренность

— множества, 15

— простой замкнутой кривой, 52

##### вычет

— аналитической функции

относительно её изолированной  
особой точки, 245

— функции

— — логарифмический, 296

— — относительно бесконечности, 246

#### Г

Гаусса утверждение, 37

- Гейне определение
  - непрерывности отображения в точке, 21
  - предела отображения, 21
- Гельдера условие, 179
- главное значение
  - аргумента комплексного числа, 28
  - интеграла типа Коши в точке, 179
- гомеоморфизм, 25
- гомотопия
  - замкнутой кривой в замкнутую кривую, 161
  - кривой в кривую, 161
  - с фиксированным началом и концом, 161
- граница множества, 17, 45
- график отображения, 8, 9
- группа, 10
  - абелева, 10
  - автоморфизмов области, 312
  - аддитивная, 10
  - коммутативная, 10
  - мультипликативная, 10
- Гурвица теорема, 311
- Д
  - Д'Аламбера признак, 2:51
- действительная часть
  - комплексного числа, 27
  - функции, 48
- деформация одной кривой в другую, 161
- диаметр множества, 14
- Дирихле
  - теорема, 155, 203
  - признак, 5:8, 5:11
- дифференциал функции в точке, 66
- дифференцируемость вектор-функции на сегменте, 51
- длина в векторном пространстве, 11
- долгота, 31
- дополнение одного множества в другом, 6
- Ж
- Жордана
  - лемма, 275, 7:59
  - теорема, 52
- Жуковского функция, 99, 318, 3:28, 3:72, 3:74, 3:87-93, 3:95, 3:97, 3:99, 3:100, 3:101
- З
  - замыкание множества, 16, 45
- знаки
  - включения, 5
  - принадлежности, 5
- значение
  - аргумента комплексного числа
    - главное, 28
  - бесконечного произведения, 265
  - интеграла типа Коши в точке
    - — главное, 179
    - — предельное слева от кривой, 180
    - — предельное справа от кривой, 180
  - отображения, 9
- И
  - изоморфизм
    - дробно-линейный, 87
    - конформный, 312
    - множества на множество, 10
  - интеграл
    - Ньютона—Лейбница
      - — определенный, 150
      - — с фиксированным нижним пределом и переменным верхним пределом интегрирования, 150
    - в смысле главного значения по Коши, 179
    - Коши, 173
    - криволинейный функции по кривой, 159
      - — второго рода, 159
      - — первого рода, 159
    - Кристоффеля—Шварца, 320
    - — второго рода, 321
    - — первого рода, 321
    - типа Коши, 175
    - —, значение в точке
      - — — главное, 179
      - — — предельное



- — — — слева от кривой, 180
- — — — справа от кривой, 180
- Шварца, 181
- Эйлера—Пуассона, 191
- эллиптический первого рода, 323
- — — — полный, 324
- 1-интеграл, 153
- $n$ -интеграл, 154
- К
- Кантора теорема, 18, 25
- Каратеодори теорема, 315
- Кардана формулы, 2:41
- квантор
- общности, 4
- существования, 4
- кольцо, 10
- коммутативное, 10
- унитарное, 10
- компакт, 18, 47
- комплексная плоскость, 27
- комплексные числа, 27
- комплексный потенциал, 72, 2:83
- композиция отображений, 9
- компонента упорядоченной пары
- вторая, 7
- первая, 7
- компоненты связные, 52
- континуум, 52
- линейный, 52
- контур, 160
- координата упорядоченной пары
- вторая, 7
- первая, 7
- Коши
- интеграл, 173
- критерий, 46, 198, 200
- для функционального ряда, 201
- определение
- — непрерывности отображения, 22
- — предела отображения, 22
- теорема
- — интегральная, 166-167
- — —, обобщение на случай функции, не являющейся аналитической на контуре интегрирования, 168-170
- — о вычетах, 247, 7:42, 7:47
- —, обобщение на случай неодносвязной области, 171-172
- формула интегральная, 172—173
- ядро, 179
- Коши—Адамара
- теорема, 207
- формула, 5:10, 5:11, 8:6
- Коши—Римана условия, 67, 2:72, 2:73, 2:75, 2:77-80
- кривая
- гладкая
- —, ориентация, 51
- — ориентированная, 51
- —, параметрическое представление, 51
- — простая, 51
- жорданова, 51
- — замкнутая, 51
- замкнутая, 51
- канторова, 52
- кусочно-гладкая, 52
- непрерывная, 51
- ориентированная
- — противоположно по отношению к данной, 51
- , параметрическое представление, 51
- простая, 51
- — замкнутая
- — —, внешность, 52
- — —, внутренность, 52
- Кристоффеля—Шварца
- интеграл, 320
- — второго рода, 321
- — первого рода, 321
- формула, 320, 8:22, 8:25
- критерий
- дифференцируемости функции  $f$ :  $C - > C$  67, 2:79
- компактности в себе, 47—48
- Коши, 46, 198, 200
- — для функционального ряда, 201

круг сходимости аналитического  
элемента, 233  
круговое свойство дробно-линейных  
отображений, 85

Л

Лагранжа

— ряд, 302

— теорема, 73

Ландау символы, 11

Лапласа оператор, 178

лемма

— Жордана, 275, 7:59

— Шварца, 305, 8:15-17

леммы

— Паскаля, 5

лемниската Бернулли, 59

Линдедёфа результат, 316

линейное пространство над полем, 11

линейность криволинейного интеграла,  
159

Лиувилля теорема, 178-179, 4:25

Лопиталя правило, 7:8

Лорана теорема, 219-220

М

мера жорданова множества, 79

метод

— математической индукции, 5-6, 2:53

— от противного, 4

метрика, 12

— сферическая, 43

Миттаг-Леффлера теорема, 258-259,  
7:25, 7:27

мнимая часть

— комплексного числа, 27

— функции, 48

многочлен Тейлора, 156

множества

— изоморфные, 10

— непересекающиеся, 6

— равные, 5

множество

— внешних точек данного множества,  
15

—, внутренность, 15

— вполне ограниченное в метрическом  
пространстве, 18

—, граница, 17, 45

—, диаметр, 14

— жорданово

— —, мера, 79

— —, площадь, 79

— замкнутое, 16, 45

— — связное, 45

—, замыкание, 16, 45

— значений отображения, 9

— компактное, 20

— — в метрическом пространстве, 18

— — в себе, 18, 47

— — относительно метрического  
пространства, 18

— линейно-связное, 149

—, образ при отображении, 9

— ограниченное, 14, 44

— определения отображения, 9

— открытое, 14, 45

— — связное, 45

—, покрытие, 18

—, прообраз при отображении, 9

— пустое, 5

— связное в метрическом  
пространстве, 20

— точек кусочно-гладкой кривой, 52

— функций

— — компактное

— — — в данной области, 309

— — — в себе, 311

— — равномерно ограниченное внутри  
данной области, 309

— — равностепенно непрерывное, 309

— — внутри данной области, 309

модуль

— в поле, 11

— в теле, 11

— комплексного числа, 26

Монтеля признак компактности, 309—  
310

Морера теорема, 179

Муавра формула, 29, 2:17

## Н

направление обхода границы области  
положительное, 162

непрерывность

— отображений взаимная, 25

— отображения, 21, 23

— — в точке, 23

— — — в смысле Гейне, 21

— — — в смысле Капи, 22

— — равномерная, 24

— функции в точке, 48

неравенство треугольника

— для абсолютного значения, 11

— для метрики, 12

— для модуля, 11

— для нормы (длины) в векторном  
пространстве, 11

норма

— в векторном пространстве, 11

— вектора, 11

— функции равномерная, 199

— —, свойства, 199

нуль функции, 212

— кратности  $n$ , 212

Ньютона—Лейбница формула, 150

— для  $n$ -интеграла, 154—155

## О

области

— дробно-линейно изоморфные, 87

— конформно-изоморфные, 312

область, 20, 45

— бесконечносвязная, 53

— замкнутая, 20, 45

— значений отображения, 9

— компактная, 53

— многосвязная, 52

— неодносвязная, 53

— односвязная, 53, 162

— — относительно комплексной  
плоскости, 52

— — относительно расширенной  
комплексной плоскости, 52

— определения

— — отображения, 9

— — полной аналитической функции  
естественная, 237

— отправления отображения, 8

— прибытия отображения, 8

— существования полной  
аналитической функции, 237

образ множества при отображении, 9

обращение отношения, 8

объединение множеств, 6

окрестность

— множества, 15

— — открытая, 15

— точки в множестве, 53

$\delta$ -окрестность точки, 13

$\varepsilon$ -окрестность бесконечно удаленной  
точки, 44

$\varepsilon$ -окрестность точки, 44

окружность Аполлония, 41

оператор Лапласа, 178

операции над множествами, 6-7

операция

— обращения отношения, 8

— сложения комплексных чисел, 26

— транспонирования отношения, 8

— умножения комплексных чисел, 27

ориентация

— гладкой кривой, 51

— — противоположная, 51

$n$ -остаток ряда, 203

отношение

— бинарное

— — между элементами множеств, 7

— — обратное, 8

— —, проекция

— — — вторая, 8

— — — первая, 7

— — функциональное, 8

—, обращение, 8

—, транспонирование, 8

— отображение

— биективное, 9

— взаимно однозначное, 9

— гиперболическое, 125

- , график, 8, 9
- дробно-линейное
- —, нормальная форма, 125
- заданное параметрически, 9
- , значение, 9
- из множества в множество, 8
- конформное
- — в области, 71
- — в точке, 71
- локсодромическое, 125
- множества в множество, 9
- множества на множество, 9
- , множество значений, 9
- , множество определения, 9
- непрерывное, 21, 23
- — в точке, 23
- — — в смысле Гейне, 21
- — — в смысле Капи, 22
- , область значений, 9
- , область определения, 9
- , область отправления, 8
- , область прибытия, 8
- обратимое, 9
- обратное, 9
- открытое, 301
- — внутреннее, 301
- равномерно непрерывное на множестве, 24
- разрывное в точке, 21
- эллиптическое, 125
- отображения
- взаимно непрерывные, 25
- , композиция, 9
- отрезок
- на комплексной плоскости, 45
- , параметрическое представление, 45
- П
- пара упорядоченная, 7
- , вторая компонента (вторая координата), 7
- , первая компонента (первая координата), 7
- параллель, 31
- параметр, 9

- Паскаля леммы, 5
- первообразная функции, 149
- вдоль кривой, 165
- вдоль пути, 165
- пересечение множеств, 6
- петля, 160
- Пикара теорема, 224
- плоскость
- комплексная, 27
- — расширенная, 29
- экваториальная, 30
- плотность, 179
- площадь жорданова множества, 79
- подмножество, 5
- максимально связное, 52
- подпространство метрического пространства, 17
- показательная форма записи комплексного числа, 28
- покрытие множества, 18
- поле, 11
- нормированное, 11
- полином Чебышева, 229
- положительное направление обхода границы области, 162
- полумеридиан, 31
- полюс
- северный, 31
- функции, 221
- — простой, 221
- южный, 31
- порядок
- полюса, 221
- связности, 53
- А -точки, 211
- целой функции, 270
- последовательность
- векторов
- — фундаментальная, 12
- комплексных чисел
- — бимонотонная, 202
- сходящаяся, 46
- точек метрического пространства
- — сходящаяся, 13

- — фундаментальная, 13
- —  $(C, \rho)$ , 45
- функциональная, 198
- — поточечно сходящаяся к данной функции, 198
- — равномерно сходящаяся к данной функции на данном множестве, 199
- — равномерно фундаментальная, 200
- числовая, 9
- элементов множества, 9
- потенциал комплексный, 72, 2:83
- правила дифференцирования интеграла
- по верхнему переменному пределу интегрирования, 151
- — по нижнему переменному пределу интегрирования, 151
- правило
- дифференцирования произведения функций, 65
- Лопиталя, 7:8
- перестановки пределов интегрирования, 151
- предел
- отображения, 21
- — в смысле Гейне, 21
- — в точке в смысле Коши, 22
- — частичный, 21
- последовательности, 45
- — векторов в нормированном пространстве, 11
- — точек в метрическом пространстве, 13
- — частичный, 47
- функции в точке, 48
- — частичный, 48
- функциональной последовательности равномерный, 200
- представление параметрическое
- гладкой кривой, 51
- естественное, 51
- кривой, 51
- натуральное, 51
- нормальное, 51
- обобщенной непрерывной кривой, 52
- отрезка, 45
- представления параметрические эквивалентные
- гладкой кривой, 51
- непрерывной кривой, 51
- признак
- Вейерштрасса равномерной сходимости
- функционального ряда мажорантный, 201
- Д'Аламбера, 2:51
- Дирихле, 5:8, 5:11
- компактности Монтеля, 309-310
- сходимости ряда необходимый, 198
- Прингсхейма теорема, 242
- принцип
- аргумента, 297
- двойственности, 7
- исключенного третьего, 4
- максимума модуля, 8:8—10, 8:14
- — вторая формулировка, 305
- — первая формулировка, 304
- непрерывности, 240—241
- однолистности, 303
- симметрии, 317, 8:18, 8:19
- — Романа—Шварца, 137, 241, 3:95
- сохранения области, 300—301
- продолжение функции, 9
- аналитическое, 232
- проекция
- бинарного отношения
- — вторая, 8
- — первая, 7
- стереографическая, 30
- произведение
- бесконечное
- — Вейерштрасса, 268
- —, значение, 265
- — сходящееся, 265
- — — абсолютно, 266



- — — равномерно в области, 267
- многочленов, 208
- множеств
- — декартово, 7
- — прямое, 7
- степенных рядов, 208
- 1-производная, 153
- $n$ -производная Ферма—Лагранжа функции в точке, 156
- $n + 1$ -производная, 153
- производная вектор-функции, 50
- прообраз множества при отображении, 9
- пространства метрические гомеоморфные, 25
- пространство
  - банахово, 12
  - векторное
  - — над полем, 11
  - — нормированное, 11
  - линейное над полем, 11
  - метрическое, 12
  - — полное, 13
  - — связное, 20
  - нормированное полное, 12
  - топологическое, 45
  - —, свойства, 45
- Пуанкаре теорема, 270
- Пуанкаре—Вольтерра теорема, 237
- Пуассона формула, 182, 4:8
- Р
- равенство
  - множеств, 5
  - упорядоченных пар, 7
- радиус сходимости степенного ряда, 206
- $p$ -раздутье множества, 309
- разность множеств, 6
- расстояние
  - индуцированное, 17
  - между точками метрического пространства, 14
  - хордальное, 44
- расстояния

- топологически эквивалентные, 25
- эквивалентные, 25
- расширенная комплексная плоскость, 29
- результат
  - Линделёфа, 316
  - Шварца, 316
- Римана
  - сфера, 30, 2:43-47
  - теорема, 314—315
- Римана—Шварца принцип симметрии, 137, 241, 3:95, 3:97, 3:100, 3:102
- род бесконечного произведения, 270
- Рунге теорема, 297-298, 8:1, 8:3
- ряд
  - Тейлора, 209
  - Лагранжа, 302
  - Лорана функции в кольце, 220
  - мероморфных функций сходящийся, 258
  - — равномерно, 258
  - функциональный, 197, 198
  - — степенной, 206
  - — сходящийся нормально, 201
  - — сходящийся поточечно, 199
  - — сходящийся равномерно, 200
  - — удовлетворяющий равномерному условию Коши, 201
  - Фурье, 7:30
  - числовой, 197
  - — расходящийся, 197
  - — сходящийся, 197
- С
- свойства
  - аналитической функции, 69—70
  - векторного пространства, 11
  - нормы функции равномерной, 199
  - показательной функции, 28
  - стереографической проекции, 30
  - топологического пространства, 45
- северный полюс, 31
- $\varepsilon$ -сеть множества, 18
- сечение
  - второе, 8

- первое, 8
- символ
  - дизъюнкции, 4
  - импликации, 4
  - конъюнкции, 4
  - отрицания, 4
  - эквивалентности, 4
- символы Ландау, 11
- синус эллиптический, 324
- след кусочно-гладкой кривой, 52
- сопряженное число, 27
- Сохоцкого
  - теорема, 223—224
  - формулы, 181
- спираль Архимеда, 40
- стереографическая проекция, 30
- , свойства, 30
- структура математическая, 10
- сужение функции, 9
- на множество, 9
- сумма ряда, 197
- функционального
  - — поточечная на данном множестве, 199
  - — равномерная, 200
  - — частичная, 198
  - частичная, 197
- сфера, 13
- Римана, 30, 2:43-47
- Т
- Тейлора
  - многочлен, 156
  - теорема, 209
  - формула с остаточным членом, записанным посредством  $n$ -интеграла, 156
- Тейлора—Пеано формула, 157-158
- тело, 10
- нормированное, 11
- теорема
  - Абеля, 202
  - — вторая, 207-208
  - — первая, 207
  - алгебры основная, 298
  - Больцано—Вейерштрасса, 47
  - Бореля—Лебега, 48, 2:60
  - Вейерштрасса, 50, 204-205
  - — о представлении целой функции в виде бесконечного произведения, 269
  - Виета, 2:21, 2:40, 2:41
  - Гурвица, 311
  - Дирихле, 155, 203
  - Жордана, 52
  - Кантора, 18, 25
  - Каратеодори, 315
  - Коши
    - — интегральная, 166-167
    - — — обобщение на случай функции, не являющейся аналитической на контуре интегрирования, 168-170
    - — о вычетах, 247, 7:42, 7:47
    - —, обобщение на случай неодносвязной области, 171-172
  - Коши—Адамара, 207
  - Лагранжа, 73
  - Лиувилля, 178-179, 4:25
  - Лорана, 219-220
  - Миттаг-Леффлера, 258-259, 7:25, 7:27
  - Морера, 179
  - о биективных и непрерывных отображениях, 52
  - о вычетах основная, 247, 7:42, 7:47
  - о дифференцируемости произведения бесконечно малой дифференцируемой функции и непрерывной функции, 64
  - о достаточных условиях
    - — равномерной сходимости бесконечного произведения, 267
    - — существования первообразной в круге, 162—163
  - о замене переменной интегрирования, 152
  - о линейности
    - — интеграла, 151-152

- — операции дифференцирования, 64
- — равномерного предела, 200
- о логарифмическом вычете, 296
- о монодромии, 236
- о непрерывном образе компакта, 21, 50
- о непрерывности
  - — дифференцируемой функции, 64
  - — композиции
    - — — отображений, 21
    - — — функций, 49
  - — нормы, 11
  - — обратного отображения, 22
  - — сужения отображения, 23
- о почленном интегрировании равномерно сходящегося функционального ряда, 204
- о пределе композиции функций, 49
- о производной
  - —  $n$ -интеграла по пределам интегрирования, 155
  - — композиции, 63-64
  - — обратной функции, 65
  - — частного, 65
- о равномерной равносходимости функциональных рядов, связанных преобразованием Абеля, 202
- о равносходимости бесконечного произведения и числового ряда, 265
- о среднем, 173
- о существовании первообразной аналитической функции, заданной в односвязной области, 170—171
- об инвариантности
  - — интеграла при гомотопиях пути интегрирования, 166-167
  - — симметричных точек при дробно-линейном отображении, 86
- об интегрировании по частям, 152
- об обращении формулы Тейлора—
  - Леано, 158
- об ограниченности компакта, 47
- Пикара, 224
- Прингсхейма, 242
- Пуанкаре, 270
- Пуанкаре—Вольтерра, 237
- Романа, 314-315
- Руше, 297-298, 8:1-3
- Сохоцкого, 223-224
- Тейлора, 209
- Фреше, 19
- Хаусдорфа, 19
- Штольца, 2:50
- тождество Абеля, 202
- топология, 44
  - метрического пространства, 25
  - относительная, 53
- точка
  - бесконечно удаленная, 29
  - кривой
    - — конечная, 51
    - — кратная, 51
    - — начальная, 51
  - множества
    - — внешняя, 15
    - — внутренняя, 15, 45
    - — граничная, 17, 45
    - — изолированная, 17
    - — предельная, 17, 45
  - особая
    - — аналитической функции, 239
    - — изолированная, 221
    - — многозначного характера, 239
    - — однозначного характера, 239
    - — устранимая, 221
- последовательности предельная, 47
- прикосновения, 16, 45
- разветвления, 93, 239, 240
  - —  $(n - 1)$ -го порядка, 93, 240
  - — алгебраическая, 93
  - — —  $(n - 1)$ -го порядка, 93
  - — бесконечного порядка, 93, 240
  - — логарифмическая, 240
  - — существенно особая, 221

- устранимого разрыва, 21
- А-точка функции, 211
- кратная, 211
- , кратность, 211
- , порядок, 211
- простая, 211
- точки
  - метрического пространства, 12
  - симметричные
  - — относительно окружности, 85, 86
  - — относительно прямой, 85
- траектория
  - гладкая
  - — простая, 51
  - непрерывная, 51
- транспонирование отношения, 8
- тригонометрическая форма записи
  - комплексного числа, 28
- трохоида, 60
- У
  - угол между путями в точке, 84
  - упорядоченная пара, 7
  - уравнение деления круга, 35
  - условие Гельдера, 179
  - условия Коши—Римана, 67, 2:72, 2:73, 2:75, 2:77-80
  - утверждение Гаусса, 37
- Ф
  - форма
    - Дробно-линейного отображения нормальная, 125
    - записи комплексного числа
    - — показательная, 28
    - — тригонометрическая, 28
  - формула
    - Коши интегральная, 172—173
    - Коши—Адамара, S:10, 5:11, 8:6
    - Кристоффеля—Шварца, 320, 8:22, 8:25
    - Муавра, 29, 2:17
    - Ньютона—Лейбница, 150
    - — для  $n$ -интеграла, 154—155
    - Пуассона, 182, 4:8
    - Тейлора с остаточным членом, записанным посредством  $n$ -интеграла, 156
- Тейлора—Пеано, 157—158
- Шварца, 181
- формулы
  - Кардано, 2:41
  - Сохоцкого, 181
  - стереографической проекции основные, 30, 2:43—47
  - Эйлера, 101, 7:23, 7:24
- Фреше теорема, 19
- функции
  - аналитические равные, 237
  - гиперболические, 101
  - тригонометрические, 101
- функционал, 310
  - непрерывный на данном элементе, 310
- функция
  - авторморфная, 325
  - аналитическая
    - — в бесконечно удаленной точке, 219
    - — в замкнутой области, 69
    - — в области, 68
    - — в точке, 68
    - — на бесконечности, 69
    - — на кривой, 68
    - — на открытом множестве, 68
    - — на произвольном множестве, 68
    - — полная, 237
    - —, свойства, 69—70
  - Бесселя, 226
  - гармоническая в области, 177
  - гармонически сопряженная с данной, 178
  - голоморфная, 68
  - С-дифференцируемая, 67
  - R-дифференцируемая, 67
  - 1-дифференцируемая, 153
  - $n$ -дифференцируемая в точке в смысле Ферма—Лагранжа, 156
  - $n+1$ -дифференцируемая, 153
  - дифференцируемая в точке, 63

- дробно-линейная, 83
- Жуковского, 99, 3:28, 3:72, 3:74, 3:87-93, 3:95, 3:97, 3:99-101, 8:18
- 1-интегрируемая, 153
- интегрируемая в смысле Ньютона—Лейбница, 150
- кусочно-линейная, 45
- линейная, 66
- ломаная, 45
- мероморфная, 257, 271
- — в области, 259
- моногенная, 65
- непрерывная в точке, 48
- неявная, 10
- обобщенно-непрерывная, 50
- ограниченная на множестве, 50
- однолистная, 48
- показательная, 28, 94
- — общая, 98
- —, свойства, 28
- , продолжение, 9
- — аналитическое, 232
- степенная, 91
- — общая, 97-98
- , сужение
- — на множество, 9
- — с множества на множество, 9
- тока, 72
- целая, 257
- — бесконечного рода, 270
- — конечного рода, 270
- — трансцендентная, 257
- эллиптическая, 325
- Фурье ряд, 7:30
- Х
- Хаусдорфа теорема, 19
- Ц
- циклоида, 60
- удлиненная, 60
- укороченная, 60
- Ч
- часть ряда Лорана
- главная, 220

- правильная, 220
- Чебышева полином, 229
- числа
- Бернулли, 215
- комплексные, 27
- число комплексное сопряженное данному, 27
- член
- ряда общий, 197
- функционального ряда, 198
- функциональной последовательности, 198
- Ш
- шар
- замкнутый, 13
- открытый, 13
- Шварца
- интеграл, 181
- лемма, 305, 8:15-17
- результат, 316
- формула, 181
- широта, 31
- Штольца теорема, 2:50
- Э
- Эйлера
- бета-функция, 328
- формулы, 101, 7:2?, 7:24
- Эйлера—Пуассона интеграл, 191
- элемент
- аналитический, 232
- группы
- — единичный, 10
- — нейтральный, 10
- — нулевой, 10
- — обратный данному, 10
- канонический с центром в данной точке, 233
- Ю
- южный полюс, 31
- Я
- ядро
- Дирихле, 35
- Хеши, 179



# Предисловие

В учебной литературе, рекомендованной для изучения теории функций комплексного переменного, имеется много содержательных учебников и учебных пособий, авторами которых являются известные ученые М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, И. И. Привалов, А. И. Маркушевич, А. В. Бицадзе, М. А. Евграфов, А. Гурвиц, Р. Курант и другие. К сожалению, большинство из них не приспособлено как по объему, так и по выбору и распределению материала к учебным программам по теории функций комплексного переменного для физико-математических факультетов университетов России и других стран СНГ. Ничтожно мало написано пособий по решению задач. Начинающему преподавателю, а тем более студенту и аспиранту, нелегко выделить из объемистой книги основной материал так, чтобы образовался целостный, логически завершенный курс, отвечающий учебной программе.

Указанные выше обстоятельства натолкнули автора на мысль о необходимости написания на современном уровне требований книги, которая соответствовала бы учебным университетским программам по данному предмету, не была перегружена частностями и содержала большое количество решенных задач. В книгу включено порядка четырехсот решенных задач средней и повышенной трудности.

Характерной чертой многих книг по теории функций комплексного переменного является разноречивость и нечеткость основной терминологии. Например, основное понятие аналитической функции в разных местах одной и той же книги может иметь разный смысл. Это обстоятельство принято во внимание автором, и все рассматриваемые понятия имеют вполне определенный смысл.

В первой главе книги дано строгое определение функции (а не описание ее, как это принято в большинстве учебников), рассмотрены операции над множествами и основные вопросы теории метрических пространств. Без включения этого материала в книгу изложение основных вопросов на современном математическом уровне оказалось бы невозможным. Поэтому читателю будет полезно хотя бы бегло прочитать эту небольшую по объему главу для понимания остальных глав, включающих традиционные вопросы, относящиеся к теории аналитических функций, которая была создана в XIX столетии в первую очередь благодаря работам О. Коши, Г. Римана, К. Вейерштрасса.

В книге уделено большое внимание практическим вопросам конформных отображений. Новыми для читателя окажутся понятия интеграла Ньютона—Лейбница и производной Ферма—Лагранжа.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, владеющих знаниями в объеме стандартных программ по математическому анализу для студентов физико-математических специальностей университетов.

*Автор*

# Основные структуры математического анализа

В этой главе содержатся основные сведения, относящиеся к теории множеств и отображений, используемые в дальнейшем при изложении основного материала книги. Достаточно полно отражена теория метрических пространств. Рассматриваются понятия и употребляется символика, принятые в курсах современного математического анализа.

## § 1. Элементы теории множеств и отображений

### 1.1. Некоторые логические символы.

В математике часто вместо словесных выражений употребляют символику, заимствованную из логики. Так, вместо выражений “для всех”, “для каждого”, “для любого” употребляют знак  $\forall$ , а вместо слов “существует”, “найдется” — знак  $\exists$ . Их называют соответственно *квантором общности* и *квантором существования*. Предложения “для всех...” и “существует...” часто сопровождаются некоторыми ограничениями. Обычно эти ограничения записывают в круглых скобках. Вместо слов “такой, что” употребляют двоеточие или вертикальную черточку.

В формулировке каждой теоремы содержится некоторое свойство  $A$  (условие) и свойство  $B$  (закключение), выводимое из  $A$ . Коротко выражение “ $A$  влечет  $B$ ” записывается в виде “ $A \Rightarrow B$ ” ( $\Rightarrow$  — *символ импликации*). Обратная теорема, если она справедлива, запишется в виде  $B \Rightarrow A$ . Если данная теорема и обратная ей — справедливы, то свойства  $A$  и  $B$  эквивалентны, и тогда записывают  $A \leftrightarrow B$  ( $\leftrightarrow$  — *символ эквивалентности*), что выражается в форме: “Для того чтобы  $A$ , необходимо и достаточно, чтобы  $B$ ”, или “ $A$  тогда и только тогда, когда  $B$ ”.

Если некоторый объект обладает свойством  $A$  или свойством  $B$ , то пишут  $A \vee B$ , а также “ $A$  или  $B$ ” ( $\vee$  — *символ дизъюнкции*). Запись  $A \vee B$  означает, что справедливо хотя бы одно из свойств  $A$  или  $B$ .

Если оба свойства  $A$  и  $B$  справедливы одновременно, то это записывается в виде  $A \wedge B$ , или “ $A$  и  $B$ ” ( $\wedge$  — *символ конъюнкции*).

Запись  $\neg A$  обозначает “не  $A$ ”, “не верно, что  $A$ ” ( $\neg$  — *символ отрицания*).

Вместо выражения “существует единственный” употребляют знак  $!$ , а вместо выражения “равно по определению” — знак  $\stackrel{\text{def}}{=}$ .

Утверждение может быть записано с помощью одних лишь логических символов. В этом случае отрицание свойства, содержащего некоторое количество кванторов  $\forall$ ,  $\exists$  и свойство  $P$ , должно получаться заменой каждого квантора  $\forall$  на  $\exists$ ,  $\exists$  на  $\forall$  и свойства  $P$  — на его отрицание. Например, свойство непрерывности числовой функции в любой точке числовой прямой записывается одной строкой:

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Свойство числовой функции действительной переменной не быть всюду непрерывной, т. е. иметь разрыв хотя бы в одной точке, запишется в виде:

$$(\exists a \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta) : |f(x) - f(a)| > \varepsilon.$$

Некоторые теоремы будем доказывать *методом от противного*. При этом также используется *принцип исключенного третьего*, вследствие чего высказывание  $A \vee \neg A$  ( $A$  или не  $A$ ) считается

истинным независимо от конкретного содержания высказывания  $A$ . Одновременно считается, что  $\neg(\neg A) \leftrightarrow A$ , т. е. повторное отрицание равносильно начальному высказыванию.

## 1.2. Обозначения, используемые в теории множеств.

Понятие множества считаем первичным, и потому ограничимся лишь указанием терминологии и необходимых в дальнейшем обозначений.

Множество обозначают какой-нибудь буквой, например,  $M$ . Запись  $a \in M$  читается так: " $a$  есть элемент множества  $M$ " или " $a$  из множества  $M$ ". Запись  $M \ni x$  читается так: "множество  $M$  содержит элемент  $x$ ". Если элемент  $x$  не принадлежит множеству  $M$ , то записываем  $x \notin M$  или  $M \not\ni x$ . Запись  $M = \{a, b, c, \dots\}$  читается так: " $M$  есть множество, состоящее из элементов  $a, b, c$  и т. д." Множество может содержать лишь один элемент, например,  $M = \{a\}$ . Если  $P$  — свойство, которым обладают или не обладают элементы множества  $M$ , то запись

$$M_1 = \{a \in M \mid a \text{ обладает свойством } P\}$$

читается: " $M_1$  есть множество всех тех элементов множества  $M$ , которые обладают свойством  $P$ ". Например, запись  $M_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$  обозначает множество всех неотрицательных действительных чисел. Символы  $\in$  и  $\ni$  называют знаками принадлежности.

Задавая множество посредством некоторого свойства, часто заранее не знают, существуют ли вообще элементы, обладающие этим свойством. Поэтому целесообразно ввести в рассмотрение множество, не содержащее ни одного элемента. Оно называется *пустым* и обозначается знаком  $\emptyset$ .

Пусть  $M_1$  и  $M_2$  — множества. Если каждый элемент множества  $M_1$  принадлежит множеству  $M_2$ , то множество  $M_1$  называется *подмножеством* множества  $M_2$  (рис. 1). В этом случае записываем  $M_1 \subset M_2$  или  $M_2 \supset M_1$  и читаем: "множество  $M_2$  содержит множество  $M_1$ ". Символы  $\subset$  и  $\supset$  называются знаками включения.

Множества, состоящие из одних и тех же элементов, считаются *равными*. Очевидно, что  $M_1 = M_2 \leftrightarrow M_1 \subset M_2 \wedge M_2 \subset M_1$ .

Если в множестве  $M_1$  есть элементы, которые не входят в множество  $M_2$ , то  $M_1$  не содержится в множестве  $M_2$ , что записывается  $M_1 \not\subset M_2$  или  $M_2 \not\supset M_1$ .

Отметим, что любое множество  $M$  содержит пустое множество в качестве своего подмножества. Действительно, в противном случае пустое множество содержало бы по крайней мере один элемент, не принадлежащий множеству  $M$ . Но оно вообще не имеет элементов.

Будем пользоваться обозначениями:

$\emptyset$  — пустое множество;

$\exp M$  — множество всех подмножеств множества  $M$ ;

$\mathbb{N}$  — множество всех натуральных чисел;

$\mathbb{Z}_0$  — множество всех неотрицательных целых чисел;

$\mathbb{Z}$  — множество всех целых чисел;

$\mathbb{Q}$  — множество всех рациональных чисел;

$\mathbb{R}$  — множество всех действительных чисел;

$\mathbb{C}$  — множество всех комплексных чисел.

## 1.3. Натуральные числа. Метод математической индукции.

Важнейшим в математике является множество  $\mathbb{N}$  всех натуральных чисел. В нем определена операция сложения и выполняются свойства: 1) если  $n \in \mathbb{N}$ , то  $(n+1) \in \mathbb{N}$ ; 2) если некоторое множество  $M$  содержит 1 и из  $n \in M$  всегда следует, что  $(n+1) \in M$ , то  $M \supset \mathbb{N}$ . Свойство 2) называется *аксиомой индукции*. Блез Паскаль (1623–1662) впервые предложил метод доказательства, основанный на аксиоме индукции, называемый *методом математической индукции*. Суть его состоит в следующем.

Пусть даны утверждения  $A_1, A_2, A_3, \dots$  и доказаны две леммы Паскаля.

**Лемма 1.** Утверждение  $A_1$  справедливо.

**Лемма 2.** При любом  $n \in \mathbb{N}$  из справедливости  $A_n$  следует справедливость утверждения  $A_{n+1}$ .

Тогда все утверждения  $A_1, A_2, \dots$  справедливы.

Метод математической индукции сводится к аксиоме индукции. Действительно, пусть  $M = \{n \in \mathbb{N} \mid A_n \text{ справедливо}\}$ . Согласно лемме 1,  $1 \in M$ . По лемме 2  $n \in M \Rightarrow (n+1) \in M$ . По аксиоме индукции  $(\forall n \in \mathbb{N}) : n \in M$ , т. е. все утверждения  $A_1, A_2, \dots$  справедливы.

Докажем, например, что  $\forall n \in \mathbb{N}$  выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (1)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости леммы 1. Допуская выполнение равенства (1) для  $n \in \mathbb{N}$ , имеем

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

т. е. лемма 2 также выполняется. Методом математической индукции формула (1) доказана.

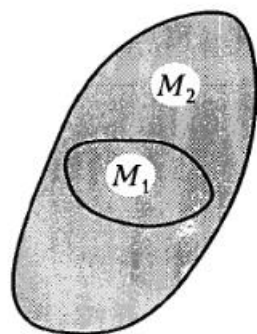


Рис. 1

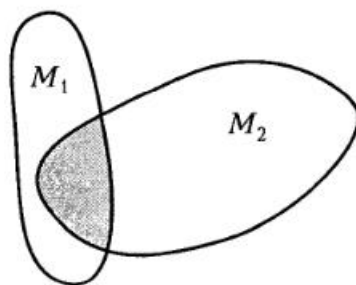


Рис. 2



Рис. 3

#### 1.4. Простейшие операции над множествами.

Пусть  $M_1 \in \exp M$ ,  $M_2 \in \exp M$ .

**Определение 1.** Пересечением множеств  $M_1$  и  $M_2$  называется множество  $M_1 \cap M_2 = \{a \mid a \in M_1 \wedge a \in M_2\}$ .

Пересечение множеств  $M_1$  и  $M_2$  состоит из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам  $M_1$  и  $M_2$  одновременно (рис. 2).

Если таких элементов нет, то говорят, что множества  $M_1$  и  $M_2$  не пересекаются, и пишут  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$  (рис. 3).

**Определение 2.** Объединением множеств  $M_1$  и  $M_2$  называется множество  $M_1 \cup M_2 = \{a \mid a \in M_1 \vee a \in M_2\}$ .

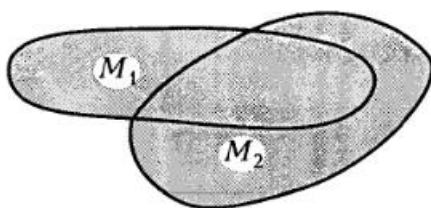


Рис. 4

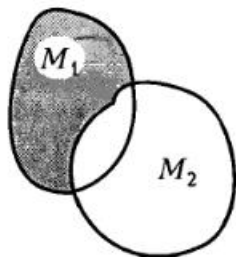


Рис. 5

Объединение множеств  $M_1$  и  $M_2$  состоит из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств  $M_1$ ,  $M_2$  (рис. 4).

**Определение 3.** Разностью множеств  $M_1$  и  $M_2$  называется множество  $M_1 \setminus M_2 = \{a \mid a \in M_1 \wedge a \notin M_2\}$ .

Разность множеств  $M_1$  и  $M_2$  состоит из всех тех и только тех элементов множества  $M_1$ , которые не входят в множество  $M_2$  (рис. 5).

Если  $M_1 \supset M_2$ , то разность  $M_1 \setminus M_2$  называется также дополнением  $M_2$  в  $M_1$  и обозначается символом  $CM_2$  (или  $CM_2$ , когда это не может привести к недоразумениям).

Пусть  $M_1 \in \exp M$ ,  $M_2 \in \exp M$ . Тогда справедливы равенства

$$C(M_1 \cup M_2) = CM_1 \cap CM_2, \quad C(M_1 \cap M_2) = CM_1 \cup CM_2. \quad (1)$$

Свойства, записанные этими равенствами, называют *принципом двойственности*. Докажем первое из них. Пусть  $x \in C(M_1 \cup M_2)$ . Имеем

$$\begin{aligned} x \in C(M_1 \cup M_2) &\Rightarrow x \notin M_1 \cup M_2 \Rightarrow x \notin M_1 \wedge x \notin M_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in CM_1 \wedge x \in CM_2 \Rightarrow x \in CM_1 \cap CM_2 \Rightarrow C(M_1 \cup M_2) \subset CM_1 \cap CM_2. \end{aligned}$$

Если  $y \in CM_1 \cap CM_2$ , то получим:

$$\begin{aligned} y \in CM_1 \cap CM_2 &\Rightarrow y \in CM_1 \wedge y \in CM_2 \Rightarrow y \notin M_1 \wedge y \notin M_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y \notin M_1 \cup M_2 \Rightarrow y \in C(M_1 \cup M_2) \Rightarrow CM_1 \cap CM_2 \subset C(M_1 \cup M_2). \end{aligned}$$

Из последних включений следует доказываемое равенство. Второе равенство в (1) доказывается аналогично.

Принцип двойственности без труда переносится на произвольное семейство подмножеств множества  $M$ :

$$C \bigcup_{\nu} M_{\nu} = \bigcap_{\nu} CM_{\nu}, \quad C \bigcap_{\nu} M_{\nu} = \bigcup_{\nu} CM_{\nu}. \quad (2)$$

Из формулы (2) видно, что символ дополнения  $C$  можно менять местами со знаками  $\cup$  и  $\cap$ , причем один из этих знаков переходит в другой.

### 1.5. Упорядоченная пара и декартово произведение множеств.

Важным для математики является понятие *упорядоченной пары*  $(x, y)$ , составленной из элементов одного и того же множества или из элементов разных множеств  $X$  и  $Y$ . Основное свойство упорядоченной пары состоит в следующем: две упорядоченные пары  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  считаются *равными* тогда и только тогда, когда  $x_1 = x_2$  и  $y_1 = y_2$ . Элемент  $x$  называется *первой компонентой* (координатой) пары  $(x, y)$ , а элемент  $y$  — *второй компонентой* (координатой) той же пары. Понятие упорядоченной пары так же, как и понятие множества, можно считать первичным.

С помощью понятия упорядоченной пары вводится еще одна операция над множествами — операция прямого или декартова умножения.

**Определение.** Декартовым произведением множеств  $X$  и  $Y$  называется множество

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Декартово произведение двух пересекающихся различных прямых можно отождествить с плоскостью, проходящей через эти прямые, по правилу " $M = (x, y)$ " (рис. 6). Это свойство лежит в основе метода координат, предложенного знаменитым математиком Рене Декартом (1596–1650) для решения геометрических задач, и объясняет название умножения.

Посредством метода математической индукции определяется упорядоченный набор  $n+1$  элементов

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = ((x_1, x_2, \dots, x_n), x_{n+1}), \quad n \geq 2,$$

и декартово произведение множеств

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n+1} = (X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n) \times X_{n+1}.$$

### 1.6. Бинарные отношения. Проекция и сечения бинарного отношения.

#### Обратное бинарное отношение.

**Определение.** Множество  $\Gamma$  называется *бинарным отношением* между элементами множеств  $X$  и  $Y$ , если  $\Gamma \subset X \times Y$ .

Над бинарными отношениями можно проводить не только обычные для множеств операции (пересечения и объединения), но и специальные — проектирования и обращения.

*Первой проекцией* бинарного отношения  $\Gamma \subset X \times Y$  называется множество

$$\Gamma_1 = \text{pr}_1 \Gamma = \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in \Gamma\}$$

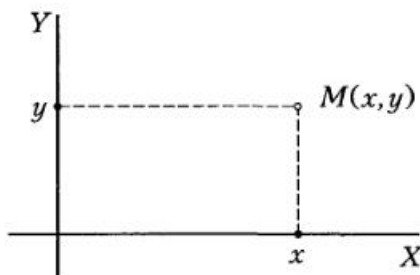


Рис. 6



Первая проекция бинарного отношения  $\Gamma$  состоит из всех первых координат упорядоченных пар, принадлежащих множеству  $\Gamma$  (рис. 7).

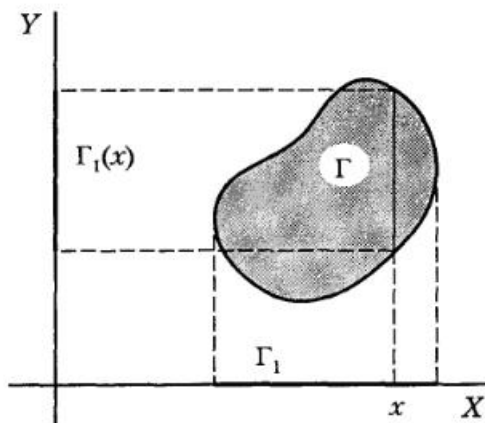


Рис. 7

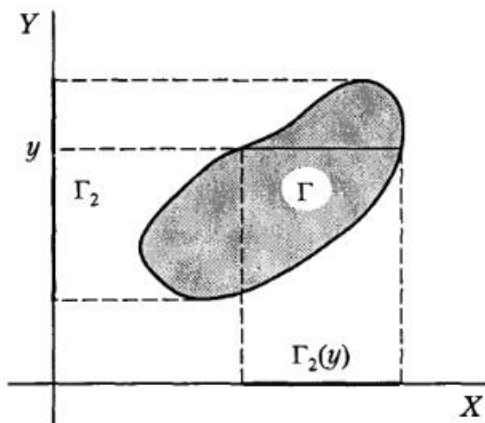


Рис. 8

Множество  $\Gamma_1(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in \Gamma\}$  называется *первым сечением*  $\Gamma$  посредством  $x$  (см. рис. 7). Оно состоит из вторых координат всех тех точек из  $\Gamma$ , у которых первая координата равна  $x$ . Первое сечение является пустым множеством  $\forall x \notin \Gamma_1$ .

Второй проекцией бинарного отношения  $\Gamma$  называется множество

$$\Gamma_2 = \text{pr}_2 \Gamma = \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in \Gamma\}$$

Вторая проекция бинарного отношения  $\Gamma$  — это множество всех вторых координат тех упорядоченных пар, которые принадлежат множеству  $\Gamma$  (рис. 8).

Множество  $\Gamma_2(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in \Gamma\}$  называется *вторым сечением*  $\Gamma$  посредством  $y$  (см. рис. 8). Оно состоит из первых координат всех тех точек из  $\Gamma$ , у которых вторая координата равна  $y$ . Второе сечение является пустым множеством  $\forall y \notin \Gamma_2$ .

Каждому бинарному отношению  $\Gamma$  можно поставить в соответствие *обратное бинарное отношение*  $\Gamma^{-1}$  по правилу

$$\Gamma^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \Gamma\}$$

(рис. 9). Иногда операцию обращения  $\Gamma$  называют *операцией транспонирования отношения*  $\Gamma$ .

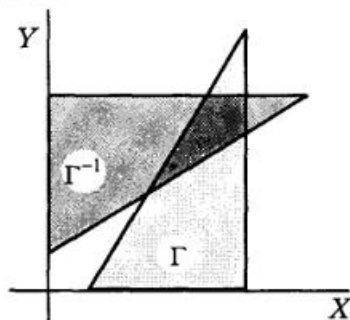


Рис. 9

## 1.7. Функциональное бинарное отношение.

### Функция и простейшие понятия, связанные с ней.

Бинарное отношение  $\Gamma$  называется *функциональным*, если оно не содержит различных упорядоченных пар с одинаковыми первыми координатами.

Сформулируем основное определение отображения из множества  $X$  в множество  $Y$ .

**Определение 1.** Упорядоченная тройка множеств  $(X, Y, \Gamma)$  называется *отображением* из множества  $X$  в множество  $Y$ , если  $\Gamma$  есть функциональное бинарное отношение между элементами множеств  $X$  и  $Y$ .

Множество  $X$  называется *областью отправления* отображения, множество  $Y$  — *областью прибытия* отображения, множество  $\Gamma$  — *графиком* отображения.

Обычно отображение обозначают какой-нибудь строчной латинской буквой, например,  $f$ . При этом вместо  $f = (X, Y, \Gamma)$  пишут:  $f : X \rightarrow Y$ . Если  $X$  и  $Y$  известны, то, согласно определению, задание отображения  $f$  равносильно заданию графика  $\Gamma$ .

Первая проекция графика отображения  $f$  называется *областью* (множеством) *определения* отображения  $f$  и обозначается  $D_f$  или  $D(f)$ . Вторая проекция графика отображения  $f$  называется *областью* (множеством) *значений* отображения  $f$  и обозначается  $E_f$  или  $E(f)$ . Если  $x \in D_f$  и пара  $(x, y)$  принадлежит графику отображения  $f$ , то элемент  $y$  называется *значением* отображения  $f$  на элементе  $x$  и обозначается  $f(x)$ .

Если известны область определения  $D_f$  и значения  $f(x) \forall x \in D_f$ , то график  $\Gamma(f)$  отображения  $f$  строится по правилу

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}.$$

Если  $D_f = X$ , то отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *отображением множества  $X$  в множество  $Y$*  и обозначается

$$X \xrightarrow{f} Y.$$

Если  $D_f = X$ ,  $E_f = Y$ , то отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *отображением множества  $X$  на множество  $Y$*  и обозначается

$$X \xrightarrow[\text{на}]f Y.$$

Функция  $f_1 = (X, Y, \Gamma_1)$  называется *сужением функции  $f = (X, Y, \Gamma)$* , если  $\Gamma_1 \subset \Gamma$ . В этом случае функция  $f$  называется *продолжением функции  $f_1$  с множества  $D_{f_1} = \text{пр}_1 \Gamma_1$  на множество  $D_f = \text{пр}_1 \Gamma$* . Если  $A$  — множество и  $A \subset \text{пр}_1 \Gamma$ , то существует такое сужение  $f_1$  функции  $f$ , которое имеет свойство  $A = D_{f_1}$ . Функция  $f_1$  называется *сужением функции  $f$  на множество  $A$*  и обозначается  $f|_A$ . Существование сужения функции  $f$  на множество  $A$  вытекает из того, что

$$\Gamma(f_1) = \{(x, y) \mid x \in A \wedge (x, y) \in \Gamma\}.$$

**Определение 2.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$ . Для любого подмножества  $A \subset D_f$  подмножество множества  $E_f$ , определяемое свойством “существует такой элемент  $x \in A$ , что  $y = f(x)$ ”, называется *образом множества  $A$  при отображении  $f$*  и обозначается через  $f(A)$ .

Для любого подмножества  $A' \subset E_f$  подмножество множества  $D_f$ , определяемое свойством  $f(x) \in A'$ , называется *прообразом  $A'$  при отображении  $f$*  и обозначается  $f^{-1}(A')$ .

Задавая отображение, часто пользуются записью  $x \mapsto f(x)$ .

Пусть  $X$  — множество. Отображение  $\mathbb{N} \xrightarrow{x_n} X$  называется *последовательностью* элементов множества  $X$  и обозначается  $(x_n)$ . Если  $X = \mathbb{R}$ , то последовательность  $(x_n)$  называется *числовой*.

### 1.8. Обратная функция. Композиция отображений.

Отображение  $f = (X, Y, \Gamma)$  называется *обратимым*, если бинарное отношение  $\Gamma^{-1}$  является функциональным отношением между элементами множеств  $Y$  и  $X$ . В этом случае отображение  $(Y, X, \Gamma^{-1})$  называется *обратным* отображению  $f$  и обозначается  $f^{-1}$ . Обратимое отображение  $f$  множества  $X$  на множество  $Y$  называется *взаимно однозначным* или *биективным* отображением и обозначается

$$X \xleftrightarrow{f} Y.$$

Тогда  $\forall y \in Y \exists! x \in X: f(x) = y$  и полагаем  $f^{-1}(y) = x$ .

Важным в математике является понятие композиции отображений.

Пусть даны отображения  $f: X \rightarrow Y$  и  $\varphi: T \rightarrow X$ . *Композиция отображений  $\varphi$  и  $f$*  обозначается  $f \circ \varphi$ . Ее область определения состоит из тех значений  $t \in D_\varphi$ , для которых  $\varphi(t) \in D_f$ . Значение композиции вычисляется по формуле

$$(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)), \quad t \in D_{f \circ \varphi}.$$

### 1.9. Параметрическое и неявное отображения.

Если заданы отображения

$$T \xrightarrow{\varphi} X, \quad T \xrightarrow{\psi} Y,$$

то определено отображение  $X \xrightarrow{f = \psi \circ \varphi^{-1}} Y$ . Его называют *заданным параметрически посредством отображений  $\varphi$  и  $\psi$* . При этом переменная  $t$  называется *параметром*.

Рассмотрим отображение  $X \times Y \xrightarrow{F} G$ , а также уравнение  $F(x, y) = c$ , где  $c \in G$  — некоторый элемент. Если существуют такие множества  $P \subset X$ ,  $Q \subset Y$ , что при каждом фиксированном  $x \in P$  уравнение  $F(x, y) = c$  имеет единственное решение  $y \in Q$ , то на множестве  $P$  определена функция  $f$ , для которой  $E_f = Q$ . При этом  $f$  называется *явной функцией, заданной уравнением*  $F(x, y) = c$ .

### 1.10. Изоморфизм.

Пусть множество  $E$  обладает внутренней бинарной операцией  $\top$ , а множество  $F$  — внутренней бинарной операцией  $\perp$ . *Изоморфизмом* множества  $E$  на  $F$  называется такая биекция

$$E \xrightarrow{f} F,$$

что  $\forall (a \in E, b \in E) f(a \top b) = f(a) \perp f(b)$ . При этом множества  $E$  и  $F$  называются *изоморфными* относительно операций  $\top$  и  $\perp$ .

Пусть, например,  $E = \mathbb{N}$ , операция  $\top$  — сложение,  $F = \{2^n\}$ , операция  $\perp$  — умножение. Отображение  $E \xrightarrow{f} F$  — изоморфизм, поскольку  $\forall (n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}) n + m \mapsto 2^{n+m} = 2^n \cdot 2^m$ , т. е.  $f(n + m) = f(n)f(m)$ .

## § 2. Математические структуры

*Математической структурой* называется множество объектов или несколько множеств объектов различной природы, обладающих системой бинарных отношений и бинарных операций, подчиненных определенным аксиомам.

### 2.1. Группа.

*Группой* называется непустое множество  $E$  вместе с правилом, ставящим каждому двум элементам  $a \in E$ ,  $b \in E$  в соответствие некоторый вполне определенный третий элемент  $a \circ b \in E$  так, что выполнены следующие условия:

- 1) операция  $\circ$  ассоциативна:  $\forall (a \in E, b \in E, c \in E) a \circ b \circ c = (a \circ b) \circ c$ ;
- 2) в  $E$  существует *нейтральный* элемент, т. е. такой элемент  $n$ , что  $\forall a \in E a \circ n = a$ ;
- 3)  $\forall a \in E \exists a' \in E: a \circ a' = n$  ( $a'$  называется элементом, *обратным* элементу  $a$ ).

Если, кроме того,

- 4)  $\forall (a \in E, b \in E) a \circ b = b \circ a$ ,

то группа  $E$  называется *абелевой* или *коммутативной*.

Если в группе  $E$  операция  $\circ$  имеет аддитивное (мультипликативное) обозначение “+” (“.”), то группу называют *аддитивной* (мультипликативной), а нейтральный элемент *нулевым* (единичным) и обозначают соответственно 0 (1). Например, множество  $\mathbb{Z}$  вместе с операцией сложения образует коммутативную группу. Множество  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$  вместе с операцией умножения также образует коммутативную группу.

### 2.2. Кольцо.

*Кольцом* называется множество  $R$ , в котором заданы две бинарные алгебраические операции: сложение и умножение, причем по сложению это множество — абелева группа (аддитивная группа кольца  $R$ ), а умножение связано со сложением законами дистрибутивности:

$$\forall (a \in R, b \in R, c \in R) \quad a(b + c) = ab + ac, \quad (b + c)a = ba + ca.$$

Если операция умножения коммутативна, то кольцо называется *коммутативным*. Если  $R \ni 1$ , то кольцо называется *унитарным*.

Например, множество  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел вместе с операциями сложения и умножения образует унитарное кольцо.

### 2.3. Тело.

Если кольцо, лишенное нейтрального элемента относительно операции сложения, образует группу относительно операции умножения, то оно называется *телом*.

## 2.4. Поле.

Тело, в котором операция умножения коммутативна, называется *полем*.

Например, упорядоченные тройки  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  являются соответственно полями рациональных и действительных чисел.

**Определение.** Пусть  $\mathbb{K}$  — тело (поле). Отображение  $|\cdot| : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , где  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ , называется *абсолютным значением (модулем)* в теле (поле)  $\mathbb{K}$ , если  $\forall (\alpha \in \mathbb{K}, \beta \in \mathbb{K})$  выполняются следующие условия (аксиомы):

- 1)  $|\alpha| = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ;
- 2)  $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ ;
- 3)  $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$  (неравенство треугольника).

Тело (поле), в котором определено абсолютное значение, называется *нормированным*.

## 2.5. Векторное пространство над полем $\mathbb{K}$ . Нормированное пространство.

*Векторным (линейным) пространством над полем  $\mathbb{K}$*  называется упорядоченная тройка  $(E, +, \cdot)$ , состоящая из множества  $E$ , элементы которого называются *векторами*, операции сложения и операции умножения на элементы поля  $\mathbb{K}$ .

Указанные операции должны иметь следующие свойства, называемые *аксиомами векторного пространства*:  $\forall (x \in E, y \in E, z \in E, \lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K})$

- 1)  $x + y = y + x$ ;
- 2)  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ;
- 3)  $\exists 0 \in E : x + 0 = x$ ;
- 4)  $\exists (-x) \in E : x + (-x) = 0$ ;
- 5)  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ ;
- 6)  $(\lambda \mu)x = \lambda(\mu x)$ ;
- 7)  $1 \cdot x = x$ .

Имея в виду упрощение записей, вместо тройки  $(E, +, \cdot)$  пользуются векторным пространством  $E$ .

В произвольном векторном пространстве  $E$  выполняются следующие свойства:

- 1)  $\lambda \cdot 0 = 0$ ;
- 2)  $0 \cdot x = 0$ ;
- 3)  $(-1)x = -x$ .

Пусть  $E$  — векторное пространство над нормированным полем  $\mathbb{K}$ . Отображение  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  называется *нормой (длиной)* в пространстве  $E$ , если  $\forall (x \in E, y \in E, \lambda \in \mathbb{K})$  выполняются условия (аксиомы):

- 1)  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ ;
- 2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ;
- 3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника).

Значение нормы на векторе  $x \in E$  называется *нормой этого вектора*.

Упорядоченный набор  $(E, +, \cdot, \|\cdot\|)$  называется *нормированным векторным пространством*. С целью сокращения записи обычно пишут  $E$  вместо набора  $(E, +, \cdot, \|\cdot\|)$ .

Из аксиом 2), 3) следует, что  $\|0\| = 0$ ,  $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$ . Первое свойство получаем из аксиомы 2) при  $\lambda = 0$ , второе — из аксиомы 3) при  $y = -x$ .

Вектор  $x \in E$  называется *пределом последовательности векторов  $(x_n)$*  нормированного пространства  $E$ , если  $\|x_n - x\| = o(1)$ . Запись:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Символом Ландау  $o(1)$  обозначают бесконечно малые числовые последовательности, т. е. такие, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ . Еще один символ

Ландау  $O(1)$  употребляют для обозначения ограниченных числовых последовательностей.

**Теорема** (о непрерывности нормы). Если последовательность  $(x_n)$  векторов нормированного пространства  $E$  сходится к вектору  $x$ , то  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ .

◀ Справедливость утверждения следует из неравенств

$$-\|x_n - x\| \leq \|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\| \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

являющихся следствием из неравенства треугольника. ▶

В нормированном поле  $\mathbb{K}$  модуль также является непрерывной функцией.

В векторном пространстве  $\mathbb{R}^m$  каждое из отображений  $\|\cdot\|: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , где

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2} \quad (\text{евклидова норма}), \quad (1)$$

$$\|x\| = \sum_{i=1}^m |x_i| \quad (\text{октаэдрическая норма}), \quad (2)$$

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \quad (\text{кубическая норма}), \quad (3)$$

удовлетворяет аксиомам нормы.

Последовательность  $(x_n)$  векторов нормированного пространства  $E$  называется *фундаментальной*, если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) (\forall (n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbb{N})) : \|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon.$$

Нормированное пространство  $E$  называется *полным*, если каждая фундаментальная последовательность  $(x_n)$  его векторов имеет предел в  $E$ . Каждое полное нормированное пространство называется *банаховым*.

**Теорема.** Каждая сходящаяся последовательность  $(x_n)$  векторов произвольного нормированного пространства  $E$  фундаментальна.

◀ Пусть  $\varepsilon > 0$  и  $x_n \rightarrow x$ . Выберем такое  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , чтобы  $\forall n \geq n_\varepsilon \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда  $\forall (n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbb{N})$  имеем

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \|x_{n+p} - x\| + \|x - x_n\| < \varepsilon. \blacktriangleright$$

Нормированные пространства  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{R}^m$  являются полными.

## § 3. Метрические пространства

Метрические пространства являются одной из разновидностей топологических пространств. Впервые их выделил в 1906 г. М. Фреше (1878–1973) в связи с изучением функциональных пространств.

Одной из фундаментальных характеристик взаимного расположения точек множества является расстояние между ними. Внедрение метрики (расстояния) позволяет выразить в простой и доступной форме, на языке геометрии, результаты математического анализа. Наиболее важными понятиями в теории метрических пространств являются полнота, компактность и связность.

### 3.1. Аксиомы метрики.

**Предел последовательности точек метрического пространства.**

**Определение 1.** Пусть  $X$  — произвольное множество. Отображение  $X^2 \xrightarrow{\rho} \mathbb{R}$  называется *метрикой*, если  $\forall (x \in X, y \in X, z \in X)$  выполняются следующие условия (аксиомы):

- 1)  $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ ;
- 2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (аксиома симметрии);
- 3)  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$  (неравенство треугольника).

Упорядоченная пара  $(X, \rho)$  называется *метрическим пространством*, а элементы множества  $X$  называются *точками метрического пространства*.

Каждое нормированное векторное пространство  $E$  превращается в метрическое, если в нем  $\forall (x \in E, y \in E)$  метрику определить формулой

$$\rho(x, y) = \|x - y\|. \quad (1)$$

Проверка выполнения аксиом 1)–3) не представляет затруднений.

Из аксиомы 3) по индукции следует, что  $\forall (x_j \in X, j = \overline{1, n}, n \geq 2)$  выполняется неравенство

$$\rho(x_1, x_n) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \dots + \rho(x_{n-1}, x_n). \quad (2)$$

Если  $\rho$  — расстояние в  $X$ , то  $\forall (x \in X, y \in X, z \in X)$  выполняется оценка

$$|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y). \quad (3)$$

Действительно, из аксиом 2) и 3) имеем  $\rho(x, z) \leq \rho(y, z) + \rho(x, y)$  и  $\rho(y, z) \leq \rho(y, x) + \rho(x, z) = \rho(x, y) + \rho(x, z)$ , откуда  $-\rho(x, y) \leq \rho(x, z) - \rho(y, z) \leq \rho(x, y)$ . Из неравенства (3) следует, что  $\forall x \in X, y \in X) \rho(x, y) \geq 0$ .

**Пример 1.** Функция  $\rho(x, y) = |x - y| \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  есть расстояние в множестве  $\mathbb{R}$ , а метрическое пространство  $(\mathbb{R}, \rho)$  называется действительной прямой.

**Пример 2.** Пусть  $(\mathbb{R}^m, +, \cdot, \|\cdot\|)$  — нормированное пространство (см. п.2.5). Отображение  $\mathbb{R}^{2m} \xrightarrow{\rho} \mathbb{R}$ , где  $\rho(x, y) = \|x - y\|, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{2m}$ , удовлетворяет аксиомам метрики.

**Пример 3.** Пусть  $X$  — произвольное множество,  $E$  — множество ограниченных отображений  $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ . Тогда  $\forall (f \in E, g \in E)$  имеем  $(f - g) \in E$  и определено число  $\rho(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ .

Отображение  $(f, g) \mapsto \rho(f, g)$  является расстоянием в множестве  $E$ . Выполнение аксиом 1)–3) очевидно.

**Определение 2.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $x \in X, x_n \in X \forall n \in \mathbb{N}$ . Точка  $x$  называется пределом последовательности  $(x_n)$ , если  $\rho(x_n, x) = o(1)$ . В этом случае пишем  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Последовательность точек метрического пространства, имеющая предел, называется сходящейся.

**Теорема 1.** Сходящаяся последовательность  $(x_n)$  точек метрического пространства  $(X, \rho)$  имеет единственный предел.

◀ Предположим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y_0, x_0 \neq y_0$ . Обозначим  $\varepsilon_0 = \rho(x_0, y_0)$ . По определению предела существуют номера  $n_{\varepsilon_0}^{(1)} \in \mathbb{N}, n_{\varepsilon_0}^{(2)} \in \mathbb{N} \forall n \geq n_{\varepsilon_0}^{(1)} \rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon_0}{2}$  и  $\forall n \geq n_{\varepsilon_0}^{(2)} \rho(x_n, y_0) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ . Тогда  $\forall n \geq n_{\varepsilon_0} = \max\{n_{\varepsilon_0}^{(1)}, n_{\varepsilon_0}^{(2)}\} \rho(x_n, x_0) + \rho(x_n, y_0) < \varepsilon_0$ . По неравенству треугольника  $\rho(x_0, y_0) = \varepsilon_0 \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_n, y_0) < \varepsilon_0$ , если только  $n \geq n_{\varepsilon_0}$ . Получили противоречивое неравенство  $\varepsilon_0 > \varepsilon_0$ , источник которого в предположении, что сходящаяся последовательность имеет два предела. ▶

**Определение 3.** Последовательность  $(x_n)$  точек метрического пространства  $(X, \rho)$  называется фундаментальной, если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) (\forall (n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbb{N})) : \rho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon. \quad (4)$$

**Теорема 2.** Если последовательность  $(x_n)$  точек метрического пространства  $(X, \rho)$  сходится, то она фундаментальная.

◀ Пусть  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, x \in X$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon \rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Следовательно,  $\forall (n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbb{N})$  выполняется неравенство  $\rho(x_{n+p}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$  и из аксиом 2), 3) получаем оценку  $\rho(x_{n+p}, x_n) \leq \rho(x_{n+p}, x) + \rho(x, x_n) = \rho(x_{n+p}, x) + \rho(x_n, x) < \varepsilon$ . ▶

**Определение 4.** Метрическое пространство  $(X, \rho)$  называется полным, если каждая фундаментальная последовательность его точек сходится в нем.

Действительная прямая (см. пример 1) является полным метрическим пространством.

Пусть  $\forall (x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}) \rho(x, y) = |x - y|$ . Метрическое пространство  $(\mathbb{Q}, \rho)$  не является полным, поскольку фундаментальная последовательность рациональных чисел  $x_n = 2 + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{n!}$  сходится к иррациональному числу  $e \notin \mathbb{Q}$ .

### 3.2. Шары, сферы, диаметр множества.

В теории метрических пространств используется язык классической геометрии.

Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $x_0 \in X, \delta > 0$ .

**Определение 1.** Множество  $O_\delta(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x_0, x) < \delta\}$  называется открытым шаром радиуса  $\delta$  с центром в точке  $x_0$ , а также  $\delta$ -окрестностью точки  $x_0$ .

**Определение 2.** Множество  $\bar{O}_\delta(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x_0, x) \leq \delta\}$  называется замкнутым шаром радиуса  $\delta$  с центром в точке  $x_0$ .

**Определение 3.** Множество  $S(x_0, \delta) = \{x \in X \mid \rho(x_0, x) = \delta\}$  называется сферой радиуса  $\delta$  с центром в точке  $x_0$ .

На действительной прямой открытый (соответственно замкнутый) шар радиуса  $\delta$  с центром в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$  есть интервал  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  (соответственно сегмент  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ), а сфера того же радиуса состоит из двух точек  $\{x_0 - \delta, x_0 + \delta\}$ .



**Определение 4.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $A$  и  $B$  — два непустых подмножества множества  $X$ . Неотрицательное число

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y) \quad (1)$$

называется расстоянием от  $A$  до  $B$ .

Если множество  $A$  одноточечное, то вместо  $\rho(A, B)$  записывают  $\rho(x, B)$ . Равенство (1) можно также записать в виде

$$\rho(A, B) = \inf_{z \in A} \rho(z, B) \quad (2)$$

Если  $A \cap B \neq \emptyset$ , то  $\rho(A, B) = 0$ , однако  $\rho(A, B) = 0 \nRightarrow A \cap B \neq \emptyset$ . Пусть например,  $A = \mathbb{N}$ ,  $B = \{x_n \in \mathbb{Q} \mid x_n = n - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$ . Тогда

$$A \cap B = \emptyset, \quad \rho(A, B) = \inf_n \frac{1}{n} = 0.$$

**Определение 5.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $A \subset X$  — непустое множество. Диаметр множества  $A$  называется числом

$$d(A) = \sup_{x \in A, y \in A} \rho(x, y). \quad (3)$$

Из определения следует, что диаметр непустого множества может быть неотрицательным действительным числом или  $+\infty$ . Если  $A \subset B$ , то  $d(A) \leq d(B)$ . Равенство  $d(A) = 0$  выполняется тогда и только тогда, когда  $A$  — одноточечное множество.

Если диаметр множества  $A$  конечный, то оно называется ограниченным.

**Теорема.** Объединение двух ограниченных множеств  $A$  и  $B$  является ограниченным множеством.

◀ Если  $a \in A$ ,  $b \in B$  и  $x, y$  — любые точки множества  $A \cup B$ , то либо  $x \in A \wedge y \in A$  и тогда  $\rho(x, y) \leq d(A)$ , либо  $x \in B$ ,  $y \in B$  и тогда  $\rho(x, y) \leq d(B)$ , либо, например,  $x \in A$ ,  $y \in B$  и тогда вследствие неравенства треугольника получаем неравенство  $\rho(x, y) \leq \rho(x, a) + \rho(a, b) + \rho(b, y)$ , поэтому

$$d(A \cup B) \leq \rho(a, b) + d(A) + d(B). \quad (4)$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ . По свойству точной нижней грани найдется такая пара точек  $a' \in A$ ,  $b' \in B$ , что

$$\rho(A, B) \leq \rho(a', b') < \rho(A, B) + \varepsilon.$$

Поскольку  $a$  и  $b$  — произвольные точки, то, полагая в неравенстве (4)  $a = a'$ ,  $b = b'$ , получим оценку

$$d(A \cup B) < \rho(A, B) + d(A) + d(B) + \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора  $\varepsilon > 0$  имеем

$$d(A \cup B) \leq \rho(A, B) + d(A) + d(B). \blacktriangleright$$

**Следствие.** Если множество  $A$  ограничено, то  $\forall x_0 \in X$  множество  $A$  содержится в замкнутом шаре с центром в точке  $x_0$  и радиусом  $r = \rho(x_0, A) + d(A)$ .

### 3.3. Открытые множества.

**Определение 1.** Открытым множеством в метрическом пространстве  $(X, \rho)$  называется подмножество  $G \subset X$ , имеющее свойство:

$$(\forall x \in G) (\exists \delta > 0) : O_\delta(x) \subset G.$$

Из определения следует, что пустое множество открытое. Все множество  $X$  также открытое.

**Теорема 1.** Каждый открытый шар является открытым множеством.

◀ Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. Если  $x \in O_\delta(x_0) \subset X$ , то  $\rho(x_0, x) < \delta$  и  $\delta_1 = \delta - \rho(x_0, x) > 0$ . Тогда  $\rho(x, y) < \delta_1$ , если  $y \in O_{\delta_1}(x)$ . Оценим расстояние  $\rho(x_0, y)$ . Согласно неравенству треугольника имеем

$$\rho(x_0, y) \leq \rho(x_0, x) + \rho(x, y) < \rho(x_0, x) + \delta_1 = \delta.$$

Таким образом, выполняется включение  $O_{\delta_1}(x) \subset O_\delta(x_0)$ , т.е. точка  $x$  входит в множество  $O_\delta(x_0)$  с некоторой окрестностью. ▶

**Теорема 2.** Объединение любого семейства  $(G_\mu)_{\mu \in A}$  открытых множеств есть открытое множество.

◀ Если  $x \in G_\lambda$  для некоторого  $\lambda \in A$ , то существует такое  $\delta > 0$ , что

$$O_\delta(x) \subset G_\lambda \subset \bigcup_{\mu \in A} G_\mu. \quad \blacktriangleright$$

На действительной прямой любой интервал  $(a, +\infty)$  открыт как объединение открытых множеств  $(a, x)$  для всех  $x > a$ .

**Теорема 3.** Пересечение конечного семейства открытых множеств есть открытое множество.

◀ Достаточно рассмотреть случай двух открытых множеств  $G_1$  и  $G_2$ , а затем провести индукцию.

Если  $x \in G_1 \cap G_2$ , то существуют такие  $\delta_1 > 0$  и  $\delta_2 > 0$ , что  $O_{\delta_1}(x) \subset G_1$ ,  $O_{\delta_2}(x) \subset G_2$  и  $O_\delta(x) \subset G_1 \cap G_2$ , где  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . ▶

Пересечение бесконечного семейства открытых множеств, вообще говоря, не является открытым множеством. Например, пересечение интервалов  $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$  на действительной прямой есть одноточечное множество  $\{0\}$ , которое считается замкнутым.

### 3.4. Внутренность множества.

Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.

**Определение 1.** Открытой окрестностью множества  $A \subset X$  называется любое открытое множество, которое содержит  $A$ . Окрестностью множества  $A$  называется любое множество, содержащее открытую окрестность  $A$ .

В случае, когда  $A = \{x\}$ , ведут речь об окрестности точки  $x$  (а не множества  $\{x\}$ ).

**Определение 2.** Точка  $x \in X$  называется внутренней точкой множества  $A \subset X$ , если  $A$  является ее окрестностью. Множество всех внутренних точек множества  $A$  называется его внутренностью и обозначается символом  $\text{int } A$ <sup>1)</sup>.

Внутренность любого промежутка с началом  $a$  и концом  $b$  ( $a < b$ ) на действительной прямой есть интервал  $(a, b)$ , так как точки  $a$  и  $b$  не могут быть внутренними точками промежутков  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ .

**Теорема 1.** Для любого множества  $A \subset X$  внутренностью  $\text{int } A$  является наибольшее открытое множество, содержащееся в  $A$ .

◀ Если  $x \in \text{int } A$ , то существует открытое множество  $G_x \subset A$ , содержащее точку  $x$ . Для любой точки  $y \in G_x$  множество  $A$  по определению 1 является ее окрестностью, поэтому  $y \in \text{int } A$ . Итак,  $G_x \subset \text{int } A$ ,  $\text{int } A = \bigcup_{x \in \text{int } A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in \text{int } A} G_x \subset \text{int } A$ . По теореме 2, п. 3.3, множество  $\text{int } A$  открытое. Если  $B \subset A$  — открытое множество, то из определения 2 следует, что  $B \subset \text{int } A$ . Таким образом, открытые множества характеризуются условием  $A = \text{int } A$ . ▶

**Следствие.** Если  $A \subset B$ , то  $\text{int } A \subset \text{int } B$ .

**Теорема 2.** Для любой пары множеств  $A$  и  $B$  выполняется равенство

$$\text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B.$$

◀ Включение  $\text{int}(A \cap B) \subset \text{int } A \cap \text{int } B$  получаем из следствия. Согласно теореме 3, п. 3.3, пересечение  $\text{int } A \cap \text{int } B$  является открытым множеством и содержится в пересечении  $A \cap B$ . По теореме 1, выполняется включение  $\text{int } A \cap \text{int } B \subset \text{int}(A \cap B)$ . Из полученных включений следует справедливость утверждения. ▶

Внутренность непустого множества может быть пустым множеством, например, для одноточечного множества  $\{x\}$  на действительной прямой  $\text{int}\{x\} = \emptyset$ .

**Определение 3.** Внутренняя точка множества  $X \setminus A$  называется внешней точкой для  $A$ , а внутренность множества  $X \setminus A$  — множеством внешних точек множества  $A$ .

**Теорема 3.** Для того чтобы точка  $x \in X$  была внешней для  $A$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие  $\rho(x, A) > 0$ .

◀ Необходимость. Если  $x \in X$  — внешняя точка для  $A$ , то существует шар  $O_\delta(x) \subset X \setminus A$  ( $\delta > 0$ ). Для любой точки  $y \in A$  имеем  $\rho(x, y) > \delta$ , следовательно,  $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y) \geq \delta > 0$ .

<sup>1)</sup> От французского слова *interieur* — внутренний.

Достаточность. Пусть  $x \in X$ . Обозначим  $\delta_1 = \rho(x, A)$ . Из условия  $\delta_1 > 0$  следует включение  $O_{\delta_1}(x) \subset X \setminus A$ , вследствие чего  $x$  является внутренней точкой множества  $X \setminus A$ . ►

### 3.5. Замкнутые множества, точки прикосновения, замыкание множества.

Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.

**Определение 1.** Множество  $F \subset X$  называется замкнутым, если его дополнение  $CF$  является открытым множеством.

Пустое множество, а также множество  $X$  замкнуты. Промежутки  $[a, +\infty)$ ,  $(-\infty, a]$  и множество  $\mathbb{Z}$  — замкнутые множества на числовой прямой. Промежутки  $[a, b)$  и  $(a, b]$  не являются ни открытыми, ни замкнутыми множествами.

**Теорема 1.** Замкнутый шар  $\bar{O}_\delta \subset X(x_0)$  и сфера  $S(x_0, \delta) \subset X$  являются замкнутыми множествами.

◀ Если  $x \notin \bar{O}_\delta(x_0)$ , то  $\rho(x, \bar{O}_\delta(x_0)) \geq \rho(x_0, x) - \delta > 0$ , в силу чего открытый шар с центром в точке  $x$  и радиусом  $\delta_1 = \rho(x_0, x) - \delta$  содержится в дополнении шара  $\bar{O}_\delta(x_0)$ . Следовательно, это дополнение — открытое множество. Дополнение сферы  $S(x_0, \delta)$  является объединением открытого шара  $O_\delta(x_0)$  и дополнения шара  $\bar{O}_\delta(x_0)$ . По теореме 2, п. 3.3, это объединение есть открытое множество. ►

**Теорема 2.** Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто. Объединение конечного семейства замкнутых множеств замкнуто.

◀ Если  $\forall \alpha \in A$  множества  $F_\alpha$  замкнуты, то множества  $CF_\alpha$  открыты. Согласно второй формуле в (2), п. 1.4, имеем

$$C \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} CF_\alpha. \quad (1)$$

По теореме 2, п. 3.3, множество  $\bigcup_{\alpha \in A} CF_\alpha$  открыто, в силу чего и множество  $C \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$  является открытым. Тогда по определению множество  $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$  замкнуто.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть  $F_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) — замкнутые множества. Перейдя к дополнениям по первой формуле в (2), п. 1.4, получим

$$C \bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcap_{i=1}^n CF_i \quad (2)$$

Так как множества  $CF_i$  открыты, то, согласно теореме 3, п. 3.3, множество  $\bigcap_{i=1}^n CF_i$  является открытым, а вместе с ним и множество  $C \bigcup_{i=1}^n F_i$ . Следовательно, множество  $\bigcup_{i=1}^n F_i$  замкнуто. ►

В частности, одноточечное множество замкнуто.

**Определение 2.** Точка  $x_0 \in X$  называется точкой прикосновения множества  $A \subset X$ , если любая окрестность  $O_\delta(x_0)$  имеет с  $A$  непустое пересечение. Множество всех точек прикосновения множества  $A$  называется его замыканием и обозначается символом  $\bar{A}$ .

Если  $x \in X$  — не точка прикосновения множества  $A \subset X$ , то  $x$  является внутренней точкой дополнения  $CA$ . Поэтому замыкание множества  $A$  есть дополнение множества его внутренних точек:  $\bar{A} = C \text{int } CA$ . Например, замыкание открытого шара  $O_\delta(x_0)$  содержится в замкнутом шаре  $\bar{O}_\delta(x_0)$ , но может не совпадать с ним.

Поскольку  $\text{int } CA$  есть наибольшее открытое множество, содержащееся в  $CA$ , то  $\bar{A}$  есть наименьшее замкнутое множество, содержащее  $A$ . В частности, если  $A$  замкнуто, то  $A = \bar{A}$ .

**Теорема 3.** Для того чтобы точка  $x_0 \in X$  была точкой прикосновения множества  $A \subset X$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\rho(x_0, A) = 0$ .

◀ Необходимость. Пусть  $x_0 \in X$  — точка прикосновения множества  $A \subset X$ . Тогда  $x_0 \notin \text{int } CA$  и, согласно теореме 3, п. 3.4,  $\rho(x_0, A) = 0$ .

Достаточность. Если  $\rho(x_0, A) = 0$ , то любая окрестность  $O_\delta(x_0)$  имеет с множеством  $A$  непустое пересечение. ►

**Теорема 4.** Если  $x_0 \in X$  — точка прикосновения множества  $A \subset X$  и  $x_0 \notin A$ , то  $\forall \delta > 0$  множество  $O_\delta(x_0) \cap A$  бесконечное.

◀ Допустим, что это не так и для некоторого  $\delta_0 > 0$   $O_{\delta_0}(x_0) \cap A = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ . По предположению  $r_k = \rho(x_0, y_k) > 0$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Выберем  $r > 0$  так, чтобы  $\overline{O}_r(x_0) \subset O_{\delta_0}(x_0)$  и  $r < \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ . Тогда  $\overline{O}_r(x_0) \cap A = \emptyset$  вопреки предположению, что  $x_0$  — точка прикосновения множества  $A$ . ▶

**Определение 3.** Точка  $x_0 \in X$  называется предельной точкой множества  $A \subset X$ , если она является точкой прикосновения множества  $A \setminus \{x_0\}$ .

Из теоремы 4 следует, что любая  $\delta$ -окрестность предельной точки множества  $A \subset X$  содержит бесконечное множество точек из  $A$ .

Пусть  $x_0 \in X$  — предельная точка множества  $A \subset X$ . Рассмотрим последовательность  $(O_{\delta_n}(x_0))$  окрестностей точки  $x_0$ , где  $\delta_n = o(1)$ . Тогда  $\forall n \in \mathbb{N}$  множество  $X_n = O_{\delta_n}(x_0) \cap A$  бесконечное. В множестве  $X_1$  выберем любую точку  $x_1$ . В множестве  $X_2$  выберем точку  $x_2 \neq x_1$  (это возможно, поскольку множества  $X_1$  и  $X_2$  бесконечные). Пусть выбраны различные точки  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_j \in X_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ). В множестве  $X_{n+1}$  выберем точку  $x_{n+1} \neq x_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ). По индукции выбрали последовательность  $(x_n)$  различных точек  $x_n \in A$ . Из условий  $\rho(x_n, x_0) < \delta_n$  и  $\delta_n = o(1)$  следует, что  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Итак, если  $x_0$  — предельная точка множества  $A \subset X$ , то из него можно выделить последовательность различных точек, сходящуюся к  $x_0$ .

Наоборот, если известно, что из множества  $A \subset X$  можно извлечь последовательность различных точек, сходящуюся к точке  $x_0 \in X$ , то  $x_0$  — предельная точка этого множества, так как любая  $\delta$ -окрестность  $O_\delta(x_0)$  содержит бесконечное множество точек из  $A$ .

Можем теперь сформулировать еще одно определение предельной точки множества  $A \subset X$ , эквивалентное определению 3.

**Определение 4.** Точка  $x_0 \in X$  называется предельной точкой множества  $A \subset X$ , если из него можно выделить последовательность различных точек  $(x_n)$ , сходящуюся к  $x_0$  по метрике пространства  $(X, \rho)$ .

Предельная точка множества может принадлежать ему или не принадлежать. Выше было показано, что если множество  $A$  замкнуто, то  $A = \overline{A}$ , т.е. замкнутому множеству принадлежат все его точки прикосновения, а значит и все его предельные точки, которые, очевидно, являются точками прикосновения  $A$ .

**Определение 5.** Точка  $x_0 \in X$  называется граничной точкой множества  $A \subset X$ , если она является точкой прикосновения как  $A$ , так и  $\overline{A}$ . Множество  $\partial A$  всех граничных точек множества  $A$  называется его границей.

Из определения следует, что  $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\overline{A}} = \partial(\overline{A})$ . В силу теоремы 2 множество  $\partial A$  замкнутое и может быть пусто.

**Определение 6.** Точка  $x_0 \in A$  называется изолированной точкой множества  $A \subset X$ , если  $\exists \delta > 0: O_\delta(x_0) \cap A \setminus \{x_0\} = \emptyset$ , т.е.  $x_0$  — точка прикосновения множества  $A$ , не являющаяся его предельной точкой.

**Определение 7.** Пусть  $E$  — непустое подмножество множества  $X$ . Сужение  $\rho|_E$  называется расстоянием, индуцированным в  $E$  расстоянием  $X^2 \xrightarrow{\rho} \mathbb{R}$ . Метрическое пространство  $(E, \rho)$ , определенное этим индуцированным расстоянием, называется подпространством метрического пространства  $(X, \rho)$ .

**Теорема 5.** Пусть  $(E, \rho)$  — подпространство полного метрического пространства  $(X, \rho)$ . Оно является полным метрическим пространством тогда и только тогда, когда  $E$  — замкнутое подмножество множества  $X$ .

◀ Необходимость. Пусть  $(E, \rho)$  — полное метрическое пространство. Предположим, что  $E$  не является замкнутым подмножеством множества  $X$ . Тогда существует последовательность  $(x_n)$  точек множества  $E$ , сходящаяся к некоторой точке  $x \in X \setminus E$ . Поскольку последовательность  $(x_n)$  фундаментальная (метрика в  $(E, \rho)$  заимствована из  $(X, \rho)$ ), то вследствие полноты пространства  $(E, \rho)$  существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x', x' \in E$ . Получили последовательность точек пространства  $(E, \rho)$ , имеющую два различных предела — один в  $E$ , другой — вне  $E$ , что невозможно вследствие единственности предела. Источник противоречия — в предположении, что множество  $E$  не замкнуто.

**Достаточность.** Пусть  $E$  — замкнутое подмножество множества  $X$ . Каждая фундаментальная последовательность  $(y_n)$  точек метрического пространства  $(E, \rho)$  сходится в  $(X, \rho)$  вследствие полноты последнего, и ее предел принадлежит множеству  $E$  в силу предположенной его замкнутости. Поэтому множеству  $E$  принадлежат все его предельные точки, т. е. метрическое пространство  $(E, \rho)$  полное. ►

## § 4. Компактные множества

**Определение 1.** Множество  $K \subset X$  называется компактным в метрическом пространстве  $(X, \rho)$ , если всякая последовательность  $(x_n)$  элементов из  $K$  содержит сходящуюся подпоследовательность. Если их пределы принадлежат множеству  $K$ , то оно называется компактным в себе, или компактом. Если же эти пределы принадлежат множеству  $X$ , не принадлежа, может быть, множеству  $K$ , то  $K$  называется компактным в пространстве  $(X, \rho)$ , или относительно этого пространства.

Очевидно, что множество  $K$  компактно в себе тогда и только тогда, когда оно компактно в пространстве  $(X, \rho)$  и замкнуто.

**Пример 1.** Пусть  $X = [0, 1]$  и  $\forall (x \in X, y \in X) \rho(x, y) = |x - y|$ . Метрическое пространство  $(X, \rho)$  компактно в силу классической теоремы Больцано—Вейерштрасса.

**Пример 2.** Метрическое пространство  $(\mathbb{R}, \rho)$ ,  $\rho(x, y) = |x - y| \forall (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$  некомпактно, поскольку подмножество его точек  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  не содержит никакой сходящейся последовательности. Однако, всякое ограниченное множество  $X \subset \mathbb{R}$  компактно по теореме Больцано—Вейерштрасса.

Для компактных множеств точек метрического пространства  $(X, \rho)$  докажем аналог теоремы о вложенных шарах полного метрического пространства без предположения полноты.

**Теорема 1 (Кантора).** Пусть дана убывающая последовательность

$$K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$$

непустых замкнутых компактных множеств метрического пространства  $(X, \rho)$ . Тогда пересечение

$$K = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \text{ не пусто.}$$

◄ В каждом множестве  $K_j$  выберем произвольно по точке  $x_j$ . Получим последовательность  $(x_j)$ , причем  $\{x_j; j \in \mathbb{N}\} \subset K_1$ . Так как множество  $K_1$  компактно, то из последовательности  $(x_j)$  можно извлечь сходящуюся подпоследовательность  $(x_{j_k})$ . Пусть  $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{j_k}$ . Так как  $\forall n_0 \in \mathbb{N}$  начиная с номера  $j_k > n_0$  все члены этой последовательности принадлежат множеству  $K_{n_0}$  и  $K_{n_0}$  замкнуто, то  $x_0 \in K_{n_0}$ . Но тогда  $x_0 \in \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$ . ►

**Определение 2.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство и  $\varepsilon > 0$ . Множество  $X_1 \subset X$  называется  $\varepsilon$ -сетью множества  $X_2 \subset X$ , если  $\forall x \in X_2$  существует такой элемент  $x_\varepsilon \in X_1$ , что  $\rho(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$ .

В частности, множество  $X_2$  может совпадать с множеством  $X$ .

**Определение 3.** Множество  $E \subset X$  называется вполне ограниченным в метрическом пространстве  $(X, \rho)$ , если  $\forall \varepsilon > 0$  для него имеется в  $X$  конечная  $\varepsilon$ -сеть.

Последнее условие эквивалентно следующему:  $\forall \varepsilon > 0$  существует такое конечное множество  $F \subset X$ , что  $\forall x \in E \rho(x, F) < \varepsilon$ .

Заметим, что из ограниченности множества точек метрического пространства не следует его вполне ограниченность.

**Определение 4.** Пусть  $M$  — произвольное множество. Покрытием множества  $E \subset M$  называется такое семейство  $(B_\lambda)_{\lambda \in A}$  подмножеств множества  $M$ , что  $E \subset \bigcup_{\lambda \in A} B_\lambda$ .

Связь между компактностью и вполне ограниченностью множества точек метрического пространства устанавливает следующая теорема.

**Теорема 2** (Хаусдорфа). *Всякое компактное множество  $K \subset X$  вполне ограничено в метрическом пространстве  $(X, \rho)$ .*

◀ Предположим, что  $K$  компактно, однако для некоторого  $\varepsilon_0 > 0$  не имеет конечной  $\varepsilon_0$ -сети. Возьмем произвольное  $x_1 \in K$ . По предположению множество  $\{x_1\}$  не образует  $\varepsilon_0$ -сети для множества  $K$ , т. е.  $\rho(x_1, K) \geq \varepsilon_0$ . Выберем любую точку  $x_2 \in K$ , удовлетворяющую условию  $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$ . Поскольку множество  $\{x_1, x_2\}$  не является  $\varepsilon_0$ -сетью для множества  $K$ , то найдется такая точка  $x_3 \in K$ , что  $\rho(x_i, x_3) \geq \varepsilon_0 (i = 1, 2)$ . Пусть выбраны точки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  удовлетворяющие условию  $\rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon_0 (i \neq j \wedge i, j \leq n)$ . Найдем такое  $x_{n+1} \in K$ , что  $\rho(x_i, x_{n+1}) \geq \varepsilon_0 (i = \overline{1, n})$ . Индукцией по  $n \in \mathbb{N}$  построена последовательность  $(x_n)$  точек множества  $K$ , члены которой удовлетворяют условию  $\rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon_0 (i \neq j)$ . Из последовательности  $(x_n)$  нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность, что противоречит предположению о компактности множества  $K$ . Источник противоречия — в предположении, что  $K$  не является вполне ограниченным. ▶

**Теорема 3** (Фреше). *Если метрическое пространство  $(X, \rho)$  полное, то каждое вполне ограниченное в нем множество  $E \subset X$  компактно.*

◀ Если  $E \subset X$  вполне ограничено, то  $\forall \varepsilon > 0$  в множестве  $X$  существует конечная  $\varepsilon$ -сеть для множества  $E$ . Пусть  $(x_n)$  — произвольная последовательность элементов из  $E$ . Поскольку существует конечное покрытие множества  $E$  открытыми шарами с радиусами, меньшими  $\varepsilon$ , то по крайней мере один такой шар содержит подпоследовательность  $(x_{n_k})$ . Таким образом,  $\forall \varepsilon > 0$  из любой последовательности элементов множества  $E$  можно выделить подпоследовательность, расстояние между элементами которой меньше  $\varepsilon$ .

Пусть  $\forall n \in \mathbb{N} \varepsilon_n = \frac{1}{n}$ . Выберем из последовательности  $(x_n)$  подпоследовательность  $(x_n^{(1)})$  с расстояниями между элементами меньше 1. Из этой подпоследовательности выделим новую  $(x_n^{(2)})$  с расстояниями, меньше  $\frac{1}{2}$ . Пусть выбраны подпоследовательности  $(x_n^{(j)}) j = \overline{1, k}$ . Выделим из  $(x_n^{(k)})$  подпоследовательность  $(x_n^{(k+1)})$  с расстояниями, меньшими  $\frac{1}{k+1}$ . Получили последовательность подпоследовательностей  $(x_n^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ . Образует новую последовательность  $(x_n^{(n)})$ , составленную из диагональных членов указанных подпоследовательностей. Члены этой последовательности, начиная с номера  $k \in \mathbb{N}$ , принадлежат  $k$ -й подпоследовательности, в силу чего  $\forall (n > k, m > k) \rho(x_n^{(n)}, x_m^{(m)}) < \frac{1}{k}$ . Следовательно, последовательность  $(x_n^{(n)})$  фундаментальная. Пусть полное пространство  $(X, \rho)$  полное, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(n)} = x, x \in X$ . По определению множество  $E$  компактно в пространстве  $(X, \rho)$ . ▶

Из теорем 2 и 3 получаем следующее утверждение.

**Теорема 4.** *Для того чтобы множество  $E \subset X$  было компактным в пространстве  $(X, \rho)$ , необходимо, а если  $(X, \rho)$  — полное пространство, то и достаточно, чтобы  $E$  было вполне ограниченным в нем.*

**Теорема 5.** *Компактное подмножество  $K \subset X$  полного метрического пространства  $(X, \rho)$  является компактом тогда и только тогда, когда оно замкнуто в  $(X, \rho)$ .*

◀ Необходимость. Пусть  $K \subset X$  — компакт, т. е. компактное множество. Согласно теореме 5, п. 3.5, пространство  $(K, \rho)$  является полным, в силу чего множество  $K$  замкнутое.

Достаточность. Если множество  $K \subset X$  замкнуто в  $(X, \rho)$ , то согласно теореме 5, п. 3.5, пространство  $(K, \rho)$  полное, т. е.  $K$  — компакт. ▶

Следующее утверждение позволяет дать новое определение компактного в себе множества, эквивалентное определению 1.

**Теорема 6.** *Пусть  $F \subset X$  — замкнутое множество в метрическом пространстве  $(X, \rho)$ . Для того чтобы  $F$  было компактным в себе, необходимо и достаточно, чтобы из любого покрытия этого множества можно было выделить конечное покрытие.*

◀ Необходимость. Пусть  $F \subset X$  — компакт,  $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$  — семейство открытых множеств, покрывающих  $F$ ,  $(\varepsilon_n)$  — бесконечно малая последовательность положительных чисел,  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_k^{(1)}$  — конечная  $\varepsilon_1$ -сеть для множества  $F$ . Тогда  $F = \bigcup_{i=1}^k F_i$ , где  $F_i = \overline{\varepsilon_1}(x_i^{(1)}) \cap F$ . Множества  $F_i$  — компактные в себе, причем  $d(F_i) \leq 2\varepsilon_1$ , где  $d(F_i)$  — диаметр множества  $F_i$ . Предположим, что не существует конечного покрытия множества  $F$ . Тогда этим свойством обла-



даст хотя бы одно из множеств  $F_i$ , которое обозначим через  $F_{i_1}$ . Рассуждая аналогично, выделим из  $F_{i_1}$  компактную в себе часть  $F_{i_1 i_2}$  диаметром  $d(F_{i_1 i_2}) \leq 2\varepsilon_2$ , которую нельзя покрыть никаким конечным семейством, выделенным из семейства  $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ . Продолжая этот процесс выделения компактных в себе частей, получим последовательность вложенных друг в друга замкнутых множеств

$$F_{i_1} \supset F_{i_1 i_2} \supset \dots \supset F_{i_1 i_2 \dots i_n} \supset \dots$$

диаметры которых стремятся к нулю (поскольку  $d(F_{i_1 i_2 \dots i_n}) \leq 2\varepsilon_n$  и  $\varepsilon_n = o(1)$ ). По теореме 1 существует точка  $x_0 \in F$ , принадлежащая всем этим множествам. Поскольку семейство  $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$  покрывает множество  $F$ , то существует такое множество  $G_{\alpha_0}$  из этого семейства, что  $x_0 \in G_{\alpha_0}$ . Так как  $G_{\alpha_0}$  — открытое множество, то существует  $\varepsilon$ -окрестность  $O_\varepsilon(x_0) \subset G_{\alpha_0}$ . Выберем  $n \in \mathbb{N}$  из условия  $d(F_{i_1 i_2 \dots i_n}) < \varepsilon$ . Тогда справедливо включение  $F_{i_1 i_2 \dots i_n} \subset O_\varepsilon(x_0)$ , противоречащее предположению о том, что никакое конечное семейство из  $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$  не покрывает множество  $F_{i_1 i_2 \dots i_n}$ . Источник противоречия — в первоначальном предположении, что не существует конечного покрытия множества  $F$ .

**Достаточность.** Предположим, что из всякого покрытия  $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$  множества  $F$  можно выделить конечное покрытие. Пусть  $M \subset F$  — подмножество, не имеющее предельных точек. Тогда  $\forall x \in F$  существует окрестность  $O_{\varepsilon_x}(x)$ , не содержащая точек множества  $M$ , кроме, быть может, точки  $x$ . Эти окрестности покрывают множество  $F$ . Выделим из семейства  $(O_{\varepsilon_x}^{(x)})_{x \in F}$  конечное покрытие  $(O_{\varepsilon_j}(x_j))_{j=1, \dots, n}$ . Так как  $M \subset \bigcup_{j=1}^n O_{\varepsilon_j}(x_j)$  и в каждой окрестности  $O_{\varepsilon_j}(x_j)$  может содержаться не более одной точки из  $M$ , то множество  $M$  конечно. Следовательно, всякое бесконечное подмножество  $M \subset F$  должно иметь предельные точки, т. е.  $F$  — компактное в себе множество. ►

**Определение 5.** Множество  $K \subset X$  точек метрического пространства  $(X, \rho)$  называется компактным, если из любого покрытия  $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$  множества  $K$  можно выделить конечное его покрытие.

## § 5. Связные пространства и связанные множества

**Определение 1.** Метрическое пространство  $(X, \rho)$  называется связным, если не существует двух таких открытых непустых подмножеств  $A \subset X$  и  $B \subset X$ , что  $A \cup B = X$  и  $A \cap B = \emptyset$ .

Эквивалентная формулировка: метрическое пространство  $(X, \rho)$  связно, если из всех подмножеств множества  $X$  только пустое множество и само  $X$  одновременно открыты и замкнуты.

**Определение 2.** Множество  $E \subset X$  в метрическом пространстве  $(X, \rho)$  связно, если связно подпространство  $(E, \rho)$ .

**Определение 3.** Открытое связное множество называется областью.

**Определение 4.** Область вместе со своей границей называется замкнутой областью.

Действительная прямая является связным пространством. Для того чтобы множество  $A \subset \mathbb{R}$  было связно, необходимо и достаточно, чтобы  $A$  было промежутком (ограниченным или нет).

## § 6. Предел и непрерывность отображения из одного метрического пространства в другое

### 6.1. Предел и непрерывность отображения.

Пусть  $(X, \rho_X)$  и  $(Y, \rho_Y)$  — метрические пространства,  $f: X \rightarrow Y$ ,  $x_0 \in X$  — предельная точка множества  $D_f$ .

**Определение 1.** Точка  $\alpha \in Y$  называется *частичным пределом* отображения  $f$  в точке  $x_0$ , если существует такая последовательность  $(x_n)$  точек множества  $D_f$ , что

$$(x_n \rightarrow x_0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \neq x_0) \wedge \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha \right). \quad (1)$$

Условия (1) можно записать в виде:

$$(\rho_X(x_0, x_n) = o(1)) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} \ \rho_X(x_0, x_n) > 0) \wedge (\rho_Y(\alpha, f(x_n)) = o(1)).$$

Множество всех частичных пределов отображения  $f$  в точке  $x_0$  обозначим символом  $E_f(x_0)$ .

**Определение 2.** Если множество  $E_f(x_0)$  состоит из одной точки  $\alpha$ , то она называется *пределом* отображения  $f$  в точке  $x_0$  и обозначается символом  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

Смысл определения 2 состоит в том, что для любой последовательности  $(x_n)$  точек множества  $D_f$ , члены которой отличны от  $x_0$ , сходящейся к  $x_0$ , последовательность  $(f(x_n))$  сходится к  $\alpha$ .

Предел отображения в точке на языке последовательностей принято называть *пределом в смысле Гейне* (1821–1881).

**Определение 3** (Гейне). Отображение  $f$  называется *непрерывным* в точке  $x_0 \in D_f$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  всякий раз, как только  $x_n \rightarrow x_0$  и  $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in D_f$ .

Если отображение  $f$  непрерывно  $\forall x \in D_f$ , то будем его называть *непрерывным*.

Если  $x_0 \in D_f$  и является предельной точкой множества  $D_f$ , то отображение  $f$  непрерывно в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . В изолированной точке каждое отображение непрерывно.

Отображение, не являющееся непрерывным в точке  $x_0 \in D_f$ , называется *разрывным* в ней.

Пусть  $x_0$  — предельная точка множества  $D_f$  и  $x_0 \in D_f$ . Она называется *точкой устранимого разрыва* для отображения  $f$ , если существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in Y$ . В этом случае отображение  $f^*$ , определенное формулой

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in D_f \setminus \{x_0\}, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \text{при } x = x_0, \end{cases}$$

является непрерывным в точке  $x_0$ .

**Теорема** (о непрерывном образе компакта). Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение и  $D_f$  — компакт. Тогда множество  $E_f$  компактно в себе, т. е. непрерывный образ компакта есть компакт.

◀ Рассмотрим произвольную последовательность точек  $(y_n)$  из множества  $E_f = f(D_f)$ . Тогда существует такая последовательность  $(x_n)$ , что  $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in D_f \wedge y_n = f(x_n)$ . Согласно определению компакта, существуют  $x_0 \in D_f$  и подпоследовательность  $(x_{n_k})$  такие, что  $x_{n_k} \rightarrow x_0$  при  $k \rightarrow \infty$ . По определению непрерывного отображения имеем  $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0) = y_0 \in E_f$ , что означает компактность в себе множества  $E_f$ . ▶

## 6.2. Непрерывность композиции отображений.

Пусть  $(X, \rho_X)$ ,  $(Y, \rho_Y)$ ,  $(Z, \rho_Z)$  — метрические пространства,  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ ,  $E_f \subset D_g$ .

**Теорема 1** (о непрерывности композиции отображений). Пусть отображение  $f$  непрерывно в точке  $x_0 \in D_f$ , а отображение  $g$  непрерывно в точке  $f(x_0) \in D_g$ . Тогда композиция  $g \circ f$  непрерывна в точке  $x_0$ .

◀ Пусть  $x_n \rightarrow x_0$  и  $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in D_{g \circ f}$ . Тогда  $y_n = f(x_n) \rightarrow f(x_0) \wedge y_n \in D_g$ . Поэтому  $g(y_n) \rightarrow g(f(x_0))$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $(g \circ f)(x_n) = g(y_n) \rightarrow g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$ . ▶

**Теорема 2.** Пусть  $x_0$  — предельная точка множества  $D_{g \circ f}$ . Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$  и отображение  $g: Y \rightarrow Z$  непрерывно в точке  $y_0$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$ .

◀ Полагаем

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in D_f \setminus \{x_0\} \\ y_0 & \text{при } x = x_0. \end{cases}$$

Отображение  $f^*$  непрерывно в точке  $x_0$ . По теореме 1 композиция  $g \circ f^*$  непрерывна в этой точке. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f^*)(x) = (g \circ f^*)(x_0) = g(y_0). \blacktriangleright$$

### 6.3. Непрерывность обратного отображения.

**Теорема** (о непрерывности обратного отображения). Пусть  $(X, \rho_X)$ ,  $(Y, \rho_Y)$  — метрические пространства,  $f: X \rightarrow Y$  и  $D_f$  — компакт. Если отображение  $f$  непрерывно и обратимо, то  $f^{-1}$  непрерывное.

◀ Пусть  $(y_n)$  — последовательность точек множества  $E_f$ , сходящаяся к  $y_0 \in E_f$ , и  $\alpha$  — частичный предел последовательности  $(f^{-1}(y_n))$ . Поскольку  $D_f$  — компакт, то  $\alpha \in D_f$ . Из непрерывности отображения  $f$  следует, что  $f(\alpha)$  является частичным пределом последовательности  $(y_n)$ , в силу чего  $f(\alpha) = y_0$  и  $\alpha = f^{-1}(y_0)$ . Таким образом, все частичные пределы последовательности  $(f^{-1}(y_n))$  равны  $f^{-1}(y_0)$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0)$ , что означает непрерывность отображения  $f^{-1}$  в точке  $y_0$ . Так как  $y_0$  — произвольная точка множества  $E_f$ , то  $f^{-1}$  — непрерывное отображение. ▶

### 6.4. Предел и непрерывность отображения в смысле Коши.

#### Некоторые свойства непрерывных отображений.

Пусть  $(X, \rho_X)$ ,  $(Y, \rho_Y)$  — метрические пространства,  $f: X \rightarrow Y$ .

**Определение 1.** Пусть  $x_0$  — предельная точка множества  $D_f$  и  $\alpha \in Y$ . Точка  $\alpha$  называется пределом отображения  $f$  в точке  $x_0$  в смысле Коши, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f, 0 < \rho_X(x_0, x) < \delta) : \rho_Y(\alpha, f(x)) < \varepsilon. \quad (1)$$

**Теорема 1.** Определения предела отображения в точке по Гейне и по Коши эквивалентны.

◀ Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$  в смысле Коши,  $x_n \rightarrow x_0$  и  $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \neq x_0$ . Тогда для указанного в условиях (1)  $\delta > 0$  существует  $n_\delta \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\delta \ 0 < \rho_X(x_0, x_n) < \delta$ . Согласно определению 1,  $\forall n \geq n_\delta \ \rho_Y(\alpha, f(x_n)) < \varepsilon$ , т.е.  $f(x_n) \rightarrow \alpha$ . Получили, что точка  $\alpha$  является пределом отображения  $f$  в точке  $x_0$  в смысле Гейне.

Предположим, что  $\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  в смысле Гейне, и покажем, что  $\alpha$  является пределом отображения  $f$  в точке  $x_0$  в смысле Коши.

Допустим, что это не так, т.е. для некоторого  $\varepsilon_0 > 0$  нельзя указать соответствующего  $\delta > 0$  в условиях (1):  $\forall \delta > 0 \ \exists x \in D_f$  такое, что  $0 < \rho_X(x_0, x) < \delta$ , однако  $\rho_Y(\alpha, f(x)) \geq \varepsilon_0$ . Пусть  $(\delta_n)$  — бесконечно малая последовательность положительных чисел. По предположению

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in D_f)(\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \neq x_0 \wedge 0 < \rho_X(x_0, x_n) < \delta_n) : \rho_Y(\alpha, f(x_n)) \geq \varepsilon_0.$$

Поскольку  $\delta_n = o(1)$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , откуда должно следовать предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_Y(\alpha, f(x_n)) = 0,$$

противоречащее тому, что  $\forall n \in \mathbb{N} \ \rho_Y(\alpha, f(x_n)) \geq \varepsilon_0$ . Источник противоречия — в предположении, что  $\alpha$  не является пределом отображения  $f$  в точке  $x_0$  в смысле Коши. ▶

**Определение 2.** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется непрерывным в точке  $x_0 \in D_f$  в смысле Коши, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f, \rho_X(x_0, x) < \delta) : \rho_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon. \quad (2)$$

Очевидно, что определения Гейне и Коши непрерывности отображения в точке равносильны.

Понятие непрерывности отображения в точке носит локальный характер. На это указывают следующие утверждения.

**Теорема 2** (о непрерывности сужения отображения). Пусть отображение  $f: X \rightarrow Y$  непрерывно в точке  $x_0 \in D_f$ ,  $A \subset D_f$  и  $x_0 \in A$ . Тогда сужение  $f|_A$  — непрерывное в точке  $x_0$  отображение.

◀ Пусть  $x_n \rightarrow x_0$  и  $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in A$ . Тогда  $f|_A(x_n) = f(x_n) \rightarrow f(x_0) = f|_A(x_0)$ . ▶

Напомним, что множество  $V \subset X$  называется окрестностью точки  $x_0 \in X$  (см. п. 3.4), если существует такое открытое множество  $G \subset X$ , что  $x_0 \in G \subset V$ . Если  $x_0 \in A \subset X$ , то пересечение  $A \cap V$  называется окрестностью точки  $x_0$  в  $A$ .

**Теорема 3.** Пусть существует такая окрестность  $W$  точки  $x_0$  в  $D_f$ , что отображение  $f|_W$  непрерывно в точке  $x_0$ . Тогда отображение  $f: X \rightarrow Y$  непрерывно в точке  $x_0$ .

◀ Пусть  $x_n \rightarrow x_0$  и  $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in D_f$ . Существует такой номер  $n_0 \in \mathbb{N}$ , что  $\forall n \geq n_0 \ x_n \in W$ . Поскольку

$$f(x_{n_0+n}) = f|_W(x_{n_0+n}) \rightarrow f|_W(x_0) = f(x_0),$$

то  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  при  $n \rightarrow \infty$ . По определению отображение  $f$  непрерывно в точке  $x_0$ . ▶

Смысл теорем 2 и 3 состоит в том, что свойство непрерывности отображения в точке зависит только от тех значений, которые оно принимает в некоторой ее окрестности.

Сформулируем понятие непрерывного отображения на языке окрестностей.

**Определение 3.** Пусть  $(X, \rho_X)$  и  $(Y, \rho_Y)$  — метрические пространства. Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется непрерывным в точке  $x_0 \in D_f$ , если для каждой окрестности  $V'$  точки  $f(x_0)$  в множестве  $E_f$  существует такая окрестность  $V$  точки  $x_0$  в множестве  $D_f$ , что  $f(V) \subset V'$ . Отображение  $f$  называется непрерывным, если оно непрерывно  $\forall x \in D_f$ .

Поскольку множества  $O_\varepsilon(f(x_0)) \subset E_f$ ,  $O_\delta(x_0) \subset D_f$  являются окрестностями точек  $f(x_0)$  и  $x_0$ , то понятие непрерывности отображения  $f$  в точке  $x_0$  можно сформулировать на языке  $\varepsilon$ -и  $\delta$ -окрестностей: отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется непрерывным в точке  $x_0 \in D_f$ , если для каждой окрестности  $O_\varepsilon(f(x_0)) \subset E_f$  существует такая окрестность  $O_\delta(x_0) \subset D_f$ , что  $f(O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(f(x_0))$ .

**Теорема 4.** Для того чтобы отображение  $f: X \rightarrow Y$  было непрерывным в точке  $x_0 \in D_f$ , необходимо и достаточно, чтобы прообраз  $f^{-1}(V')$  каждой окрестности точки  $f(x_0)$  в  $E_f$  был окрестностью точки  $x_0$  в  $D_f$ .

◀ Необходимость. Если отображение  $f$  непрерывно в точке  $x_0 \in D_f$ , то из определения 3 следует, что  $x_0 \in V \subset f^{-1}(V')$ , следовательно, прообраз  $f^{-1}(V')$  является окрестностью точки  $x_0$  в  $D_f$ .

Достаточность. Если  $W = f^{-1}(V')$  — окрестность точки  $x_0$  в  $D_f$ , то существует такое открытое множество  $G$ , что  $x_0 \in G \subset W$ , в силу чего  $V' \supset f(G)$ . ▶

Следующие две теоремы носят вспомогательный характер.

**Теорема 5.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  и  $x_0 \in D_f$  — точка прикосновения множества  $A \subset D_f$ . Если отображение  $f$  непрерывно в точке  $x_0$ , то  $f(x_0)$  — точка прикосновения множества  $f(A)$ .

◀ Если  $V'$  — окрестность точки  $f(x_0)$  в  $E_f$ , то по теореме 4  $f^{-1}(V')$  — окрестность точки  $x_0$  в  $D_f$ . Так как  $x_0$  — точка прикосновения множества  $A$ , то  $A \cap f^{-1}(V') \neq \emptyset$ . Следовательно, существует точка  $x \in A \cap f^{-1}(V')$ , в силу чего  $f(x) \in f(A) \cap V'$ , т.е. множество  $f(A) \cap V'$  непусто. Поскольку  $V'$  — окрестность точки  $f(x_0)$ , то последняя является точкой прикосновения множества  $f(A)$ . ▶

**Теорема 6.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A' \subset E_f$ ,  $B' \subset E_f$  и  $A' \supset B'$ . Тогда

$$f^{-1}(A' \setminus B') = f^{-1}(A') \setminus f^{-1}(B').$$

◀ Пусть  $x \in f^{-1}(A' \setminus B')$ . Тогда

$$\begin{aligned} f(x) \in A' \setminus B' &\Rightarrow f(x) \in A' \wedge f(x) \notin B' \Rightarrow x \in f^{-1}(A') \wedge x \notin f^{-1}(B') \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(A') \setminus f^{-1}(B') \Rightarrow f^{-1}(A' \setminus B') \subset f^{-1}(A') \setminus f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

Если  $y \in f^{-1}(A') \setminus f^{-1}(B')$ , то

$$y \in f^{-1}(A') \wedge y \notin f^{-1}(B') \Rightarrow f(y) \in A' \wedge f(y) \notin B' \Rightarrow f(y) \in A' \setminus B' \Rightarrow \\ \Rightarrow y \in f^{-1}(A' \setminus B') \Rightarrow f^{-1}(A') \setminus f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A' \setminus B').$$

Из полученных в конце цепочек импликаций включений следует доказываемое равенство. ►

Следующее утверждение носит глобальный характер.

**Теорема 7.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$ . Следующие свойства эквивалентны:

- 1)  $f$  — непрерывное отображение;
- 2) прообраз  $f^{-1}(G)$  каждого множества, открытого в  $E_f$ , открыт в  $D_f$ ;
- 3) прообраз  $f^{-1}(F)$  каждого множества  $F$ , замкнутого в  $E_f$ , замкнут в  $D_f$ ;
- 4) для каждого множества  $A \subset D_f$  справедливо включение  $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ .

◀ Докажем, что выполняется цепочка импликаций 1)  $\Rightarrow$  4)  $\Rightarrow$  3)  $\Rightarrow$  2)  $\Rightarrow$  1). Пусть отображение  $f$  непрерывно и  $A \subset D_f$  — произвольное множество,  $\bar{A}$  — его замыкание, состоящее по определению из всех точек прикосновения множества  $A$ . Если  $x \in D_f$  — точка прикосновения множества  $A$ , то по теореме 5  $f(x)$  — точка прикосновения множества  $f(A)$ . Поэтому  $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$  и 1)  $\Rightarrow$  4).

Если выполнено условие 4) и  $F \subset E_f$  — замкнутое множество в  $E_f$ ,  $A = f^{-1}(F)$ , то  $f(A) \subset \overline{F} = F$ . Следовательно,  $\bar{A} \subset f^{-1}(F) = A$  и так как  $A \subset \bar{A}$ , то  $A$  замкнуто. Таким образом, 4)  $\Rightarrow$  3).

Пусть выполнено условие 3). Согласно теореме 6 имеем

$$f^{-1}(\text{int } F) = f^{-1}(F \setminus \partial F) = f^{-1}(F) \setminus f^{-1}(\partial F) = \text{int } f^{-1}(F).$$

Следовательно, 3)  $\Rightarrow$  2). Осталось установить, что 2)  $\Rightarrow$  1). Пусть выполнено условие 2). Если  $V'$  — окрестность точки  $f(x)$  в  $E_f$ , то существует открытая окрестность  $W' \subset V'$  этой же точки. Прообраз  $f^{-1}(W')$  является открытым множеством в  $D_f$ , содержащим точку  $x$  и содержащимся в  $f^{-1}(V')$ . По теореме 4 отображение  $f$  непрерывно в точке  $x \in D_f$ . Поскольку  $x$  — произвольная точка, то  $f$  — непрерывное отображение и 2)  $\Rightarrow$  1). ►

Заметим, что образ открытого (соответственно замкнутого) множества при непрерывном отображении, вообще говоря, не будет открытым (соответственно замкнутым). Например, отображение  $x \mapsto x^4$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , непрерывное в  $\mathbb{R}$ , однако образ  $[0, 1]$  открытого множества  $(-1, 1)$  не является открытым.

## 6.5. Равномерно непрерывные отображения.

Пусть  $(X, \rho_X)$ ,  $(Y, \rho_Y)$  — метрические пространства,  $f: X \rightarrow Y$ .

**Определение.** Отображение  $f$  называется равномерно непрерывным на множестве  $D_f$ , если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall (x_1 \in D_f, x_2 \in D_f), \rho_X(x_1, x_2) < \delta) : \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon. \quad (1)$$

Очевидно, что равномерно непрерывное отображение непрерывное. Обратное утверждение, вообще говоря, несправедливо. Например, непрерывная функция  $x \mapsto x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , не является равномерно непрерывной, так как для данного  $h > 0$  разность  $(x+h)^2 - x^2 = h(2x+h)$  может принимать сколь угодно большие значения.

**Теорема 1.** Пусть  $(X, \rho_X)$ ,  $(Y, \rho_Y)$ ,  $(Z, \rho_Z)$  — метрические пространства,  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ . Если  $f$  и  $g$  — равномерно непрерывные отображения на множествах  $D_f$  и  $D_g$ , то композиция  $h = g \circ f: X \rightarrow Z$  равномерно непрерывна на множестве  $D_{g \circ f}$ .

◀ Согласно определению равномерно непрерывного отображения

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \eta > 0) (\forall (y_1 \in D_g, y_2 \in D_g), \rho_Y(y_1, y_2) < \eta) : \rho_Z(g(y_1), g(y_2)) < \varepsilon. \quad (2)$$

Поскольку отображение  $f$  равномерно непрерывное, то для указанного  $\eta > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что

$$\forall (x_1 \in D_f, x_2 \in D_f) (\rho_X(x_1, x_2) < \delta) \Rightarrow \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \eta. \quad (3)$$

Из (2) и (3) получаем, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ :

$$\forall (x_1 \in D_{g \circ f}, x_2 \in D_{g \circ f}) (\rho_X(x_1, x_2) < \delta) \Rightarrow \rho_Z(h(x_1), h(x_2)) < \varepsilon,$$

т.е. отображение  $h = g \circ f$  равномерно непрерывное. ►

**Теорема 2** (Кантор). *Всякое непрерывное на компакте отображение  $f: X \rightarrow Y$  равномерно непрерывное.*

► Пусть  $D_f$  — компакт,  $f$  — непрерывное отображение. Предположим, что  $f$  не является равномерно непрерывным. Тогда существует такое  $\varepsilon_0 > 0$  и две последовательности  $(x_n), (y_n)$  точек множества  $D_f$ , что  $\rho_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ , однако  $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$ . Найдется подпоследовательность  $(x_{n_k})$ , сходящаяся к некоторой точке  $x_0 \in D_f$  (поскольку  $D_f$  — компакт). Так как  $\rho_X(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$  и  $\rho_X(x_0, y_{n_k}) \leq \rho_X(x_0, x_{n_k}) + \rho_X(x_{n_k}, y_{n_k})$ , то  $y_n \rightarrow x_0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Из непрерывности отображения  $f$  в точке  $x_0 \in D_f$  следует, что для указанного  $\varepsilon_0$  существует  $\delta > 0$ :  $\rho_X(x_0, x) < \delta \Rightarrow \rho_Y(f(x_0), f(x)) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ . Возьмем номер  $k \in \mathbb{N}$ , при котором  $\rho_X(x_0, x_{n_k}) < \delta$  и  $\rho_X(x_0, y_{n_k}) < \delta$ . Тогда  $\rho_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq \rho_Y(f(x_{n_k}), f(x_0)) + \rho_Y(f(x_0), f(y_{n_k})) < \varepsilon_0$ , что противоречит определению последовательностей  $(x_n)$  и  $(y_n)$ . ►

## 6.6. Гомеоморфизмы. Эквивалентные расстояния.

Пусть  $(X, \rho_X)$  и  $(Y, \rho_Y)$  — метрические пространства.

**Определение 1.** *Биективное отображение  $X \xrightarrow{f} Y$  называется гомеоморфизмом, если  $f$  и  $f^{-1}$  непрерывны.*

Такие отображения называются *взаимно непрерывными*. В этом случае обратное отображение  $f^{-1}$  является гомеоморфизмом  $Y$  на  $X$ .

**Теорема 1.** *Пусть  $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y), (Z, \rho_Z)$  — метрические пространства,  $X \xrightarrow{f} Y, Y \xrightarrow{g} Z$  — гомеоморфизмы. Тогда композиция  $h = g \circ f$  является гомеоморфизмом  $X$  на  $Z$ .*

► По теореме 1, п. 6.2, биективное отображение  $X \xrightarrow{h} Z$  непрерывное. Пусть  $x_0 \in X$ . Согласно теореме 4, п. 6.4, прообраз  $h^{-1}(V'')$  каждой окрестности  $V''$  точки  $h(x_0) = (g \circ f)(x_0)$  в множестве  $Z$  является окрестностью точки  $x_0$  в  $X$ . В силу этого и биекция  $Z \xrightarrow{h^{-1}} X$  непрерывна в точке  $h(x_0)$ . Поскольку  $x_0$  — произвольная точка, то  $h^{-1}$  — непрерывное отображение. ►

Гомеоморфизм может не быть равномерно непрерывным, например,  $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ , где  $f(x) = x^3$ .

**Определение 2.** *Метрические пространства  $(X, \rho_X)$  и  $(Y, \rho_Y)$  называются гомеоморфными, если существует гомеоморфизм  $X \xrightarrow{f} Y$ .*

**Теорема 2.** *Два метрических пространства, гомеоморфные третьему, гомеоморфны друг другу.*

► Если пространства  $(X, \rho_X)$  и  $(Y, \rho_Y)$  гомеоморфны пространству  $(Z, \rho_Z)$ , то существуют гомеоморфные отображения  $X \xrightarrow{f} Z$  и  $Y \xrightarrow{g} Z$ . Отображение  $Z \xrightarrow{g^{-1}} Y$  гомеоморфное. По теореме 1 композиция  $g^{-1} \circ f$  является гомеоморфизмом  $X$  на  $Y$ . ►

Пусть  $(X, \rho_1)$  и  $(X, \rho_2)$  — метрические пространства. Если тождественное отображение  $x \mapsto x$  является гомеоморфизмом, то  $\rho_1$  и  $\rho_2$  называются *эквивалентными* или *топологически эквивалентными* расстояниями в  $X$ . Из теоремы 7, п. 6.4, видно, что в этом случае в  $(X, \rho_1)$  и  $(X, \rho_2)$  совпадают семейства открытых множеств. *Топологией* метрического пространства  $(X, \rho_X)$  называют семейство открытых множеств в нем. Эквивалентные расстояния порождают одну и ту же топологию. Окрестности, замкнутые множества, точки прикосновения, замыкания, внутренность множества, множества внешних точек, плотные множества, границы, непрерывные функции являются топологическими понятиями. Топологические свойства метрического пространства инвариантны при гомеоморфизмах. Понятия шаров, сфер, диаметра, ограниченного множества, равномерно непрерывной функции не являются топологическими.



## Комплексные числа и функции комплексного переменного

### § 1. Комплексные числа и комплексная плоскость

В элементарном курсе алгебры возникновение понятия комплексного числа по большей части связывают с уравнением  $x^2 + 1 = 0$ . Прежде всего выясняется, что не существует действительных чисел, которые удовлетворяли бы этому уравнению. Тогда вводится в рассмотрение новое “мнимое” число  $i = \sqrt{-1}$ , и указанное уравнение уже имеет корни  $\pm i$ . Затем рассматриваются “комплексные числа”  $x + iy$  как суммы действительных чисел  $x$  и “мнимых” чисел  $iy$ . Правила действий с этими новыми числами позволяют проводить над ними операции, как над действительными числами, заменяя в конечных результатах  $i^2$  на  $-1$ . После введения новых чисел оказывается, что все квадратные уравнения вида  $x^2 + px + q = 0$  и, вообще, все уравнения вида  $x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$  с произвольными коэффициентами имеют решения.

Описанный способ введения комплексных чисел не может нас удовлетворить, поскольку порождает взгляд на них как на объекты, не существующие реально, в буквальном смысле слова “мнимые”.

Мы пойдем иным путем, а именно, придав схеме введения комплексных чисел геометрический оттенок.

#### 1.1. Определение комплексного числа.

Рассмотрим плоскость  $\mathbb{R}^2$  и каждую ее точку  $z = (x, y)$ , где  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  будем считать вектором. В соответствии с этим определим модуль  $z$ , а также операцию сложения  $z_1 = (x_1, y_1)$  и  $z_2 = (x_2, y_2)$  по известным правилам для векторов (рис. 10)

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = z_1 + z_2 \Leftrightarrow x = x_1 + x_2 \wedge y = y_1 + y_2. \quad (1)$$

По тем же правилам  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  полагаем  $\alpha z = (\alpha x, \alpha y)$ .

Согласно теории векторов на плоскости,  $z$  можно разложить по векторам  $1 = (1, 0)$  и  $i = (0, 1)$  (рис. 11):

$$z = x \cdot 1 + y \cdot i. \quad (2)$$

Возникает вопрос, можно ли, сохранив равенства (1) и (2), определяющие операции над векторами, ввести операцию умножения точек плоскости  $\mathbb{R}^2$ , превратив их в числа, называемые далее комплексными? Требование сохранения равенств (1) и (2) является существенным. Без них мы могли бы взять обратимое отображение  $\mathbb{R}$  на  $\mathbb{R}^2$  и принять его за изоморфизм упорядоченных полей, превратив  $\mathbb{R}^2$  в мало полезное для приложений представление упорядоченного поля действительных чисел.

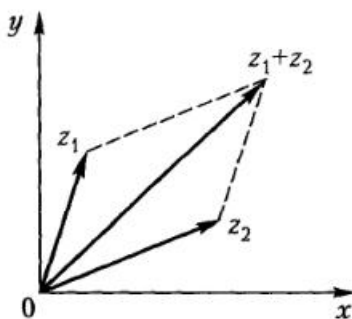


Рис. 10

Будем считать вектор 1 единицей операции умножения. Тогда, принимая во внимание равенство (2), для положительного ответа на поставленный выше вопрос достаточно правильно определить произведение  $i \cdot i = i^2$ . Поскольку  $1 \cdot i = i$ , т. е. точку  $(0, 1)$  получим из точки  $(1, 0)$  поворотом плоскости  $\mathbb{R}^2$  против хода часовой стрелки на угол  $\frac{\pi}{2}$ , то полагают

$$i^2 = -1. \quad (3)$$

Пользуясь равенствами (2) и (3), запишем для  $z = (x, y)$  соотношения

$$z \cdot i = (x \cdot 1 + y \cdot i)i = -y \cdot 1 + x \cdot i = (-y, x). \quad (4)$$

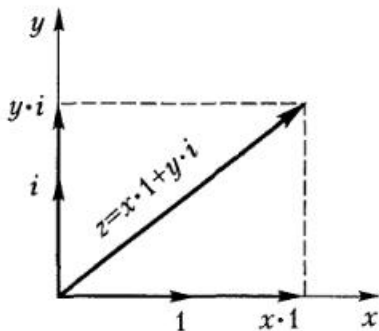


Рис. 11

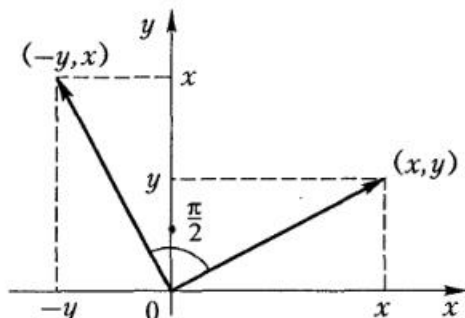


Рис. 12

Точка  $(-y, x)$  получается из точки  $(x, y)$  поворотом плоскости  $\mathbb{R}^2$  против хода часовой стрелки на прямой угол (рис. 12). Поворот на другой угол можно будет задать с помощью умножения не на  $i$ , а на другое комплексное число. Сказанное подтверждает важность для математики комплексных чисел. Прибегая к ним, можно изучать важнейшие преобразования плоскости: сдвиг, поворот, гомотетию.

Теперь запишем *правило умножения точек плоскости*  $\mathbb{R}^2$ . Имеем

$$\begin{aligned} (x_1, y_1)(x_2, y_2) &= (x_1 \cdot 1 + y_1 \cdot i)(x_2 \cdot 1 + y_2 \cdot i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2)1 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i, \\ (x_1, y_1)(x_2, y_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned} \quad (5)$$

**Определение.** Числовая плоскость  $\mathbb{R}^2$  называется *комплексной плоскостью*  $\mathbb{C}$ , если для ее точек определены модули, операции сложения и умножения по формулам (1), (5). Точки комплексной плоскости называются *комплексными числами*.

Множество действительных чисел определяется однозначно лишь с точностью до изоморфизма. Поэтому комплексные числа  $x \cdot 1$ , где  $x \in \mathbb{R}$ , дают другое представление числовой прямой  $\mathbb{R}$  и вполне могут быть приняты за действительные числа. Таким образом, комплексные числа содержат в себе все действительные, т. е.  $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ . Отметим, что комплексные числа так же, как и действительные, определены однозначно лишь с точностью до изоморфизма.

Упрощая запись, вместо  $x \cdot 1$  будем писать  $x$ . С той же целью будем писать  $iy$  вместо  $y \cdot i$ . Тогда комплексное число  $z = (x, y)$  принимает вид  $z = x + iy$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ . Числа  $x$  и  $y$  по традиции соответственно называются *действительной* и *мнимой частями* комплексного числа  $z$  и обозначаются символами  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ . Таким образом, комплексное число  $z = (x, y)$  представляет собой упорядоченную пару, комплекс, составленный из действительных чисел  $x$  и  $y$  («комплексное» — составное).

Название «комплексное число» предложил К. Гаусс (1777–1855), символ  $i$  ввел в рассмотрение Л. Эйлер (1707–1783).

Число  $z = x - iy$  называется *сопряженным* числу  $z = x + iy$  и обозначается через  $\bar{z}$ . Очевидно, что  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ .

Необходимо проверить, образуют ли комплексные числа поле. Очевидно, операция сложения удовлетворяет требуемым аксиомам, поскольку отвечает операции сложения векторов. Читатель может проверить аксиомы сложения, не прибегая к векторам, а исходя из определения суммы в

условиях (1). Непосредственная проверка аксиом умножения и аксиом, связывающих сложение с умножением, приведет к громоздким выкладкам. Этого можно избежать, если ввести другие характеристики комплексного числа.

## 1.2. Аргумент комплексного числа.

**Тригонометрическая и показательная формы его записи.**

**Умножение и деление комплексных чисел.**

**Операция извлечения корня из комплексного числа.**

**Определение.** Пусть  $z \in \mathbb{C}$  и  $z \neq 0$ . Угол  $\varphi$  между радиусом-вектором точки  $z$  и ортом действительной оси называется *аргументом* числа  $z$  (рис. 13).

Аргумент числа  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ , определяется неоднозначно, а с точностью до кратного  $2\pi$ . Множество всех значений аргумента  $z$  обозначим через  $\text{Arg } z$ . Если  $\varphi \in \text{Arg } z$ , то  $\text{Arg } z = \{\varphi + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . За  $\text{Arg } 0$  примем все множество действительных чисел. Иногда  $\text{Arg } 0$  не определяют. В множестве  $\text{Arg } z$ ,  $z \neq 0$ , существует одно и только одно значение  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ , которое называется *главным* и обозначается  $\arg z$ .

Принимая во внимание связь между декартовыми и полярными координатами точки  $(x, y)$  плоскости  $\mathbb{R}^2$ , имеем

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (1)$$

где  $x = \text{Re } z$ ,  $y = \text{Im } z$ ,  $r = |z|$ ,  $\varphi \in \text{Arg } z$ . Из равенств (1) получаем *тригонометрическую форму записи* комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \varphi \in \text{Arg } z, \quad r = |z|, \quad (2)$$

которая оказывается очень удобной при умножении и делении комплексных чисел. Л. Эйлер ввел в рассмотрение показательную функцию

$$\varphi \mapsto e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Запись комплексного числа в *показательной форме* принимает вид

$$z = r e^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi \in \text{Arg } z. \quad (4)$$

Следующее утверждение устанавливает основные свойства показательной функции, определенной формулой (3).

**Теорема.** Пусть  $\varphi \in \mathbb{R}$ ,  $\psi \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Тогда справедливы равенства:

- 1)  $e^{i0} = 1$ ;
- 2)  $e^{i\varphi} e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$ ;
- 3)  $e^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{i\varphi}$ ;
- 4)  $e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}$ ;
- 5)  $|e^{i\varphi}| = 1$ .

Указанные равенства непосредственно следуют из формулы (3) и свойств тригонометрических функций. Докажем равенство 2). По определению имеем

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} e^{i\psi} &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) = \\ &= (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + i(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi) = \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi) = e^{i(\varphi + \psi)}. \end{aligned}$$

Показательная форма записи комплексного числа позволяет значительно упростить операции умножения и деления комплексных чисел. Если

$$z_j = r_j e^{i\varphi_j}, \quad r_j = |z_j|, \quad \varphi_j \in \text{Arg } z_j \quad (j = 1, 2), \quad (5)$$

то

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (6)$$

Таким образом, для вычисления произведения комплексных чисел нужно перемножить их модули и сложить аргументы, а при их делении модули делятся и аргументы отнимаются.

Полезна формула Муавра (1667–1754), которая является следствием формулы (3), или может быть установлена с помощью метода математической индукции: если  $z = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ , то  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$z^n = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^n = (r^n \cos n\varphi, r^n \sin n\varphi). \quad (7)$$

Формула Муавра позволяет извлекать корни произвольной целой степени из комплексного числа. Пусть  $z = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  и требуется найти такое комплексное число

$$z_1 = (r_1 \cos \varphi_1, r_1 \sin \varphi_1),$$

чтобы  $z_1^n = z$ . Тогда, в соответствии с формулой (7),

$$(r_1^n \cos n\varphi_1, r_1^n \sin n\varphi_1) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi). \quad (8)$$

Приравняв друг другу модули и аргументы, имеем

$$r_1^n = r, \quad n\varphi_1 = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Итак,  $r_1 = \sqrt[n]{r}$ ,  $\varphi_1 = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ . При  $k = \overline{0, n-1}$  получаем  $n$  разных значений:

$$\sqrt[n]{z} = \left( \sqrt[n]{r} \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \sqrt[n]{r} \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \quad (10)$$

Они делят окружность радиуса  $\sqrt[n]{r}$  на  $n$  дуг одинаковой длины.

Поле  $\mathbb{C}$  не является упорядоченным. В упорядоченном поле  $P \forall (a \in P, b \in P) a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$ . В поле  $\mathbb{C}$  это условие не выполняется, например,  $i^2 + 1^2 = 0$ , однако  $i \neq 0, 1 \neq 0$ .

Отметим, что модуль комплексного числа  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  удовлетворяет аксиомам нормы (см. п. 2.5, гл. 1). Выполнение аксиом 1) и 2) очевидно. Рассмотрим на рис. 10 треугольник с вершинами в точках  $0, z_2, z_1 + z_2$ . Длины его сторон равны:  $|z_2|$  (от  $0$  до  $z_2$ ),  $|z_1|$  (от  $z_2$  до  $z_1 + z_2$ ),  $|z_1 + z_2|$  (от  $z_1 + z_2$  до  $0$ ). Поскольку длина стороны треугольника не больше суммы длин двух других сторон и не меньше абсолютной величины их разности, то

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Следовательно, модуль удовлетворяет и неравенству треугольника. Таким образом, упорядоченная четверка  $E = (\mathbb{C}, +, \cdot, | \cdot |)$  является нормированным векторным пространством над полем  $\mathbb{R}$ . Оно превратится в метрическое пространство, если в нем  $\forall (z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C})$  метрику определить равенством

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \quad (11)$$

(см. п. 3.1, гл. 1).

Множества натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел, несмотря на их существенные различия, имеют много общих признаков, таких как коммутативность и ассоциативность операций сложения и умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения, существование единичного элемента относительно операции умножения. Возникает вопрос: можно ли достичь новых результатов, расширяя понятие числа, чтобы упомянутые общие признаки сохранились?

Ответ на поставленный вопрос дает теорема Ф. Фробениуса (1849–1917), из которой следует, что поле  $\mathbb{C}$  комплексных чисел является максимальным числовым полем и дальнейшее расширение понятия числа невозможно.

### 1.3. Стереографическая проекция и ее свойства.

Для нужд теории аналитических функций комплексную плоскость  $\mathbb{C}$  дополняют бесконечно удаленной точкой, соответствующей условному комплексному числу  $\infty$ . Множество  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  называют расширенной комплексной плоскостью. Для наглядного изображения расширенной комплексной плоскости проведем специальное геометрическое построение.

Введем в пространстве  $\mathbb{R}^3$  систему координат  $O\xi\eta\zeta$  так, чтобы плоскость  $\mathbb{C}$  совпала с плоскостью  $\mathbb{R}^2$  и чтобы оси  $O\xi$  и  $O\eta$  совпали с осями  $Ox$  и  $Oy$  комплексной плоскости  $z$ . Построим сферу  $S$  радиуса  $\frac{1}{2}$  с центром в точке  $(0, 0, \frac{1}{2})$ , которая касается комплексной плоскости в начале координат (рис. 14). Точки  $(\xi, \eta, \zeta) \in S$  удовлетворяют уравнению

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta(1 - \zeta). \quad (1)$$

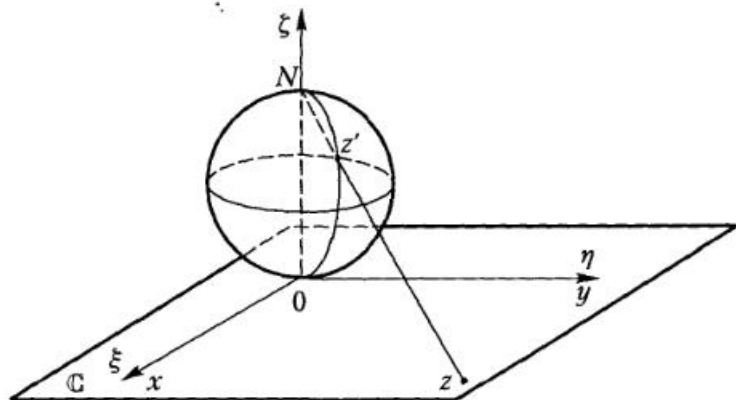


Рис. 14

Точку  $(0, 0, 1)$  обозначим через  $N$  и будем соединять ее с различными точками сферы  $z'(\xi, \eta, \zeta)$  прямыми лучами с началом в  $N$  и отмечать на каждом луче точку  $z = x + iy$  встречи его с плоскостью  $C$ . Тогда все точки сферы, за исключением точки  $N$ , спроектируются на плоскость  $C$ . Этим установлено взаимно-однозначное соответствие  $z \leftrightarrow z'$  между множествами  $C$  и  $S \setminus \{N\}$ . Если условимся, что  $z = \infty \leftrightarrow N$ , то получим взаимно однозначное соответствие между множествами  $\bar{C}$  и  $S$ . Это соответствие называется *стереографической проекцией*. Сферу  $S$  при этом называют *сферой Римана*.

Установим связь между координатами точек  $z$  и  $z'$ . Координаты точки  $z'$  удовлетворяют уравнению сферы (1), а условие, что точки  $z, z'$  и  $N$  лежат на одной прямой, имеет вид

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1}.$$

Следовательно,

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}. \quad (2)$$

Принимая во внимание (1) и (2), имеем

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{\zeta}{1 - \zeta},$$

откуда

$$\zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}, \quad 1 - \zeta = \frac{1}{1 + |z|^2}.$$

Получаем обращение формул (2):

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} \quad (3)$$

Соотношения (1), (2), (3) называются *основными формулами стереографической проекции*.

Стереографическая проекция имеет два важных свойства:

1) при стереографической проекции окружности всегда переходят в окружности (при этом прямая на плоскости  $C$  считается окружностью бесконечного радиуса);

2) если две кривые на сфере  $S$  пересекаются в точке  $M$ , а касательные к этим кривым в точке  $M$  образуют угол  $\alpha$ , то и угол между касательными к стереографической проекции этих кривых в точке  $M'$  их пересечения также равен  $\alpha$ , т. е. величины углов при стереографической проекции сохраняются.

Для большей наглядности изложенного выше воспользуемся географической терминологией. Плоскость, проходящая через центр сферы параллельно плоскости  $\zeta = 0$ , называется *экваториальной*. Согласно принятой терминологии, точка  $A \in S$  лежит на параллели с широтой  $\varphi$ , если

радиус-вектор  $\overrightarrow{OA}$  с началом в центре сферы  $S$  образует угол  $\varphi$  с экваториальной плоскостью, причем в верхней по отношению к этой плоскости части сферы  $\varphi$  изменяется от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ , а в нижней части сферы — от  $-\frac{\pi}{2}$  до 0. Точки сферы, имеющие одну и ту же широту  $\varphi$ , образуют параллель данной широты. Долготой точки  $A(\xi, \eta, \zeta) \in S$  называют  $\arg(\xi + i\eta)$ . Совокупность точек данной долготы  $\lambda$  образует полумеридиан этой долготы. Точка  $N$  называется северным полюсом, а начало координат  $O$  — южным полюсом.

Рассмотрим примеры.

1. Представить в виде  $a + ib$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ) следующие комплексные числа:

$$z_1 = \frac{1-i}{1+i}; \quad z_2 = \frac{2}{1-3i}; \quad z_3 = (1+i\sqrt{3})^6; \quad z_4 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5; \quad z_5 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4.$$

◀ Воспользуемся правилами действий над комплексными числами и равенством  $z\bar{z} = |z|^2$ . Получим:

$$z_1 = \frac{(1-i)(1-i)}{|1+i|^2} = \frac{(1-i)^2}{2} = -\frac{2i}{2} = -i; \quad z_2 = \frac{2(1+3i)}{|1-3i|^2} = \frac{1+3i}{5} = \frac{1}{5} + i\frac{3}{5};$$

$$z_3 = 2^6 \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 2^6 e^{i\frac{\pi}{3} \cdot 6} = 2^6 e^{i2\pi} = 2^6;$$

$$z_4 = \frac{(1+i)^{10}}{2^5} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{10} = e^{i\frac{\pi}{4} \cdot 10} = e^{i\frac{5}{2}\pi} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i;$$

$$z_5 = \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{i}{2}}\right)^4 = 2^2 \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}}\right)^4 = 2^2 \frac{e^{i\frac{\pi}{3} \cdot 4}}{e^{-i\frac{\pi}{4} \cdot 4}} =$$

$$= -2^2 e^{i\frac{4}{3}\pi} = -2^2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)\right) = 2 + i2\sqrt{3}. \blacktriangleright$$

2. Найти модули  $r$  и аргументы  $\varphi$  комплексных чисел  $a + bi$  ( $a$  и  $b$  — действительные числа):

$$\begin{array}{lllll} z_1 = 3i; & z_2 = -2; & z_3 = 1 + i; & z_4 = -1 - i; & z_5 = 2 + 5i; \\ z_6 = 2 - 5i; & z_7 = -2 + 5i; & z_8 = -2 - 5i; & z_9 = bi \quad (b \neq 0); & z_{10} = a + bi. \end{array}$$

◀ Под  $\varphi$  понимаем главное значение:  $-\pi < \arg z \leq \pi$ ,  $\operatorname{arctg} \varphi$  — главная ветвь от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$ . Определять  $\varphi$  легче, если изображать точку  $z$  на комплексной плоскости. Имеем

$$\begin{array}{lllll} r_1 = |z_1| = 3, \varphi_1 = \frac{\pi}{2}; & r_2 = |z_2| = 2, \varphi_2 = \pi; & r_3 = |z_3| = \sqrt{2}, \varphi_3 = \frac{\pi}{4}; & r_4 = |z_4| = \sqrt{2}, \varphi_4 = -\frac{3\pi}{4}; \\ r_5 = |z_5| = \sqrt{29}, \varphi_5 = \operatorname{arctg} \frac{5}{2}; & r_6 = |z_6| = \sqrt{29}, \varphi_6 = -\operatorname{arctg} \frac{5}{2}; & r_7 = |z_7| = \sqrt{29}, \varphi_7 = \pi - \operatorname{arctg} \frac{5}{2}; \\ r_8 = |z_8| = \sqrt{29}, \varphi_8 = \operatorname{arctg} \frac{5}{2} - \pi; & r_9 = |z_9| = |b|, \varphi_9 = \frac{\pi}{2} \frac{|b|}{b} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} b; \end{array}$$

$$r_{10} = |z_{10}| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi_{10} = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, & a > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, & a < 0, b \geq 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \pi, & a < 0, b < 0. \end{cases} \blacktriangleright$$

3. Доказать, что  $\sqrt[4]{i}$  имеет следующие четыре значения:

$$\pm \frac{1}{2} \left( \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right), \quad \pm \frac{1}{2} \left( \sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}} \right).$$

◀ Пусть  $z = i$ , тогда  $|z| = 1$ ,  $\arg z = \varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\sqrt[4]{z} = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} + i\sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . Получаем четыре различных значения корня:

$$\begin{array}{ll} z_0 = \cos \frac{\pi}{8} + i\sin \frac{\pi}{8}, & z_1 = \cos \frac{5\pi}{8} + i\sin \frac{5\pi}{8} = -\cos \frac{3\pi}{8} + i\sin \frac{3\pi}{8}, \\ z_2 = \cos \frac{9\pi}{8} + i\sin \frac{9\pi}{8} = -\cos \frac{\pi}{8} - i\sin \frac{\pi}{8}, & z_3 = \cos \frac{13\pi}{8} + i\sin \frac{13\pi}{8} = \cos \frac{3\pi}{8} - i\sin \frac{3\pi}{8}. \end{array}$$



Поскольку  $|\cos x| = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$ ,  $|\sin x| = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$ , то

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{8} &= \sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, & \sin \frac{\pi}{8} &= \sqrt{\frac{1-\cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \\ \cos \frac{3\pi}{8} &= -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, & \sin \frac{3\pi}{8} &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \\ z_{0,2} &= \pm \frac{1}{2} \left( \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} \right), & z_{1,3} &= \pm \frac{1}{2} \left( \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}} \right). \blacktriangleright\end{aligned}$$

4. Определить комплексные числа  $z$ , удовлетворяющие следующим двум условиям:

$$\left| \frac{z-12}{z-8i} \right| = \frac{5}{3}, \quad \left| \frac{z-4}{z-8} \right| = 1.$$

◀ Так как  $\left| \frac{z-12}{z-8i} \right|^2 = \frac{(x-12)^2+y^2}{x^2+(y-8)^2} = \frac{25}{9}$ ,  $\left| \frac{z-4}{z-8} \right|^2 = \frac{(x-4)^2+y^2}{(x-8)^2+y^2} = 1$ , то задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 27x - 50y + 38 = 0, \\ 8x = 48. \end{cases}$$

Ее решения —  $z_1 = (6, 17)$ ,  $z_2 = (6, 8)$ , т.е.  $z_1 = 6 + 17i$ ,  $z_2 = 6 + 8i$ . ▶

5. Доказать тождество  $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 4|a|^2$ , если  $|a| = |b|$ .

◀ Воспользуемся очевидным свойством  $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$  и тем, что  $z\bar{z} = |z|^2$ . Имеем:

$$\begin{aligned}|a+b|^2 + |a-b|^2 &= (a+b)(\overline{a+b}) + (a-b)(\overline{a-b}) = (a+b)(\bar{a} + \bar{b}) + (a-b)(\bar{a} - \bar{b}) = \\ &= a\bar{a} + a\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{b} + a\bar{a} - a\bar{b} - b\bar{a} + b\bar{b} = 2(a\bar{a} + b\bar{b}) = 2(|a|^2 + |b|^2) = 4|a|^2. \blacktriangleright\end{aligned}$$

6. Доказать тождество  $|1 - \bar{a}b|^2 - |a - b|^2 = (1 + |ab|)^2 - (|a| + |b|)^2$  ( $a \in \mathbb{C}$ ,  $b \in \mathbb{C}$ ).

◀ Аналогично проделанному выше получим:

$$\begin{aligned}|1 - \bar{a}b|^2 - |a - b|^2 &= (1 - \bar{a}b)(\overline{1 - \bar{a}b}) - (a - b)(\overline{a - b}) = \\ &= (1 - \bar{a}b)(1 - a\bar{b}) - (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) = 1 - a\bar{b} - \bar{a}b + a\bar{a}b\bar{b} - a\bar{a} + a\bar{b} + b\bar{a} - b\bar{b} = \\ &= 1 + |a|^2|b|^2 - (|a|^2 + |b|^2) = 1 + |ab|^2 - (|a| + |b|)^2 + 2|ab| = (1 + |ab|)^2 - (|a| + |b|)^2. \blacktriangleright\end{aligned}$$

7. Доказать тождество  $\frac{|a+b|}{\left|1 + \frac{b}{a}\right|} = a$  ( $a > 0$ ;  $b \in \mathbb{C} \wedge b \neq -a$ ).

◀ Так как  $a > 0$ , то

$$\frac{|a+b|}{a} = \left| \frac{a+b}{a} \right| = \left| 1 + \frac{b}{a} \right| = \left| 1 + \frac{\bar{b}}{a} \right| = \left| 1 + \frac{\bar{b}}{a} \right|. \blacktriangleright$$

8. Пусть  $|a| = 1$  или  $|b| = 1$  ( $a \neq b$ ). Доказать, что  $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$ .

◀ Поскольку

$$|a-b|^2 = (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) = |a|^2 - a\bar{b} - b\bar{a} + |b|^2,$$

то

$$|1-\bar{a}b|^2 = (1-\bar{a}b)(1-a\bar{b}) = 1 - a\bar{b} - \bar{a}b + |ab|^2.$$

Если  $|a| = 1$ , то

$$|a-b|^2 = 1 - a\bar{b} - b\bar{a} + |b|^2, \quad |1-\bar{a}b|^2 = 1 - a\bar{b} - \bar{a}b + |b|^2,$$

т.е.  $|a-b| = |1-\bar{a}b|$  и  $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$ . Аналогично, если  $|b| = 1$ , то  $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$ . ▶

**9.** Модули комплексных чисел  $z_1, z_2, z_3, z_4$  образуют геометрическую прогрессию, а их аргументы — арифметическую прогрессию. Найти  $z_2$  и  $z_3$ , если  $z_1 = \sqrt{2}$ ,  $z_4 = 4i$ .

◀ Пусть  $q$  — знаменатель геометрической прогрессии,  $d$  — разность арифметической прогрессии. Тогда  $|z_2| = |z_1|q = \sqrt{2}q$ ,  $|z_3| = |z_1|q^2 = \sqrt{2}q^2$ ,  $|z_4| = 4 = \sqrt{2}q^3$ , откуда  $q = \sqrt{2}$ . Пусть  $\varphi_i = \arg z_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ). Поскольку  $\varphi_1 = 0$ , то  $\varphi_2 = d$ ,  $\varphi_3 = 2d$ ,  $\varphi_4 = 3d$ . Так как  $z_4 = 4i = (\cos 3d + i \sin 3d)$ , то  $\cos 3d = 0 \wedge \sin 3d = 1$ . Следовательно  $3d = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $d = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Поскольку  $d = \varphi_2 = \arg z_2$ , то  $-\pi < \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \leq \pi$ . Получаем три значения  $d$ :  $d_1 = \frac{\pi}{6}$ ,  $d_2 = \frac{5}{6}\pi$ ,  $d_3 = -\frac{\pi}{2}$  и, соответственно, по три решения для  $z_2$  и  $z_3$ :

$$\begin{aligned} z_2^{(1)} &= 2e^{i\frac{\pi}{6}}, & z_2^{(2)} &= 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, & z_2^{(3)} &= 2e^{-i\frac{\pi}{2}}, \\ z_3^{(1)} &= 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}, & z_3^{(2)} &= 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{3}}, & z_3^{(3)} &= 2\sqrt{2}e^{-i\pi}. \end{aligned}$$

**10.** Решить уравнение  $az + b\bar{z} = c$  ( $a \in \mathbb{C}$ ,  $b \in \mathbb{C}$ ,  $c \in \mathbb{C}$ ).

◀ Если  $z$  — решение данного уравнения, то  $\bar{z}$  будет решением уравнения  $\bar{b}z + \bar{a}\bar{z} = \bar{c}$ . Решая систему уравнений

$$\begin{cases} az + b\bar{z} = c, \\ \bar{b}z + \bar{a}\bar{z} = \bar{c}, \end{cases}$$

получим, при условии что  $|a|^2 \neq |b|^2$ :  $z = \frac{\bar{a}c - b\bar{c}}{|a|^2 - |b|^2}$ .

Если  $|a|^2 = |b|^2$ , то система несовместна, за исключением случая, когда  $\frac{\bar{a}}{b} = \frac{\bar{b}}{a} = \frac{\bar{c}}{c}$ . При выполнении этих условий система сводится к уравнению  $c\bar{b}z + \bar{c}b\bar{z} = c\bar{c}$ , т.е. к  $Z + \bar{Z} = |c|^2$ , где  $Z = c\bar{b}z$ . Последнее уравнение имеет решение  $Z = \frac{1}{2}|c|^2 + it$ ,  $-\infty < t < +\infty$ . Возвращаясь к  $z$ , получим:  $z = \frac{1}{2}\frac{\bar{c}}{b} + i\frac{t}{c\bar{b}}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ). ▶

**11.** Решить относительно  $z$  уравнение  $az\bar{z} + bz + c\bar{z} + d = 0$  ( $a \in \mathbb{C}$ ,  $b \in \mathbb{C}$ ,  $c \in \mathbb{C}$ ,  $d \in \mathbb{C}$ ).

◀ Как и в предыдущем примере, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} a|z|^2 + bz + c\bar{z} + d = 0, \\ \bar{a}|z|^2 + \bar{b}\bar{z} + \bar{c}z + \bar{d} = 0. \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения на  $\bar{a}$ , второго — на  $a$  и вычтем полученное одно из другого. Находим:  $(a\bar{c} - \bar{a}b)z - (\bar{a}c - a\bar{b})\bar{z} + a\bar{d} - \bar{a}d = 0$ . Обозначим  $(a\bar{c} - \bar{a}b)z = Z$ , тогда последнее уравнение примет вид

$$Z - \bar{Z} = -(a\bar{d} - \bar{a}d), \quad \text{т.е. } 2i \operatorname{Im} Z = -2i \operatorname{Im}(a\bar{d}).$$

Отсюда получаем

$$Z = t - i \operatorname{Im}(a\bar{d}), \quad \text{т.е. } z = \frac{t - i \operatorname{Im}(a\bar{d})}{a\bar{c} - \bar{a}b}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright$$

**12.** Установить, когда выполняется равенство  $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = (\operatorname{Re} z_1)(\operatorname{Re} z_2)$ .

◀ Пусть  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ ,  $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$ ,  $\varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$ . Тогда получим:

$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}) = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)$ ,  $(\operatorname{Re} z_1)(\operatorname{Re} z_2) = r_1 r_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$ . Указанное в условии равенство выполняется, если  $\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = 0$ , т.е. когда  $z_1 \in \mathbb{R}$  или  $z_2 \in \mathbb{R}$ . ▶

**13.** Пусть  $a \in \mathbb{C}$  и  $|a| < 1$ . Доказать, что неравенства  $|z| \leq 1$ ,  $\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \leq 1$  эквивалентны и что равенство в обоих случаях достигается при одном и том же  $z$ .

◀ Пусть  $|z| \leq 1$ . Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} |z-a|^2 - |1-\bar{a}z|^2 &= (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) - (1-\bar{a}z)(1-a\bar{z}) = \\ &= |z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2 - 1 + a\bar{z} + \bar{a}z - |a|^2 |z|^2 = (|a|^2 - 1)(1 - |z|^2) \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $|z| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \leq 1$ . Пусть  $\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \leq 1$ , тогда  $(|a|^2 - 1)(1 - |z|^2) \leq 0 \Rightarrow |z| \leq 1$ , так как по условию  $|a| < 1$ . ▶

14. Пусть  $z = x + iy \neq 0$ . Найти  $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{\bar{z}^2}$ .

◀ Имеем

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{\bar{z}^2} = \frac{\bar{z}^2 + z^2}{(z\bar{z})^2} = \frac{(x-iy)^2 + (x+iy)^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

15. Найти главное значение аргумента чисел  $z_1 = -2 + 3i$ ,  $z_2 = a + ib$  ( $a < 0$ ,  $b < 0$ ).

◀ Точка  $z_1$  лежит во втором квадранте  $z$ -плоскости, поэтому  $\arg z_1 = \arctg\left(-\frac{3}{2}\right) + \pi = \pi - \arctg \frac{3}{2}$ . Точка  $z_2$  находится в третьем квадранте, поэтому  $\arg z_2 = \arctg \frac{b}{a} - \pi$ .

16. Изобразить в тригонометрической форме числа  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$  и  $z_2 = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$ .

◀ Для  $z_1$  имеем:

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \quad \arg z_1 = \arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Для  $z_2$ :

$$|z_2| = \sqrt{(1 - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Считая, что  $0 < \alpha < 2\pi$  и замечая, что  $|\arg z_2| < \frac{\pi}{2}$ , получаем

$$\sin(\arg z_2) = \frac{\sin \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right), \quad \arg z_2 = \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

Таким образом,

$$z_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), \quad z_2 = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\pi - \alpha}{2} + i \sin \frac{\pi - \alpha}{2} \right).$$

17. Выразить  $\cos 5x$  и  $\sin 5x$  через  $\cos x$  и  $\sin x$ .

◀ Согласно формуле Муавра  $\cos 5x + i \sin 5x = (\cos x + i \sin x)^5$ . По формуле бинома Ньютона имеем

$$(\cos x + i \sin x)^5 = \cos^5 x + 5i \cos^4 x \sin x - 10 \cos^3 x \sin^2 x - 10i \cos^2 x \sin^3 x + 5 \cos x \sin^4 x + i \sin^5 x.$$

Отсюда

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x, \quad \sin 5x = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x.$$

Вычислим, например,  $\cos \frac{2\pi}{5}$  и  $\sin \frac{2\pi}{5}$ . Имеем:

$$0 = 5 \cos^4 \frac{2\pi}{5} - 10 \cos^2 \frac{2\pi}{5} \sin^2 \frac{2\pi}{5} + \sin^4 \frac{2\pi}{5} = 5 \left( 1 - \sin^2 \frac{2\pi}{5} \right)^2 - 10 \left( 1 - \sin^2 \frac{2\pi}{5} \right) \sin^2 \frac{2\pi}{5} + \sin^4 \frac{2\pi}{5}.$$

Обозначив  $\sin^2 \frac{2\pi}{5} = y$ , получаем квадратное уравнение  $16y^2 - 20y + 5 = 0$ , откуда

$$y = \sin^2 \frac{2\pi}{5} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}, \quad \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Тогда

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \sqrt{1 - \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

18. Представить  $\sin^4 x$  в виде многочлена первой степени от тригонометрических углов, кратных  $x$ .

◀ Записывая  $z = \cos x + i \sin x$ ,  $\bar{z} = \cos x - i \sin x$ ,  $z - \bar{z} = 2i \sin x$ , получаем:

$$\sin^4 x = \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{24} (z - \bar{z})^4 = \frac{1}{24} (z^4 - 4z\bar{z}(z^2 + \bar{z}^2) + 6z^2\bar{z}^2 + \bar{z}^4) = \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8},$$

так как  $z^k + \bar{z}^k = 2 \cos kx$ ,  $z\bar{z} = 1$ ,  $z^2\bar{z}^2 = (z\bar{z})^2 = 1$ .

19. Найти  $D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx \right)$ .

◀ Пусть  $S_1 = \sum_{k=0}^n \cos kx$ ,  $S_2 = \sum_{k=0}^n \sin kx$ ,  $z = \cos x + i \sin x$ . Тогда

$$S_1 + iS_2 = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1},$$

$$S_1 = \operatorname{Re} \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \operatorname{Re} \frac{\cos(n+1)x + i \sin(n+1)x - 1}{(\cos x - 1) + i \sin x} = \frac{\cos nx - \cos(n+1)x - \cos x + 1}{2 - 2 \cos x},$$

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{1}{2} + S_1 \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

В теории рядов Фурье функцию  $D_n$  называют *ядром Дирихле*. ▶

20. Пусть  $z_1$  и  $z_2$  — смежные вершины параллелограмма,  $z_3$  — точка пересечения его диагоналей. Найти две другие вершины параллелограмма.

◀ Данные и искомые вершины выгодно рассматривать в качестве свободных векторов (рис. 15). Начало вектора  $z_3 - z_2$  находится в точке  $z_2$ , его конец — в точке  $z_3$ . Поскольку вектор свободный, то, помещая его начало в точку  $z_1$ , получим  $z_4 = z_1 + (z_3 - z_2) = 2z_3 - z_2$ . Аналогично,  $z_5 = z_2 + (z_4 - z_1) = 2z_3 - z_1$ . ▶

21. Пусть  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ . Доказать, что точки  $z_1, z_2, z_3$  являются вершинами равностороннего треугольника тогда и только тогда, когда  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ .

◀ Необходимость. Пусть  $z_1, z_2, z_3$  — вершины равностороннего треугольника. Они лежат на единичной окружности с центром в начале координат и являются корнями уравнения  $z^3 - (\cos \varphi + i \sin \varphi) = 0$ . Таким образом,

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)z - z_1z_2z_3 \equiv z^3 - (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Согласно известной теореме Виета  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ .

Достаточность. Пусть  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ . Обозначим  $q = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ . Так как  $z_3\bar{z}_3 = z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = 1$ , то  $q = z_1z_2z_3(\bar{z}_3 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2) = 0$  и числа  $z_1, z_2, z_3$  удовлетворяют уравнению  $z^3 - z_1z_2z_3 = 0$ . Его корни лежат на единичной окружности. ▶

22. Решить уравнение  $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0$  (так называемое уравнение деления круга).

◀ Достаточно решить уравнение  $z^n - 1 = 0$ , поскольку

$$z^n - 1 = (z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1).$$

Корни этого уравнения  $z_k = \sqrt[n]{1} = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$  ( $k = \overline{0, n-1}$ ) можно записать в виде  $1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}$ , где  $\omega_n = z_1$ . В частности,

$$\omega_2 = -1, \quad \omega_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_4 = i, \quad \omega_5 = e^{\frac{i2\pi}{5}} = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4} \left( \sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right)$$

(см. пример 17).

Задача представления  $\omega_n$  в форме, содержащей лишь квадратные корни, является аналогом задачи о построении с помощью линейки и циркуля правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность единичного радиуса. ▶

23. Решить уравнение  $32z^5 = (z + 1)^5$ .

◀ Все корни этого уравнения удовлетворяют условию  $|2z| = |z + 1|$ . Если воспользуемся равенствами  $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ ,  $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ , где  $z = x + iy$ , то получим равенство  $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$ , т. е.

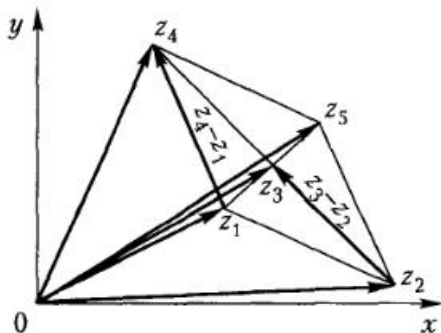


Рис. 15

устанавливаем, что корни  $z_k = r_k(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$  ( $k = \overline{0, 4}$ ) принадлежат окружности радиуса  $\frac{2}{3}$  с центром в точке  $z = \frac{1}{3}$ . Полагая  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $z + 1 = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$  (рис. 16), получаем

$$(2r)^5 (\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi) = \rho^5 (\cos 5\psi + i \sin 5\psi).$$

Отсюда  $\rho = 2r$ ,  $\varphi = \psi + \frac{2k\pi}{5}$ ,  $k = \overline{0, 4}$ . По теореме косинусов для треугольника с вершинами в точках 0,  $z$ ,  $z + 1$  имеем  $1 = 5r^2 - 4r^2 \cos \theta$ ,  $\theta = \varphi - \psi$ , а по теореме синусов  $\sin \psi = (5 - 4 \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} \sin \theta$ . Следовательно,

$$r_k = \frac{1}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta_k}}, \quad \theta_k = \frac{2\pi k}{5},$$

$$\varphi_k = \psi_k + \theta_k = \arcsin \left( \frac{\sin \theta_k}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta_k}} \right) + \theta_k,$$

$$k = \overline{0, 4}. \blacktriangleright$$

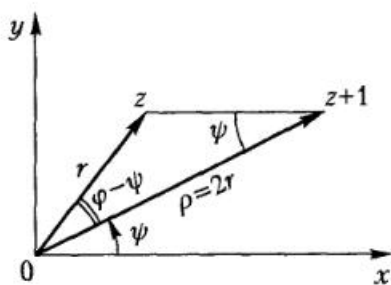


Рис. 16

$$24. \text{ Доказать, что } \frac{x^{2m} - a^{2m}}{x^2 - a^2} = \prod_{k=1}^{m-1} (x^2 - 2ax \cos \frac{k\pi}{m} + a^2), \quad a > 0.$$

Зная один корень  $x = a$  уравнения  $x^{2m} - a^{2m} = 0$  все остальные корни получим в виде  $a\omega_{2m}^k$  ( $k = \overline{1, 2m-1}$ ) (см. пример 22). Поэтому

$$x^{2m} - a^{2m} = (x - a)(x - a\omega_{2m}) \dots (x - a\omega_{2m}^m) \dots (x - a\omega_{2m}^{2m-1}), \quad x - a\omega_{2m}^m = x + a.$$

Поскольку  $\omega_{2m} = \cos \frac{\pi}{m} + i \sin \frac{\pi}{m}$ , то

$$\omega_{2m}^k + \omega_{2m}^{2m-k} = 2 \operatorname{Re} \omega_{2m}^k, \quad \omega_{2m}^k \cdot \omega_{2m}^{2m-k} = \omega_{2m}^k \overline{\omega_{2m}^k} = 1$$

и

$$(x - a\omega_{2m}^k)(x - a\omega_{2m}^{2m-k}) = x^2 - 2ax \cos \frac{k\pi}{m} + a^2 \quad (k = \overline{1, m-1}). \blacktriangleright$$

25. Пусть  $z_k$  — произвольные точки,  $m_k > 0$  — произвольные числа ( $k = \overline{1, n}$ ), причем  $\sum_{k=1}^n m_k = 1$ . Доказать, что всякая прямая, проходящая через точку  $z_0 = \sum_{k=1}^n m_k z_k$ , разделяет точки  $z_k$ , если только не все они размещены на одной прямой.

Допустим противное: все точки  $z_k$  размещены по одну сторону от прямой  $\gamma$ , проходящей через точку  $z_0$ . Выберем систему координат, в которой прямая  $\gamma$  совместится с мнимой осью, а точка  $z_0$  будет началом координат  $w$ -плоскости. Тогда точки  $z_k$  будут точками  $w_k$   $w$ -плоскости,  $w_k = (z_k - z_0)e^{i\theta}$ , где  $\theta$  — угол между прямой  $\gamma$  и мнимой осью  $z$ -плоскости. Поскольку, по предположению,  $\operatorname{Re} w_k > 0$  ( $< 0$ )  $\forall k = \overline{1, n}$ , то  $\sum_{k=1}^n m_k w_k > 0$  ( $< 0$ ). Однако

$$\sum_{k=1}^n m_k w_k = \sum_{k=1}^n (m_k z_k - m_k z_0) e^{i\theta} = 0,$$

так как

$$\sum_{k=1}^n (m_k z_k - m_k z_0) = \sum_{k=1}^n m_k z_k - z_0 \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n m_k z_k - z_0 = 0.$$

Получили противоречие, источник которого в предположении, что все точки  $z_k$  размещены по одну сторону от прямой  $\gamma$ .

Рассмотренная задача может быть интерпретирована следующим образом: точки  $z_k$  с помещенными в них массами  $m_k$  не могут лежать по одну сторону от прямой  $\gamma$ , проходящей через центр инерции этой системы материальных точек.  $\blacktriangleright$

## 26. Доказать утверждение К. Гаусса: нули многочлена

$$P'_n(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + \dots + 2a_2z + a_1, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0,$$

не могут быть размещены вне наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего все нули  $z_1, z_2, \dots, z_n$  многочлена  $P_n$  (рис. 17) ( $P'_n$  — производная многочлена  $P_n$ ).

◀ Поскольку  $P_n(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$ , то

$$P'_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{n-1}) + a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{n-2})(z - z_n) + \dots + a_n(z - z_1)(z - z_3) \dots (z - z_n) + a_n(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_n).$$

Если  $P'_n(z^*) = 0$ ,  $z^* \neq z_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ), то

$$\begin{aligned} \frac{P'_n(z^*)}{P_n(z^*)} &= \frac{1}{a_n(z^* - z_1)(z^* - z_2) \dots (z^* - z_n)} \times \\ &\times (a_n(z^* - z_1) \dots (z^* - z_{n-1}) + a_n(z^* - z_1) \dots (z^* - z_{n-2})(z^* - z_n) + \dots + a_n(z^* - z_2)(z^* - z_3) \dots (z^* - z_n)) = \\ &= \frac{1}{z^* - z_n} + \frac{1}{z^* - z_{n-1}} + \dots + \frac{1}{z^* - z_1} = 0. \end{aligned}$$

Тогда и

$$\frac{1}{z^* - z_n} + \frac{1}{z^* - z_{n-1}} + \dots + \frac{1}{z^* - z_1} = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{z^* - z_n}{|z^* - z_n|^2} + \frac{z^* - z_{n-1}}{|z^* - z_{n-1}|^2} + \dots + \frac{z^* - z_1}{|z^* - z_1|^2} = 0.$$

Из последнего равенства находим:

$$z^* \sum_{j=1}^n |z^* - z_j|^{-2} = \sum_{k=1}^n z_k |z^* - z_k|^{-2}, \quad z^* = \sum_{k=1}^n m_k z_k,$$

$$\text{где } m_k = \frac{|z^* - z_k|^{-2}}{\sum_{j=1}^n |z^* - z_j|^{-2}} > 0, \quad \sum_{k=1}^n m_k = 1.$$

Таким образом, каждая прямая, проходящая через точку  $z^*$ , разделяет точки  $z_1, z_2, \dots, z_n$  (см. пример 25). ▶

27. Доказать, что оба значения  $\sqrt{z^2 - 1}$  лежат на прямой, проходящей через начало координат и параллельной биссектрисе внутреннего угла треугольника с вершинами в точках  $-1, 1, z$ , проведенной из вершины  $z$ .

◀ На рис. 18  $\arg(z+1) = \alpha_1$ ,  $\arg(z-1) = \alpha_2$ . Тогда

$$\arg(z^2 - 1) = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\sqrt{z^2 - 1} = |z^2 - 1|^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) + 2k\pi}{2}} \quad (k = 0, 1).$$

Значения  $\sqrt{z^2 - 1}$  имеют аргументы  $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$  и  $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \pi$ .

Поскольку  $\alpha_2 = \alpha_1 + \beta$ , то значения  $\sqrt{z^2 - 1}$  имеют аргументы  $\alpha_1 + \frac{\beta}{2}$  и  $\alpha_1 + \frac{\beta}{2} + \pi$ . Угол  $\gamma$  наклона биссектрисы к оси  $Ox$  равен  $\alpha_1 + \frac{\beta}{2}$ . Следовательно, оба значения  $\sqrt{z^2 - 1}$  лежат на прямой, проходящей через начало координат, параллельной биссектрисе внутреннего угла треугольника с вершиной в точке  $z$ . ▶

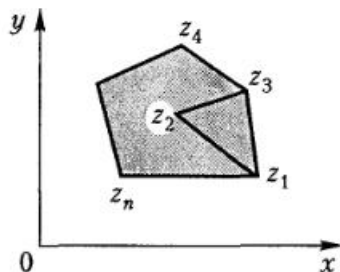


Рис. 17

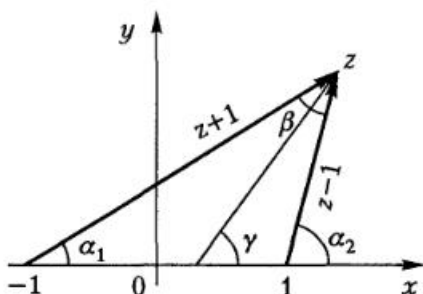


Рис. 18



28. Исходя из геометрических рассуждений, доказать неравенства:

$$1) \left| \frac{z}{|z|} - 1 \right| \leq |\arg z|; \quad 2) |z - 1| \leq ||z| - 1| + |z| |\arg z|.$$

◀ 1) Рассмотрим рис. 19. На нем видно, что длина хорды, стягивающей дугу окружности единичного радиуса, центральный угол которой равен  $|\arg z|$ , не превосходит длины этой дуги. Знак равенства возможен лишь в случае, когда  $\arg z = 0$ , т. е.  $z \in \mathbb{R}$ ,  $z > 0$ .

2) На рис. 20 видно, что в криволинейном треугольнике длина стороны, равная  $|z - 1|$ , не превышает суммы длин двух других сторон, одна из которых есть дуга окружности радиуса  $|z|$ , центральный угол которой равен  $|\arg z|$ , а длина другой равна  $||z| - 1|$ . Знак равенства возможен лишь в случае, когда  $\arg z = 0$ . ▶

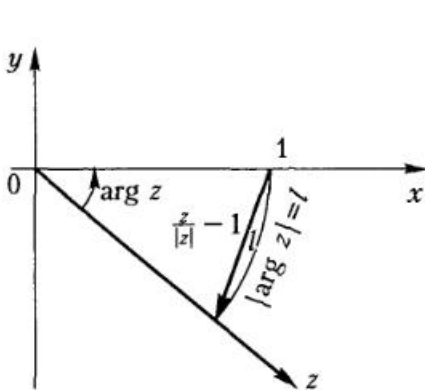


Рис. 19

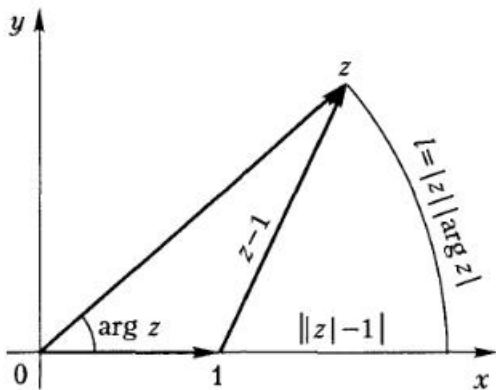


Рис. 20

29. Доказать тождество  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$  и выяснить его геометрический смысл.

◀ Пусть  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ . Тогда

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2),$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2,$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= 2(x_1^2 + x_2^2) + 2(y_1^2 + y_2^2) = \\ &= 2((x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2)) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \end{aligned}$$

В каждом параллелограмме сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин его сторон. ▶

30. Доказать, что если  $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ , то  $\arg \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{1}{2} \arg \frac{z_2}{z_1}$ .

◀ Точки  $z_1, z_2, z_3$  лежат на некоторой окружности с центром в начале координат. Рассмотрим векторы  $z_3 - z_2$ ,  $z_3 - z_1$ ,  $z_1, z_2$  (рис. 21). Угол  $\arg \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \arg(z_3 - z_2) - \arg(z_3 - z_1)$  опирается на дугу окружности, соединяющей точки  $z_1$  и  $z_2$ . Центральный угол  $\arg \frac{z_2}{z_1} = \arg z_2 - \arg z_1$  опирается на ту же самую дугу. По известной теореме из элементарной геометрии  $\arg \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{1}{2} \arg \frac{z_2}{z_1}$ . ▶

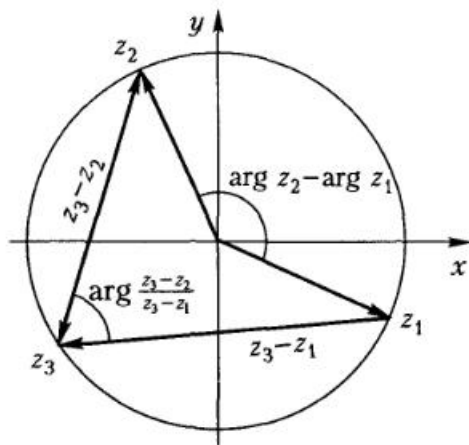


Рис. 21

**31.** Доказать, что если  $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$  и  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ , то точки  $z_1, z_2, z_3, z_4$  либо являются вершинами прямоугольника, либо попарно совпадают.

◀ Все четыре точки лежат на окружности с центром в начале координат и при этом  $z_1 + z_2 = -(z_3 + z_4)$ . Векторы  $z_1 + z_2$  и  $-(z_3 + z_4)$  совпадают по модулю и по направлению лишь в случае, когда, например,  $z_3 = \bar{z}_1$ ,  $z_4 = \bar{z}_2$  или  $z_1 = z_2, z_3 = z_4$ . В первом случае точки  $z_1, z_2, z_3, z_4$  — вершины прямоугольника. ▶

**32.** Найти вершины правильного  $n$ -угольника, если его центр находится в начале координат, а одна из вершин  $z_1$  известна.

◀ Известно, что значения  $\sqrt[n]{z}$  лежат на окружности радиуса  $|z|$  и являются вершинами правильного  $n$ -угольника. Поэтому

$$z_{k+1} = |z_1| e^{i(\arg z_1 + \frac{2k\pi}{n})} = |z_1| e^{i \arg z_1} e^{i \frac{2k\pi}{n}} = z_1 e^{i \frac{2k\pi}{n}},$$

$$k = 0, n-1. \quad \blacktriangleright$$

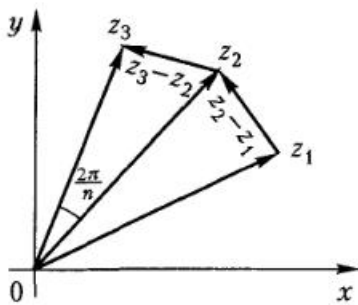


Рис. 22

**33.** Точки  $z_1$  и  $z_2$  — смежные вершины правильного  $n$ -угольника. Найти вершину  $z_3$ , смежную с  $z_2$  ( $z_3 \neq z_1$ ).

◀ На рис. 22 видно, что  $z_3 - z_2 = (z_2 - z_1)e^{i \frac{2\pi}{n}}$ . Следовательно,  $z_3 = z_2 + (z_2 - z_1)e^{i \frac{2\pi}{n}}$ . Если вершины занумерованы в обратном порядке, то  $z_3 = z_2 + (z_2 - z_1)e^{-i \frac{2\pi}{n}}$ . ▶

**34.** Даны три вершины параллелограмма  $z_1, z_2, z_3$ . Найти четвертую вершину  $z_4$ , противоположную вершине  $z_2$ .

◀ Рассмотрим рис. 23. Поскольку векторы  $z_4 - z_1$  и  $z_3 - z_2$  коллинеарны, и их модули равны, то  $z_4 - z_1 = z_3 - z_2$ ,  $z_4 = z_1 + z_3 - z_2$ . ▶

**35.** При каком условии три попарно не совпадающие точки  $z_1, z_2, z_3$  лежат на одной прямой?

◀ Если эти точки лежат на одной прямой, то аргументы чисел  $z_3 - z_1$  и  $z_2 - z_1$  либо равны, либо отличаются на  $\pi$ . Поэтому отношение  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$  является действительным числом. Полученное условие является необходимым. Докажем его достаточность. Пусть  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\operatorname{Im} \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = 0$ , что равносильно соотношению  $\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$ . Уравнение прямой, проходящей через точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , имеет вид  $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ . Точка  $(x_3, y_3)$  лежит на этой прямой. ▶

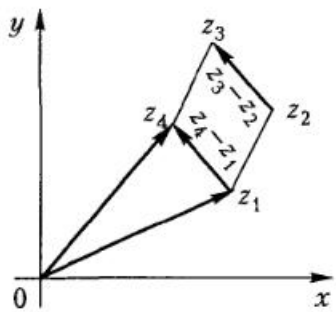


Рис. 23

**36.** Выяснить геометрический смысл указанных соотношений

- а)  $|z - 2| + |z + 2| = 5$ ; б)  $|z - 2| - |z + 2| > 3$ ; в)  $\operatorname{Re} z \geq c$ ; г)  $\operatorname{Im} z < c$ .

◀ а) Равенство определяет геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек  $F_1 = -2$  и  $F_2 = 2$  есть постоянное число 5. Из аналитической геометрии известно, что это по определению эллипс, большая полуось которого равна  $\frac{5}{2}$ . Фокусы эллипса — точки  $-2$  и  $2$ .

б) Геометрическое место точек на плоскости  $\mathbb{C}$ , удовлетворяющих условию  $||z - 2| - |z + 2|| = 3$ , является гиперболой, первая полуось которой равна  $\frac{3}{2}$ . Равенство  $|z - 2| - |z + 2| = 3$  определяет левую ветвь гиперболы, а неравенство  $|z - 2| - |z + 2| > 3$  — ее внутренность.

в) Неравенство имеет вид  $x \geq c$ . Это множество точек, в которое входят прямая  $x = c$  и полуплоскость, расположенная справа от нее.

г) Поскольку  $\operatorname{Im} z = y$ , то, записав данное неравенство в виде  $y < c$ , приходим к выводу, что ему удовлетворяют все точки полуплоскости, расположенной снизу от прямой  $y = c$ . ▶

## 37. Выяснить геометрический смысл неравенств

$$а) \alpha < \arg z < \beta; \quad б) \alpha < \arg(z - z_0) < \beta \quad (-\pi < \alpha < \beta \leq \pi).$$

◀ а) Уравнение  $\arg z = \alpha$  задает луч, наклоненный к действительной оси под углом  $\alpha$ . Неравенства  $\alpha < \arg z < \beta$  задают бесконечный сектор, заключенный между лучами  $\arg z = \alpha$  и  $\arg z = \beta$ , причем сами лучи исключаются.

б) Перенесем начало координат в точку  $z_0$ , полагая  $z - z_0 = w$ . Неравенства  $\alpha < \arg w < \beta$  задают внутренность такого же сектора с вершиной в точке  $z_0$ . ►

## 38. Выяснить геометрический смысл следующих соотношений.

$$\begin{aligned} а) |z| = \operatorname{Re} z + 1; & \quad б) \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1; \\ в) \operatorname{Im} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0, \operatorname{Re} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0; & \quad г) |z - 1| \geq 2|z - i|; \\ д) |z| < \varphi, \varphi \in \operatorname{Arg} z, 0 \leq \varphi < 2\pi; & \quad е) |z| < \varphi, \varphi \in \operatorname{Arg} z, 0 < \varphi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

◀ а) Пусть  $z = x + iy$ , тогда  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\operatorname{Re} z + 1 = x + 1$  и исследуемое равенство принимает вид  $\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1$ . После возведения в квадрат обеих частей последнего равенства получим  $y^2 = 2x + 1$ . Это уравнение параболы с вершиной в точке  $(-\frac{1}{2}, 0)$ , для которой луч  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq -\frac{1}{2}, y = 0\}$  является осью симметрии.

б) Неравенство запишем в виде  $x + y < 1$ . Множество точек плоскости  $\mathbb{C}$ , удовлетворяющих этому неравенству — полуплоскость, ограниченная прямой, уравнение которой  $x + y = 1$ . Начало координат принадлежит этой полуплоскости.

в) Поскольку  $\frac{z - z_1}{z - z_2} = \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $\varphi \in \operatorname{Arg} \frac{z - z_1}{z - z_2}$ ,  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ,  $\varphi_1 \in \operatorname{Arg}(z - z_1)$ ,  $\varphi_2 \in \operatorname{Arg}(z - z_2)$ , то в первом случае имеем  $\sin \varphi = 0$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2 = k\pi$ , а во втором —  $\cos \varphi = 0$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ . В первом случае векторы  $z - z_1$  и  $z - z_2$  лежат на прямой, проходящей через точки  $z_1$  и  $z_2$  (исключая последнюю), во втором случае угол между этими векторами с точностью до кратного  $2\pi$  равен  $\pm \frac{\pi}{2}$ . Поэтому множество  $\operatorname{Re} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0$  является окружностью, диаметром которой служит отрезок, соединяющий точки  $z_1$  и  $z_2$  (при этом из окружности удалена точка  $z_2$ ).

г) Пусть  $z = x + iy$ . Тогда  $|x - 1 + iy| \geq 2|x + i(y - 1)|$ , т. е.  $\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \geq 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$ . Возведя обе части полученного неравенства в квадрат, после несложных преобразований находим:

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 \leq \frac{8}{9}.$$

Множество точек плоскости  $\mathbb{C}$ , определяемое этим неравенством, есть замкнутый круг радиуса  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  с центром в точке  $z_0 = -\frac{1}{3} + i\frac{4}{3}$ .

д) Пусть  $|z| = r$ . Кривая, уравнение которой  $r = \varphi$ , называется *спиралью Архимеда*. Поскольку  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , то речь идет об одном витке этой спирали. Данному неравенству  $r < \varphi$  удовлетворяет множество внутренних точек плоскости  $\mathbb{C}$ , ограниченное сегментом  $0 \leq x \leq 2\pi$  действительной оси и одним витком спирали Архимеда.

е) Неравенство определяет множество из предыдущего примера, дополненное интервалом  $(0, 2\pi)$  действительной оси. ►

39. Определить семейства линий в плоскости  $\mathbb{C}$ , заданных уравнениями:

$$\begin{aligned} а) \operatorname{Re} \frac{1}{z} = c, \operatorname{Im} \frac{1}{z} = c \quad (-\infty < c < +\infty); & \quad б) \operatorname{Re} z^2 = c, \operatorname{Im} z^2 = c \quad (-\infty < c < +\infty); \\ в) \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \lambda \quad (\lambda > 0); & \quad г) \arg \frac{z - z_1}{z - z_2} = \alpha \quad (-\pi < \alpha \leq \pi). \end{aligned}$$

◀ а)  $\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \operatorname{Re} \frac{1}{z} - i \operatorname{Im} \frac{1}{z}$ . Равенство  $\frac{x}{x^2 + y^2} = c$  определяет семейство окружностей  $(x - \frac{c}{2})^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}$ , где  $c_1 = \frac{1}{c}$ ,  $c \neq 0$ , касающихся в начале координат

мнимой оси. Если  $c = 0$ , то  $x = 0$ , т.е. семейство включает в себя и мнимую ось. Равенство  $-\frac{y}{x^2+y^2} = c$  определяет семейство окружностей  $x^2 + (y + \frac{c_1}{2})^2 = \frac{c_1^2}{4}$ , где  $c_1 = \frac{1}{c}$ ,  $c \neq 0$ , касающихся действительной оси в начале координат, и включает в себя также действительную ось, поскольку при  $c = 0$   $y = 0$ .

б) Пусть  $z = x + iy$ , тогда  $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ ,  $\operatorname{Re} z^2 = x^2 - y^2$ ,  $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$ . Если  $c \neq 0$ , то уравнения  $x^2 - y^2 = c$  и  $2xy = c$  определяют семейства гипербол. Если  $c = 0$ , то уравнение  $x^2 - y^2 = 0$  определяет пару прямых  $y = x$  и  $y = -x$ , а уравнение  $xy = 0$  — пару прямых  $x = 0$  и  $y = 0$ .

в) Пусть  $z = x + iy$ ,  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ . Тогда равенство  $\left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| = \lambda$  ( $\lambda > 0$ ) равносильно такому:  $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = \lambda^2 ((x-x_2)^2 + (y-y_2)^2)$ . Каждая кривая — окружность, являющаяся геометрическим местом точек, отношение расстояний которых от точек  $z_1$  и  $z_2$  постоянно (окружность Аполлония относительно точек  $z_1$  и  $z_2$ ).

г) Поскольку  $\arg \frac{z-z_1}{z-z_2} = \arg(z-z_1) - \arg(z-z_2) = \alpha$ ,  $-\pi < \alpha \leq \pi$ , то это равенство определяет семейство дуг окружностей с концами в точках  $z_1$  и  $z_2$  (угол между векторами  $z-z_1$  и  $z-z_2$  равен  $\alpha$ ). В это семейство входит конечный отрезок с концами в точках  $z_1$  и  $z_2$  (при  $\alpha = \pm\pi$ ) и бесконечный отрезок, содержащий бесконечно удаленную точку (при  $\alpha = 0$ ). ►

**40.** Какие необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнение  $z^2 + 2az + b = 0$  с комплексными коэффициентами  $a$  и  $b$  имело: 1) действительные корни; 2) чисто мнимые корни; 3) комплекснозначные корни.

◀ 1) Необходимость. Пусть  $z_1$  и  $z_2$  — действительные корни. Тогда по теореме Виета

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= -2a, & z_1 z_2 &= b, & a \in \mathbb{R}, & b \in \mathbb{R}, \\ 4a^2 &= z_1^2 + z_2^2 + 2b \geq 2\sqrt{(z_1 z_2)^2} + 2b \geq 4b, & a^2 &\geq b. \end{aligned}$$

Достаточность. Пусть  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  и  $a^2 \geq b$ . Тогда из формулы для нахождения корней  $z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$  следует, что  $z_1$  и  $z_2$  — действительные числа.

2) Необходимость. Пусть  $z_1$  и  $z_2$  — чисто мнимые. Тогда из формул Виета следует, что  $a$  — чисто мнимое,  $b$  — действительное. Поэтому  $4a^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2b \leq -2|b| + 2b \leq 4b$ , откуда  $b \geq a^2$ .

Достаточность. Если  $b \geq a^2$  и  $a$  — чисто мнимое число, то из формулы для нахождения корней уравнения следует, что оба они чисто мнимые.

3) Уравнение второго порядка всегда имеет два комплексных корня. ►

**41.** При каких значениях  $a$  корни уравнения  $z^3 + 12(1 + i\sqrt{3})z + a = 0$  лежат на одной прямой?

◀ Пусть корни этого уравнения  $z_1, z_2, z_3$  лежат на одной прямой. Тогда  $z_1 - z_3 = k(z_2 - z_3)$ ,  $k = \text{const}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . По теореме Виета  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ , откуда  $z_1 = -z_2 - z_3$ . Подставив  $z_1$  в равенство  $z_1 - z_3 = k(z_2 - z_3)$ , получим  $\frac{z_2}{z_3} = \frac{k+1}{k+2} = k_1$ ,  $k_1 \in \mathbb{R}$ . Следовательно,  $\operatorname{Im} \frac{z_2}{z_3} = 0$ , откуда  $x_1 y_2 - x_2 y_3 = 0$ ,  $y_3 = \frac{y_2}{x_2} x_3$ . Взяв вместо точки  $(x_3, y_3)$  любую точку  $(x, y)$  на прямой, получим прямую  $y = \alpha x$ ,  $\alpha = \frac{y_2}{x_2}$ , проходящую через начало координат. Поэтому имеем

$$z_1 = x_1 e^{i\theta}, \quad z_2 = x_2 e^{i\theta}, \quad z_3 = x_3 e^{i\theta},$$

где  $x_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ). По формулам Виета получаем  $p = 0$ ,  $q e^{i2\theta} = 24e^{i\frac{\pi}{3}}$ ,  $r e^{i3\theta} = a$ , где  $p = -(x_1 + x_2 + x_3)$ ,  $q = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$ ,  $r = -x_1 x_2 x_3$ . Поскольку  $x_j$  — действительные числа, то уравнение

$$x^3 + p x^2 + q x + r = x^3 + q x + r = 0$$

имеет три действительных корня. Из формул Кардано следует, что коэффициенты  $q$  и  $r$  должны удовлетворять условию

$$\left(\frac{q}{3}\right)^3 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \leq 0. \quad (1)$$

Отсюда заключаем, что  $q \leq 0$ . Из второй формулы Виета имеем  $q = -24$ ,  $e^{i2\theta} = -e^{i\frac{\pi}{3}}$ . Поскольку  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , то  $e^{i2\theta} = (-1)e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i(-\pi + \frac{\pi}{3})} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ ,  $3\theta = -\pi$ .

Согласно третьей формуле Виета  $r = -a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Из неравенства (1) при  $q = -24$ ,  $r = -a$  получаем, что  $a^2 \leq 2^{11}$ , т. е.  $|a| \leq 32\sqrt{2}$ . ►

**42.** Найти все корни уравнения  $(z+a)^n = z^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Доказать, что если  $a$  — действительное число, то все корни  $z_k$  лежат на прямой, параллельной мнимой оси.

◀ Уравнение эквивалентно при  $z \neq 0$  уравнению  $t^n = 1$ , где  $t = \frac{z+a}{z}$ . Следовательно,  $t_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$  ( $k = \overline{0, n-1}$ ). При  $k = 0$   $t_0 = 1$ , что невозможно, поскольку  $z+a \neq z$ , если  $a \neq 0$ . Переходя от  $t$  к  $z$ , получим

$$\begin{aligned} z_k &= -a \frac{1}{1-t_k} = -a \frac{1}{1-e^{i \frac{2k\pi}{n}}} = -a \frac{1 - (\cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n})}{2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{n}} = -\frac{a(1 - \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n})}{2(1 - \cos \frac{2k\pi}{n})} = \\ &= -\frac{a}{2} \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n}}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}} = -\frac{a}{2} \left( 1 + i \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n} \right) \quad (k = \overline{1, n-1}) \end{aligned}$$

Если  $a \in \mathbb{R}$ , то  $\operatorname{Re} z_k = -\frac{a}{2}$ , т. е. все корни лежат на прямой, параллельной мнимой оси. ►

**43.** Каковы на сфере Римана образы точек: 1)  $z = 1$ ; 2)  $z = -1$ ; 3)  $z = i$ ; 4)  $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ .

◀ Воспользуемся формулами (3), п. 1.3:  $\xi = \frac{\pi}{1+|z|^2}$ ,  $\eta = \frac{y}{1+|z|^2}$ ,  $\zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$ . В примере речь идет об образах точек  $z_1 = (1, 0)$ ,  $z_2 = (-1, 0)$ ,  $z_3 = (0, 1)$ ,  $z_4 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ . Обозначив образы точек  $z_i$  соответственно через  $Z_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ), получим:

$$Z_1 = \left( \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right), \quad Z_2 = \left( -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right), \quad Z_3 = \left( 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad Z_4 = \left( \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2} \right).$$

Все четыре точки лежат на экваторе, долготы их соответственно равны  $0, \pi, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}$ . ►

**44.** Найти на сфере Римана образы: а) лучей  $\arg z = \alpha$ ; б) окружностей  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ .

◀ а) Если точка  $z \in \mathbb{C}$  принадлежит лучу  $\arg z = \alpha$ , то соответствующая ей точка  $Z = (\xi, \eta, \zeta)$  имеет свойство: главным значением  $\arg(\xi + i\eta)$  является  $\alpha$ . Поэтому точка  $Z$  принадлежит полуэллипсу, отвечающему углу  $\alpha$ . Справедливо и обратное. Следовательно, образом луча  $\arg z = \alpha$  при стереографической проекции является полумеридиан, отвечающий углу  $\alpha$ , исключая северный и южный полюсы.

б) Пусть  $z \in \mathbb{C}$  и  $|z| = r$ . Тогда для соответствующей точки  $Z \in S$ ,  $Z = (\xi, \eta, \zeta)$ , по формулам (3), п. 1.3, получаем, что  $\zeta = \frac{r^2}{1+r^2}$ . Поэтому все точки  $Z$  лежат на окружности, вырезаемой из сферы  $S$  плоскостью, уравнение которой  $\zeta = \frac{r^2}{1+r^2}$ . Справедливо и обратное утверждение: из тех же формул (3) следует, что если  $\zeta = \frac{r^2}{1+r^2}$ , то для соответствующего  $z$  имеем  $|z| = r$ . Следовательно, образом окружности  $\gamma$  при стереографической проекции является окружность сферы  $S$ , лежащая в плоскости  $\zeta = \frac{r^2}{1+r^2}$ . ►

**45.** Найти на плоскости  $\mathbb{C}$  образ параллели с широтой  $\varphi$  ( $-\pi/2 \leq \varphi < \pi/2$ ) при стереографической проекции. Чему соответствуют южный и северный полюсы?

◀ Пусть точки  $(\xi, \eta, \zeta) \in S$  имеют широту  $\varphi$ . Тогда  $\zeta = \frac{1}{2} + \frac{\sin \varphi}{2}$ . Поэтому из формул (3), п. 1.3, находим

$$|z|^2 = \frac{\zeta}{1-\zeta} = \frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi}, \quad |z| = \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Каждой точке параллели широты  $\varphi$  соответствует точка плоскости  $\mathbb{C}$ , находящаяся на окружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \operatorname{tg}(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4})\}$ . Обратное утверждение также справедливо. Южный полюс, т. е. точка широты  $\varphi = -\pi/2$ , соответствует точке  $|z| = 0$ . Точки, отвечающей северному полюсу, в плоскости  $\mathbb{C}$  нет. ►

**46.** Что соответствует на сфере Римана семейству параллельных прямых на плоскости  $\mathbb{C}$  при стереографической проекции?

◀ Рассмотрим семейство параллельных прямых плоскости  $\mathbb{C}$ , пересекающих ось  $Oy$ . Пусть прямая этого семейства проходит через начало координат и наклонена к оси  $Ox$  под углом  $\alpha$ .

Тогда из задачи 44 следует, что ей соответствует меридиан (за исключением северного полюса) с долготой  $\alpha$ .

Пусть  $y = kx + b$ ,  $k = \operatorname{tg} \alpha$  — любая другая прямая этого семейства. Тогда, если точка  $Z = (\xi, \eta, \zeta) \in S$  соответствует точке  $z = x + iy$ , по формулам (3), п. 1.3, получаем

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{kx + b}{1 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}.$$

Отсюда  $\eta = k\xi + \frac{b}{1 + |z|^2} = k\xi + b(1 - \zeta)$ . Поэтому координаты  $\xi, \eta, \zeta$  точки  $Z$  удовлетворяют уравнениям

$$k\xi - \eta - b\zeta = -b \quad \text{и} \quad \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, точка  $Z$  принадлежит окружности, определяемой двумя последними уравнениями. Так как точка  $(0, 0, 1)$  удовлетворяет этим уравнениям, то все такие окружности проходят через северный полюс.

Таким образом, всякому семейству параллельных прямых на плоскости  $\mathbb{C}$  отвечает на  $S$  семейство окружностей, каждая из которых проходит через северный полюс. ►

**47.** Доказать, что при стереографической проекции окружности, расположенные на сфере, проектируются в окружности или в прямые на плоскости. Какие окружности на сфере соответствуют прямым на плоскости?

◀ Рассмотрим на сфере Римана окружность

$$\begin{cases} A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0, \\ \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \end{cases}$$

где  $A, B, C, D$  — некоторые действительные числа. Найдем образ этой окружности при стереографической проекции сферы  $S$  на плоскость  $\mathbb{C}$ .

Пусть точка  $(0, 0, 1)$  принадлежит данной окружности. Тогда  $D + C = 0$  и уравнение плоскости, в которой лежит заданная окружность, примет вид  $A\xi + B\eta = C(1 - \zeta)$ . Принимая во внимание формулы (2) и (3), п. 1.3, получаем в плоскости  $\mathbb{C}$  прямую  $Ax + By = C$ , которая и есть образ данной окружности.

Из формул (3), п. 1.3, получаем, что  $\xi = (1 - \zeta)x$ ,  $\eta = (1 - \zeta)y$ . Поэтому из уравнения плоскости  $A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0$  следует, что  $\zeta = 1 + \frac{D+C}{Ax+By-C}$ . Тогда, подставляя выражения  $\xi, \eta, \zeta$  через  $x$  и  $y$  в уравнение сферы, получаем уравнение кривой в плоскости  $\mathbb{C}$ :

$$(D + C)(x^2 + y^2) + Ax + By = -D.$$

Если  $C + D \neq 0$  (т. е. заданная на сфере Римана окружность не проходит через северный полюс), то эта кривая является окружностью на плоскости  $\mathbb{C}$ , а если  $C + D = 0$  (т. е. окружность на сфере проходит через северный полюс), то она переходит в прямую на плоскости  $\mathbb{C}$ . ►

## § 2. Топология комплексной плоскости.

### Последовательности комплексных чисел.

### Свойства функций,

### непрерывных на компакте

#### 2.1. Топология комплексной плоскости.

В пункте 1.2 показано, что упорядоченная четверка  $E = (\mathbb{C}, +, \cdot, |\cdot|)$  является нормированным векторным пространством над полем  $\mathbb{R}$ . Поэтому упорядоченная пара  $(\mathbb{C}, \rho)$ , где  $\forall(z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}) \quad \rho(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ , есть метрическое пространство. В множестве  $\bar{\mathbb{C}}$  введем рассмотрение так называемую *сферическую метрику*  $\bar{\rho}$ .



Пусть  $Z_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ ,  $Z_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  — сферические изображения точек  $z_1 \in \overline{\mathbb{C}}$ ,  $z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ . Хордальным расстоянием  $k(Z_1, Z_2)$  между точками  $Z_1$  и  $Z_2$  называется евклидова норма вектора  $(\xi_2 - \xi_1, \eta_2 - \eta_1, \zeta_2 - \zeta_1)$ , т. е.  $k(Z_1, Z_2) = \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2}$ . Полагаем

$$\forall (z_1 \in \overline{\mathbb{C}}, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}) \quad \tilde{\rho}(z_1, z_2) \stackrel{\text{def}}{=} k(Z_1, Z_2). \quad (1)$$

Согласно основным формулам стереографической проекции имеем

$$\xi_1 = \frac{x_1}{1 + |z_1|^2}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{1 + |z_2|^2}, \quad \eta_1 = \frac{y_1}{1 + |z_1|^2}, \quad \eta_2 = \frac{y_2}{1 + |z_2|^2}, \quad \zeta_1 = \frac{|z_1|^2}{1 + |z_1|^2}, \quad \zeta_2 = \frac{|z_2|^2}{1 + |z_2|^2}.$$

Следовательно, если  $z_1 \in \mathbb{C}$ ,  $z_2 \in \mathbb{C}$ , то

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}^2(z_1, z_2) &= \left( \frac{x_2}{1 + |z_2|^2} - \frac{x_1}{1 + |z_1|^2} \right)^2 + \left( \frac{y_2}{1 + |z_2|^2} - \frac{y_1}{1 + |z_1|^2} \right)^2 + \left( \frac{|z_2|^2}{1 + |z_2|^2} - \frac{|z_1|^2}{1 + |z_1|^2} \right)^2 = \\ &= \frac{|z_1|^2}{1 + |z_1|^2} + \frac{|z_2|^2}{1 + |z_2|^2} - \frac{2(x_1 x_2 + y_1 y_2 + |z_1|^2 |z_2|^2)}{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)} = \frac{|z_2 - z_1|^2}{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}, \\ \tilde{\rho}(z_1, z_2) &= \frac{|z_2 - z_1|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}. \end{aligned}$$

Если  $z \in \mathbb{C}$ , то  $\tilde{\rho}(z, \infty) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}$ . Таким образом,

$$\forall (z_1 \in \overline{\mathbb{C}}, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}) \quad \tilde{\rho}(z_1, z_2) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{|z_2 - z_1|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}, & \text{если } z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}, \\ \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}, & \text{если } z_1 \in \mathbb{C}, z_2 = \infty. \end{cases}$$

Упорядоченная пара  $(\overline{\mathbb{C}}, \tilde{\rho})$  является метрическим пространством.

Заметим, что в множестве  $\mathbb{C}$  можно пользоваться сферической метрикой. Пусть  $A \subset \mathbb{C}$  — ограниченное множество (напомним, что согласно определению 5, л. 3.2, гл. 1, применительно к метрическому пространству  $(\mathbb{C}, \rho)$ , множество  $A$  называется *ограниченным*, если его диаметр  $d(A) = \sup_{z_1 \in A, z_2 \in A} \rho(z_1, z_2) = \sup_{z_1 \in A, z_2 \in A} |z_2 - z_1|$  конечный). Пусть  $0 < R < +\infty$  и  $\forall z \in A$   $|z| \leq R$ .

Тогда  $\forall (z_1 \in A, z_2 \in A)$  имеем

$$\frac{\rho(z_1, z_2)}{1 + R^2} \leq \tilde{\rho}(z_1, z_2) = \frac{|z_2 - z_1|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}} \leq \rho(z_1, z_2). \quad (2)$$

В рассмотренном случае метрики  $\rho$  и  $\tilde{\rho}$  эквивалентны.

Топологией в метрическом пространстве  $(X, \rho)$  называется семейство открытых множеств в нем (см. п. 6.6, гл. 1). Топология в пространствах  $(\mathbb{C}, \rho)$  и  $(\overline{\mathbb{C}}, \tilde{\rho})$  осуществляется путем введения в рассмотренные семейства окрестностей.

Пусть  $\varepsilon > 0$  и  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Согласно определению 1, п. 3.2, гл. 1, множество

$$O_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

называется  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $z_0$  в метрическом пространстве  $(\mathbb{C}, \rho)$ . В метрическом пространстве  $(\overline{\mathbb{C}}, \tilde{\rho})$   $\varepsilon$ -окрестностью точки  $z = \infty$  является множество

$$O_\varepsilon(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : \tilde{\rho}(z, \infty) < \varepsilon\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} < \varepsilon \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| > \sqrt{\left| \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \right|} \right\}, \quad (3)$$

т. е. множество всех точек комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , лежащих вне окружности радиуса

$$R_{\frac{1}{\varepsilon}} = \sqrt{\left| \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \right|}.$$

Согласно определению 2, п. 3.4, гл. 1, точка  $z \in A \subset \mathbb{C}$  ( $z \in A \subset \bar{\mathbb{C}}$ ) называется *внутренней*, если существует ее  $\varepsilon$ -окрестность  $O_\varepsilon(z) \subset A$ . По определению 1, п. 3.3, гл. 1, множество  $G \subset \mathbb{C}$  ( $G \subset \bar{\mathbb{C}}$ ) называется *открытым* в метрическом пространстве  $(\mathbb{C}, \rho)$  ( $(\bar{\mathbb{C}}, \bar{\rho})$ ), если оно состоит лишь из внутренних точек. Согласно теореме 1, п. 3.3, гл. 1, каждая  $\varepsilon$ -окрестность в метрическом пространстве  $(\mathbb{C}, \rho)$  ( $(\bar{\mathbb{C}}, \bar{\rho})$ ) является открытым множеством.

**Определение 1.** Совокупность всех открытых множеств в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  ( $\bar{\mathbb{C}}$ ) называется топологией  $\tau$  этой плоскости, а упорядоченная пара  $(\mathbb{C}, \tau)$  ( $(\bar{\mathbb{C}}, \tau)$ ) — топологическим пространством.

Топологическое пространство  $(\mathbb{C}, \tau)$  ( $(\bar{\mathbb{C}}, \tau)$ ) обладает свойствами:

- 1) объединение любого семейства  $(G_\mu)_{\mu \in A}$  открытых множеств  $G_\mu \subset \mathbb{C}$  ( $G_\mu \subset \bar{\mathbb{C}}$ ) и пересечение конечного семейства их являются открытыми множествами (см. теорему 2, п. 3.3, гл. 1);
- 2) пустое множество  $\emptyset$  и множество  $\mathbb{C}$  ( $\bar{\mathbb{C}}$ ) являются открытыми множествами.

Согласно определению 3, п. 3.5, гл. 1, точка  $z_0 \in \mathbb{C}$  ( $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ ) называется *точкой прикосновения* множества  $A \subset \mathbb{C}$  ( $A \subset \bar{\mathbb{C}}$ ), если любая ее  $\delta$ -окрестность  $O_\delta(z_0)$  имеет с  $A$  непустое пересечение. Точка  $z_0 \in \mathbb{C}$  ( $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ ) называется *предельной* для множества  $A \subset \mathbb{C}$  ( $A \subset \bar{\mathbb{C}}$ ), если она является точкой прикосновения множества  $A \setminus \{z_0\}$ . Из определения предельной точки множества  $A$  следует, что любая ее  $\delta$ -окрестность содержит бесконечное множество точек из  $A$  (см. теорему 4, п. 3.5, гл. 1). Из неравенств (2) следует, что если  $z \neq \infty$  — предельная точка множества  $A$  в топологическом пространстве  $(\mathbb{C}, \tau)$ , то она имеет такое же свойство в пространстве  $(\bar{\mathbb{C}}, \tau)$  и наоборот. Поэтому при определении конечных предельных точек можно пользоваться как евклидовой, так и сферической метрикой. В этом смысле метрики  $\rho$  и  $\bar{\rho}$  эквивалентны.

Очевидно, что конечное множество  $A \subset \mathbb{C}$  не имеет предельных точек.

## 2.2. Замкнутые множества, отрезок и ломаная. Связные множества.

Согласно определению 1, п. 3.5, гл. 1, множество  $F \subset \mathbb{C}$  ( $F \subset \bar{\mathbb{C}}$ ) называется *замкнутым*, если его дополнение  $\mathbb{C} \setminus F$  является открытым множеством. Замкнутое множество  $F$  содержит все свои точки прикосновения. Множество всех точек прикосновения множества  $A \subset \mathbb{C}$  ( $A \subset \bar{\mathbb{C}}$ ) называется его *замыканием* и обозначается  $\bar{A}$  (см. определение 2, п. 3.5, гл. 1). По определению 5, п. 3.5, гл. 1, точка  $z \in \mathbb{C}$  ( $z \in \bar{\mathbb{C}}$ ) называется *граничной точкой* множества  $A \subset \mathbb{C}$  ( $A \subset \bar{\mathbb{C}}$ ), если она является точкой прикосновения как  $A$ , так и  $\mathbb{C} \setminus A$ . Множество  $\partial A$  всех граничных точек множества  $A$  называется его *границей*. Оно замкнуто и может быть пустым.

Пусть  $z_1 \in \mathbb{C}$ ,  $z_2 \in \mathbb{C}$ . Множество  $\{z \in \mathbb{C} : z = tz_1 + (1-t)z_2, t \in [0, 1]\}$  называется *отрезком на плоскости  $\mathbb{C}$ , соединяющим точки  $z_1, z_2$* , и обозначается  $[z_1, z_2]$ . Точки  $z_1$  и  $z_2$  называются его концами. Отображение  $t \mapsto z(t)$ , где  $z(t) = tz_1 + (1-t)z_2 \forall t \in [0, 1]$ , называется *параметрическим представлением отрезка  $[z_1, z_2]$* . Непрерывная функция  $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  называется *ломаной (кусочно-линейной)*, если ее график на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , отождествленной с плоскостью  $\mathbb{C}$ , состоит из конечного числа отрезков.

**Определение 1.** Открытое множество  $G \subset \mathbb{C}$  ( $G \subset \bar{\mathbb{C}}$ ) называется *связным*, если любые две его точки можно соединить ломаной, все точки которой принадлежат этому множеству.

**Определение 2.** Замкнутое множество  $F \subset \bar{\mathbb{C}}$  называется *связным*, если его нельзя разбить на две части, расстояние между которыми положительно.

Понятия связности открытых и замкнутых множеств существенно отличаются.

**Определение 3.** Связное открытое множество называется *областью*.

**Определение 4.** Замыкание области называется *замкнутой областью*.

## 2.3. Последовательность комплексных чисел и ее предел.

*Последовательностью  $(z_n)$  точек метрического пространства  $(\mathbb{C}, \rho)$  называется отображение  $\mathbb{N} \xrightarrow{z} \mathbb{C}$  (см. общее определение последовательности точек в п. 1.8, гл. 1).*

Рассмотрим некоторые вопросы теории последовательностей точек метрического пространства, изложенные в § 3, гл. 1, применительно к последовательностям комплексных чисел.

**Определение 1.** Точка  $z \in \mathbb{C}$  называется *пределом последовательности  $(z_n)$*  (при этом записываем  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  или  $z_n \rightarrow z$ ), если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_\varepsilon) : \rho(z_n, z) = |z_n - z| < \varepsilon. \quad (1)$$

В этом случае последовательность называется *сходящейся*. Из определения следует, что начиная с некоторого номера  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  все члены последовательности  $(z_n)$  содержатся в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $z \in \mathbb{C}$ . Вне окрестности  $O_\varepsilon(z)$  могут находиться лишь точки  $z_1, z_2, \dots, z_{n_\varepsilon-1}$ , множество  $Z$  которых ограничено. Согласно теореме п. 3.2, гл. 1, объединение  $O_\varepsilon(z) \cup Z$  двух ограниченных множеств является ограниченным множеством. Следовательно, сходящаяся последовательность ограниченная ( $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} |z_n| \leq M$ ). Для обозначения ограниченных последовательностей  $(z_n)$  комплексных чисел будем пользоваться символом Ландау  $z_n = O(1)$ .

**Определение 2.** Последовательность  $(z_n)$  имеет пределом  $\infty$  (при этом записываем  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$  или  $z_n \rightarrow \infty$ ), если

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_\varepsilon) : \rho(z_n, \infty) < \varepsilon. \quad (2)$$

Из определения 2 следует, что, начиная с некоторого номера  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , все члены последовательности  $(z_n)$  удовлетворяют неравенству  $|z_n| > \sqrt{\left|\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right|}$  (см. п. 2.1), т. е. находятся вне круга

радиуса  $R_\varepsilon = \sqrt{\left|\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right|}$ . Условие  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$  равносильно тому, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$ .

Для несобственного комплексного числа  $\infty$  понятия действительной и мнимой частей, а также аргумента не вводятся.

Согласно теореме 1, п. 3.1, гл. 1, сходящаяся в метрическом пространстве  $(\mathbb{C}, \rho)$  последовательность  $(z_n)$  имеет единственный предел.

**Теорема 1.**  $(z_n \rightarrow z) \Leftrightarrow (\operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z) \wedge (\operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z)$ .

◀ Необходимость. Пусть  $z_n \rightarrow z$ , тогда  $\rho(z_n, z) = |z_n - z| \rightarrow 0$ , и из неравенств

$$|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \leq |z_n - z|, \quad |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \leq |z_n - z|,$$

выполняющихся  $\forall n \in \mathbb{N}$ , следуют требуемые свойства

$$\operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z.$$

Достаточность. Пусть  $\operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z$ . Тогда  $|z_n - z|^2 = (\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z)^2 \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.  $z_n \rightarrow z$ . ▶

Таким образом, сходимость последовательности  $(z_n)$  комплексных чисел равносильна сходимости двух последовательностей действительных чисел  $(\operatorname{Re} z_n)$  и  $(\operatorname{Im} z_n)$ . Это позволяет перенести всю теорию пределов последовательностей действительных чисел на последовательности комплексных чисел. В частности, из ограниченности последовательностей  $(\operatorname{Re} z_n)$  и  $(\operatorname{Im} z_n)$  немедленно следует ограниченность последовательности  $(z_n)$ . Сформулируем теоремы для последовательностей комплексных чисел, которые следуют из теорем для последовательностей действительных чисел.

**Теорема 2.** Пусть  $(z_n)$  и  $(\zeta_n)$  — сходящиеся последовательности комплексных чисел. Тогда их сумма  $(z_n + \zeta_n)$ , произведение  $(z_n \zeta_n)$  и частное  $\left(\frac{z_n}{\zeta_n}\right)$  (при условии, что  $\forall n \in \mathbb{N} \zeta_n \neq 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n \neq 0$ ) также являются сходящимися последовательностями и при этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + \zeta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \zeta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{\zeta_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n}.$$

**Теорема 3** (критерий Коши). Последовательность  $(z_n)$  сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальная, т. е.

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbb{N}) : \rho(z_{n+p}, z_n) = |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon \quad (3)$$

(см. определение фундаментальной последовательности в п. 3.1, гл. 1).

Поскольку метрическое пространство  $(\mathbb{R}, \rho)$ , где  $\rho(x, y) = |x - y| \forall (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$ , полное, то в силу теоремы 1 полным является и метрическое пространство  $(\mathbb{C}, \rho)$ , где  $\rho(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| \forall (z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C})$ .

**Теорема 4.** Пусть последовательность  $(z_n)$  сходится и  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ . Тогда любая ее подпоследовательность  $(z_{n_k})$  также сходится и  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = z$ .

**Теорема 5** (Больцано—Вейерштрасса). *Всякое бесконечное ограниченное множество  $Z \subset \mathbb{C}$  имеет хотя бы одну предельную точку в  $\mathbb{C}$ .*

◀ Пусть  $(z_n)$  — произвольная последовательность точек множества  $Z$ . Она ограничена, поскольку множество  $Z$  ограниченное. Тогда и последовательности  $(\operatorname{Re} z_n)$ ,  $(\operatorname{Im} z_n)$  ограничены. Согласно теореме Больцано—Вейерштрасса для последовательностей действительных чисел, из последовательности  $(\operatorname{Re} z_n)$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $(\operatorname{Re} z_{n_k})$ . Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_{n_k} = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим подпоследовательность  $(\operatorname{Im} z_{n_k})$ . Она ограничена, поэтому

из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $(\operatorname{Im} z_{n_{k_m}})$ . Пусть  $\lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_{n_{k_m}} = y$ ,  $y \in \mathbb{R}$ . В силу теоремы 4  $\operatorname{Re} z_{n_{k_m}} \rightarrow x$  при  $m \rightarrow \infty$ . Рассмотрим подпоследовательность  $(z_{n_{k_m}})$  последовательности  $(z_n)$ . По теореме 1  $\lim_{m \rightarrow \infty} z_{n_{k_m}} = z = x + iy$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Согласно определению 4, п. 3.5, гл. 1,  $z$  является предельной точкой множества  $Z$ . ▶

**Определение 3.** Точка  $z \in \mathbb{C}$  ( $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ) называется *частичным пределом последовательности  $(z_n)$  или ее предельной точкой*, если из нее можно выделить подпоследовательность  $(z_{n_k})$ , предел которой равен  $z$ .

Из теоремы 4 получаем следствие: если последовательность  $(z_n)$  сходится и точка  $z \in \mathbb{C}$  — ее частичный предел, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ .

Следует различать предельные точки множеств и последовательностей. Например, последовательность  $(z_n)$ , где  $z_n = (-1)^n$  имеет две предельные точки:  $z_1 = -1$  и  $z_2 = 1$ , а конечное множество  $\{-1, 1\}$  предельных точек не имеет.

## 2.4. Свойства компакта $K \subset \mathbb{C}$ .

Все необходимые определения и результаты, относящиеся к свойствам компактных множеств в метрических пространствах, изложены в § 4, гл. 1. Рассмотрим свойства компакта в метрическом пространстве  $(\mathbb{C}, \rho)$ .

**Определение 1.** Пусть  $K \subset \mathbb{C}$ . Множество  $K$  называется *компактным в себе или компактом*, если из любой последовательности  $(z_n)$  точек  $z_n \in K$  можно выбрать подпоследовательность  $(z_{n_k})$ , сходящуюся к некоторой точке  $z_0 \in K$  (см. определение 1, § 4, гл. 1).

**Теорема 1** (об ограниченности компакта). *Каждый компакт  $K \subset \mathbb{C}$  является ограниченным множеством.*

◀ Пусть, вопреки утверждению, компакт  $K$  не ограничен. Тогда существует такая последовательность  $(z_n)$ , что  $|z_n| > n$  и  $\forall n \in \mathbb{N} z_n \in K$ . Из  $(z_n)$  нельзя выбрать ограниченную подпоследовательность и, тем более, сходящуюся. Получили противоречие, источник которого в предположении, что компакт  $K$  не ограничен. ▶

Заметим, что согласно теореме Хаусдорфа компакт  $K \subset \mathbb{C}$  вполне ограничен в метрическом пространстве  $(\mathbb{C}, \rho)$ , т. е.  $\forall \varepsilon > 0$  для него имеется в  $\mathbb{C}$  конечная  $\varepsilon$ -сеть. Поскольку метрическое пространство  $(\mathbb{C}, \rho)$  полное, то по теореме Фреше каждое вполне ограниченное в нем множество компактно.

Следует также отметить, что не всякое ограниченное множество  $Z \subset \mathbb{C}$  является компактом. Например, множество  $Z = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  ограниченное, но не компактное в себе, поскольку любая подпоследовательность последовательности  $(z_n = \frac{n}{n+1})$  его точек сходится к  $1 \notin Z$ . Аналогично, если множество  $Z \subset \mathbb{C}$  имеет предельную точку  $z_0 \notin Z$ , то оно не является компактом.

**Теорема 2** (критерий компактности в себе). *Множество  $Z \subset \mathbb{C}$  является компактом тогда и только тогда, когда оно одновременно замкнуто и ограничено.*

◀ **Необходимость.** Пусть  $Z$  — компакт. Согласно теореме 1 множество  $Z$  ограничено. Допустим, что оно не замкнуто. Тогда существуют такая точка  $z_0 \notin Z$  и такая последовательность  $(z_n)$ , что  $\forall n \in \mathbb{N} z_n \in Z$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ . Любая подпоследовательность  $(z_{n_k})$  сходится к  $z_0 \notin Z$ , что противоречит определению компакта. Источник противоречия — в предположении, что множество  $Z$  не замкнуто. Следовательно,  $Z$  — замкнутое множество.

**Достаточность.** Пусть множество  $Z \subset \mathbb{C}$  замкнутое и ограниченное. В силу замкнутости оно содержит все свои точки прикосновения (см. п. 3.5, гл. 1). Рассмотрим любую последовательность  $(z_n)$  его точек. Поскольку она ограничена, то, согласно теореме Больцано—Вейерштрасса

(см. теорему 5, п. 2.3), существует подпоследовательность  $(z_{n_k})$ , сходящаяся к некоторой точке  $z \in \mathbb{C}$ . Так как множество  $Z$  замкнутое и  $\forall n \in \mathbb{N} z_n \in Z$ , то  $z \in Z$ . Согласно определению 1, множество  $Z$  компактно в себе. ►

**Теорема 3** (Бореля—Лебега). Из любого покрытия компакта  $K \subset \mathbb{C}$  бесконечным семейством  $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$  открытых подмножеств  $G_\alpha \subset \mathbb{C}$  можно выделить конечное покрытие.

◀ Утверждение является частным случаем теоремы 6, § 4, гл. 1. ►

## 2.5. Предел и непрерывность функции комплексного переменного.

Понятие отображения из одного множества в другое дано в п. 1.8, гл. 1. Предел, непрерывность, а также свойства непрерывных отображений из одного метрического пространства в другое рассмотрены в § 6, гл. 1. Будем изучать отображения  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  и  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . При этом результаты, изложенные в § 6, автоматически имеют силу в рассматриваемых случаях.

Задание комплексной функции комплексного переменного  $w = f(z)$ ,  $z \in D_f$ , равносильно заданию двух функций  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  и  $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  с областью определения  $D_f \subset \mathbb{R}^2$ . При этом функция  $u$  называется действительной частью функции  $f$ , а функция  $v$  — ее мнимой частью, т.е.  $u = \operatorname{Re} f$ ,  $v = \operatorname{Im} f$ ,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Таким образом, изучение функций  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  сводится к рассмотрению свойств двух числовых функций  $u$  и  $v$  двух независимых переменных  $x$  и  $y$ .

В теории функций комплексного переменного биективное отображение области  $G \subset \mathbb{C}$  на область  $D \subset \mathbb{C}$

$$G \xrightarrow{f} D$$

принято называть *однолистной функцией*. Это означает, что

$$(z_1 \in G, z_2 \in G \wedge z_1 \neq z_2) \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2).$$

**Определение 1.** Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  и  $z_0$  — предельная точка множества  $D_f$ . Число  $\alpha \in \mathbb{C}$  называется *частичным пределом функции  $f$  в точке  $z_0$* , если существует такая последовательность  $(z_n)$  точек множества  $D_f$ , что

$$(z_n \rightarrow z_0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} z_n \neq z_0) \wedge \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \alpha \right). \quad (1)$$

Множество всех частичных пределов функции  $f$  в точке  $z_0$  обозначим через  $E_f(z_0)$ .

**Определение 2.** Если множество  $E_f(z_0)$  содержит лишь число  $\alpha$ , то оно называется *пределом функции  $f$  в точке  $z_0$*  и обозначается символом  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .

**Определение 3.** Функция  $f$  называется *непрерывной в точке  $z_0 \in D_f$* , если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$  всякий раз, как только  $z_n \rightarrow z_0 \wedge \forall n \in \mathbb{N} z_n \in D_f$ .

Если  $z_0 \in D_f$  и является предельной точкой множества  $D_f$ , то  $f$  непрерывна в точке  $z_0$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

В изолированной точке  $z_0 \in D_f$  каждая функция  $f$  непрерывна.

Функция  $f$ , не являющаяся непрерывной в точке  $z_0 \in D_f$ , называется *разрывной* в ней.

Пусть  $z_0 \in D_f$  — предельная точка множества  $D_f$ . Она называется *точкой устранимого разрыва* для функции  $f$ , если существует  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  и  $\alpha \neq f(z_0)$ . В этом случае функция  $\varphi$ , определенная условиями

$$\varphi(z) = \begin{cases} f(z), & \text{если } z \in D_f \setminus \{z_0\}, \\ \alpha & \text{при } z = z_0, \end{cases}$$

непрерывна в точке  $z_0$ .

Иногда говорят: “функция  $f$  называется непрерывной в точке  $z_0 \in D_f$ , если ее приращение в этой точке бесконечно мало всякий раз, как только бесконечно мало приращение аргумента”. В этой формулировке под бесконечно малым приращением аргумента понимают бесконечно малую последовательность  $(\Delta z_n) = (z_n - z_0)$ ,  $z_0 \in D_f$ ,  $z_n \in D_f \forall n \in \mathbb{N}$ , а под приращением функции  $f$  подразумевают последовательность

$$(\Delta f(z_0, \Delta z_n)) = (f(z_0 + \Delta z_n) - f(z_0)) = (f(z_n) - f(z_0)).$$

## 2.6. Арифметические операции над пределами и непрерывными функциями.

**Теорема 1.** Пусть функции  $f$  и  $g$  непрерывны в точке  $z_0 \in D_f$  и  $D_g = D_f$ . Тогда непрерывны в этой точке функции  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $fg$ . Если дополнительно  $g(z_0) \neq 0$ , то функция  $\frac{f}{g}$  непрерывна в точке  $z_0$ .

◀ Пусть  $z_n \rightarrow z_0$  и  $\forall n \in \mathbb{N} z_n \in D_f = D_g$ . Тогда  $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ ,  $g(z_n) \rightarrow g(z_0)$  и, согласно теоремам о пределах последовательностей, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(z_n) \pm g(z_n)) = f(z_0) \pm g(z_0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)g(z_n) = f(z_0)g(z_0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n)}{g(z_n)} = \frac{f(z_0)}{g(z_0)}.$$

Согласно определению 3, п. 2.5, функции  $f \pm g$ ,  $fg$ ,  $\frac{f}{g}$  непрерывны в точке  $z_0$ . ▶

**Теорема 2.** Пусть  $z_0$  — предельная точка множества  $D_f \cap D_g$ . Если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \beta,$$

то

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f \pm g)(z) = \alpha \pm \beta, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (fg)(z) = \alpha\beta.$$

Если  $\beta \neq 0$ , то

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{f}{g} \right)(z) = \frac{\alpha}{\beta}.$$

◀ Пусть  $(z_n)$  — такая произвольная последовательность комплексных чисел, что  $z_n \rightarrow z_0 \wedge z_n \in D_f \cap D_g \setminus \{z_0\}$ . Тогда, согласно теоремам о пределах последовательностей, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(z_n) \pm g(z_n)) = \alpha \pm \beta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (fg)(z_n) = \alpha\beta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{f}{g} \right)(z_n) = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Согласно определению 2, п. 2.5, указанные свойства равносильны утверждению, содержащемуся в теореме. ▶

## 2.7. Предел и непрерывность композиции функций.

**Теорема 1** (о непрерывности композиции функций). Пусть функция  $f$  непрерывна в точке  $z_0 \in D_f$ , а функция  $\varphi$  непрерывна в точке  $\zeta_0 \in D_\varphi$ . Если  $\varphi(\zeta_0) = z_0$ , то композиция  $f \circ \varphi$  непрерывна в точке  $\zeta_0$ .

◀ Утверждение является частным случаем теоремы 1, п. 6.1, гл. I. ▶

Справедливо ли аналогичное утверждение для композиции функций  $f \circ \varphi$ , имеющих пределы в точках  $z_0$  и  $\zeta_0$ ? Приводимый ниже пример дает отрицательный ответ на этот вопрос. Теоремы о пределе композиции, которые будут доказаны, требуют дополнительных ограничений, накладываемых на функции  $f$  и  $\varphi$ .

**Пример.** Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , где

$$f(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z = 0, \\ 0, & \text{если } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \end{cases} \quad \varphi(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } \zeta = \frac{1}{n} \ (n \in \mathbb{N}), \\ 0, & \text{если } \zeta \notin \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}. \end{cases}$$

Тогда  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$ ,  $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \varphi(\zeta) = 0$ . Вместе с тем  $(f \circ \varphi)(\zeta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \zeta = \frac{1}{n} \ (n \in \mathbb{N}), \\ 1, & \text{если } \zeta \notin \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \end{cases}$  и  $E_{f \circ \varphi}(0) = \{0, 1\}$ , т. е.  $\lim_{\zeta \rightarrow 0} (f \circ \varphi)(\zeta)$  не существует.

**Теорема 2** (о пределе композиции функций). Пусть  $\zeta_0$  — предельная точка множества  $D_{f \circ \varphi}$ . Если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha$ ,  $\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \varphi(\zeta) = z_0$  и существует такая окрестность  $O_{\zeta_0}$  точки  $\zeta_0$ , что  $\forall \zeta \in (O_{\zeta_0} \cap D_{f \circ \varphi}) \setminus \{\zeta_0\} \varphi(\zeta) \neq z_0$ , то  $\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} (f \circ \varphi)(\zeta) = \alpha$ .

◀ Пусть  $(\zeta_n)$  — такая последовательность, что  $\zeta_n \rightarrow \zeta_0$  и  $\forall n \in \mathbb{N} \zeta_n \in D_{f \circ \varphi} \setminus \{\zeta_0\}$ . Тогда  $z_n = \varphi(\zeta_n) \rightarrow z_0 \wedge z_n \in D_f \setminus \{z_0\}$ . Поэтому  $f(z_n) = (f \circ \varphi)(\zeta_n) \rightarrow \alpha$  при  $n \rightarrow \infty$ . Согласно определению,  $\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} (f \circ \varphi)(\zeta) = \alpha$ . ▶



**Теорема 3.** Пусть  $\zeta_0$  — предельная точка множества  $D_{f \circ \varphi}$ . Если  $\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \varphi(\zeta) = z_0$  и функция  $f$  непрерывна в точке  $z_0$ , то  $\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} (f \circ \varphi)(\zeta) = f(z_0)$ .

◀ Полагаем

$$\varphi^*(\zeta) = \begin{cases} \varphi(\zeta), & \text{если } \zeta \in D_\varphi \setminus \{\zeta_0\}, \\ z_0 & \text{при } \zeta = \zeta_0. \end{cases}$$

Функция  $\varphi^*$  непрерывна в точке  $\zeta_0$ . Согласно теореме 1, функция  $f \circ \varphi^*$  непрерывна в этой точке. Поэтому

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} (f \circ \varphi)(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} (f \circ \varphi^*)(\zeta) = (f \circ \varphi^*)(\zeta_0) = f(z_0). \quad \blacktriangleright$$

## 2.8. Свойства функций, непрерывных на компакте.

**Теорема 1** (о непрерывном образе компакта). Пусть  $f: C \rightarrow C$  — непрерывная функция и  $D_f$  — компакт. Тогда множество  $E_f$  компактно в себе, т. е. непрерывный образ компакта есть компакт.

◀ Утверждение является частным случаем теоремы п. 6.1, гл. 1. ▶

**Определение.** Функция  $f: C \rightarrow C$  называется ограниченной на множестве  $D_f$ , если существует такое число  $M \in \mathbb{R}$ , что  $\forall z \in D_f \quad |f(z)| \leq M$ .

**Теорема 2** (Вейерштрасса). Пусть  $f: C \rightarrow C$  — непрерывная функция и  $D_f$  — компакт. Тогда функция  $f$  ограничена, а ее модуль достигает на множестве  $D_f$  своих наибольшего и наименьшего значений.

◀ Согласно теореме 1, множество  $E_f$  является компактом, т. е. замкнутым ограниченным множеством. По определению 5 (см. п. 3.2, гл. 1) его диаметр

$$d(E_f) = \sup_{w_1 \in E_f, w_2 \in E_f} \rho(w_1, w_2)$$

есть конечное число, т. е.  $d(E_f) \in \mathbb{R}$ . Согласно следствию из теоремы п. 3.2, гл. 1,  $\forall w_0 \in C$  множество  $E_f$  содержится в замкнутом шаре  $\overline{O}_r(w_0)$ , где  $r = \inf_{w \in E_f} \rho(w_0, w) + d(E_f)$ . Взяв  $w_0 = 0$ , полу-

чим, что множество  $E_f$  содержится в некотором замкнутом шаре конечного радиуса  $R$  с центром в начале координат. Поэтому  $\forall z \in D_f \quad |w| = |f(z)| \leq R$ , т. е. функция  $f$  ограничена. Отождествим комплексную плоскость  $C$  с плоскостью  $\mathbb{R}^2$ . Тогда непрерывная ограниченная функция  $|f|$  принимает на замкнутом ограниченном множестве  $D_f \subset \mathbb{R}^2$  свои наибольшее и наименьшее значения, согласно теореме Вейерштрасса для непрерывной функции  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Следовательно, существуют такие точки  $z_1 \in D_f$ ,  $z_2 \in D_f$ , что  $|f(z_1)| = \inf_{z \in D_f} |f(z)|$ ,  $|f(z_2)| = \sup_{z \in D_f} |f(z)|$  и

$\forall z \in D_f$  выполняются неравенства  $|f(z_1)| \leq |f(z)| \leq |f(z_2)|$ . ▶

**Замечание.** При определении непрерывной функции  $f$  в точке  $z_0$  предполагали, что  $f(z_0) \neq \infty$ . При изучении отображений множеств с помощью аналитических функций целесообразно отказаться от этого ограничения и считать функцию  $f$  непрерывной в точке  $z_0$ , где  $f(z_0) = \infty$ , если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ . В этом

случае функцию  $f$  называют *обобщенно-непрерывной*. Например, функция  $\overline{C} \xrightarrow{f} \overline{C}$ , где

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{если } z \in \overline{C} \setminus \{0, \infty\}, \\ 0 & \text{при } z = \infty, \\ \infty & \text{при } z = 0, \end{cases}$$

обобщенно-непрерывная в плоскости  $\overline{C}$ . Для нее  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0 = f(\infty)$ ,  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty = f(0)$ .

## § 3. Непрерывные и гладкие кривые. Односвязные и многосвязные области

В курсе математического анализа рассматривается понятие *производной вектор-функции*  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D_f = [a, b]$ , где  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  — упорядоченный набор функций  $f_j$  ( $j = 1, m$ ).

Вектор-функция  $f$  дифференцируема на сегменте  $[a, b]$  тогда и только тогда, когда на нем дифференцируемы функции  $f_j$ , и при этом  $\forall t \in [a, b]$   $f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_m(t))$  (в точках  $a$  и  $b$  речь идет об односторонних производных). Отображение  $[a, b] \xrightarrow{\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2} \mathbb{C}$  можно рассматривать как вектор-функцию  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \subset \mathbb{R}^2$ . Тогда, если функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  дифференцируемы на сегменте  $[a, b]$ , функция  $\varphi$  также дифференцируема и  $\forall t \in [a, b]$   $\varphi'(t) = \varphi'_1(t) + i\varphi'_2(t) = (\varphi'_1(t), \varphi'_2(t))$ .

**Определение 1.** Множество  $\gamma \subset \mathbb{C}$  (или  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ ) называется непрерывной кривой (траекторией), если существует непрерывное отображение  $[a, b] \xrightarrow[\text{на}]{\varphi} \gamma$ . При этом отображение  $\varphi$  называется параметрическим представлением кривой  $\gamma$ .

Из курса математического анализа известно, что отображение  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  непрерывно тогда и только тогда, когда функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  непрерывны. Для каждой непрерывной кривой  $\gamma$  фиксируется одно из двух взаимно противоположных направлений движения подвижной точки  $t \in [a, b]$ , соответствующее возрастанию или убыванию параметра. В первом случае  $\varphi(a)$  есть начало,  $\varphi(b)$  — конец кривой, а во втором случае эти точки меняются местами. Кривая, начальная и конечная точки которой совпадают, называется замкнутой. Если  $\gamma \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$  ( $\gamma \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ ), то говорят, что кривая  $\gamma$  лежит в множестве  $\mathbb{Z}$  или содержится в нем.

Если одна и та же точка кривой  $\gamma$  соответствует двум или более различным значениям параметра, из которых по крайней мере одно отлично от  $a$  и от  $b$ , то такая точка называется кратной. Непрерывная кривая, не имеющая кратных точек, называется жордановой или простой. Другими словами, кривая  $\gamma \subset \mathbb{C}$  называется жордановой, если ее параметрическое представление  $\varphi$  является биективным отображением. Если  $\varphi(a) = \varphi(b)$ , то жорданова кривая называется замкнутой.

Пусть  $\varphi$  и  $\psi$  — параметрические представления непрерывной кривой  $\gamma$ ,  $D_\varphi = [a, b]$ ,  $D_\psi = [a_1, b_1]$ . Они называются эквивалентными, если существует такая непрерывная возрастающая функция  $[a, b] \xrightarrow[\text{на}]{\eta} [a_1, b_1]$ , что  $\varphi = \psi \circ \eta$ . В этом случае записываем  $\varphi \sim \psi$ .

**Определение 2.** Множество  $\gamma \subset \mathbb{C}$  (или  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ ) называется простой гладкой кривой (траекторией), если существует непрерывно дифференцируемое отображение  $[a, b] \xrightarrow[\text{на}]{\varphi} \gamma$  с отличной от нуля производной. При этом отображение  $\varphi$  называется параметрическим представлением гладкой кривой  $\gamma$ .

Если  $\psi$  — другое параметрическое представление гладкой кривой  $\gamma$ ,  $D_\psi = [a_1, b_1]$ , и существует такая непрерывно дифференцируемая функция  $[a, b] \xrightarrow[\text{на}]{\eta} [a_1, b_1]$ , что  $\forall t \in [a, b]$   $\eta'(t) > 0$  и  $\psi \circ \eta = \varphi$ , то параметрические представления  $\varphi$  и  $\psi$  называются эквивалентными.

**Определение 3.** Множество  $\gamma_{\text{ор}}$  всех эквивалентных параметрических представлений простой гладкой кривой  $\gamma$  называется ее ориентацией. Упорядоченная пара  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{ор}})$  называется ориентированной гладкой кривой  $\Gamma$ .

Очевидно, что ориентация простой гладкой кривой однозначно определяется указанием ее начальной точки. Ориентацию простой гладкой кривой  $\gamma$  с параметрическим представлением  $\varphi$  определяют также выбором одного из двух возможных направлений единичного касательного вектора  $\tau(M) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}$ , где  $M = \varphi(t) \in \gamma$ .

Все параметрические представления  $\varphi \notin \gamma_{\text{ор}}$  эквивалентны между собой. Их совокупность называется противоположной ориентацией  $\gamma_{\text{ор}}^-$ . Ориентированную кривую  $\Gamma^- = (\gamma, \gamma_{\text{ор}}^-)$  назовем противоположно ориентированной по отношению к  $\Gamma(\gamma, \gamma_{\text{ор}})$ .

Среди всех параметрических представлений  $\varphi$  ориентированной гладкой кривой  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{ор}})$  существует такое, что

$$\varphi \in \gamma_{\text{ор}}, \quad D_\varphi = [0, 1] \quad \text{и} \quad \forall t \in [a, b] \quad |\varphi'(t)| = 1,$$

где  $l = \int_a^b |\varphi'(t)| dt$  — длина кривой  $\gamma$ . Это представление единственное. Оно называется нормальным (естественным, натуральным). Нормальное параметрическое представление  $\varphi$  получаем в виде композиции  $\psi \circ \eta$ , где  $\psi \in \gamma_{\text{ор}}$ ,  $D_\psi = [a, b]$ ,  $[0, 1] \xrightarrow{\eta} [a, b]$  и  $\forall t \in [a, b]$   $\eta^{-1}(t) = \int_a^t |\psi'(\tau)| d\tau$ .

Известен следующий результат.

**Теорема 1** (Жордана). Простая замкнутая кривая  $\gamma$  разбивает всю плоскость  $\bar{\mathbb{C}}$  на две различные области  $G_1$  и  $G_2$ , общей границей которых она является. При этом одна из областей, называемая внутренностью  $\gamma$ , ограничена, а другая, называемая внешностью  $\gamma$  и содержащая бесконечно удаленную точку, не ограничена.

Например, множества  $G_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho(z_0, z) < r\}$  и  $G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho(z_0, z) > r\}$  являются соответственно внутренностью и внешностью окружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho(z_0, z) = r\}$ .

**Определение 4.** Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  — произвольная область. Если для любой замкнутой жордановой кривой  $\gamma$ , принадлежащей  $G$ , внутренность  $\gamma$  также принадлежит  $G$ , то область  $G$  называется односвязной (относительно плоскости  $\mathbb{C}$ ).

Примером односвязной области является внутренность окружности.

Внешность окружности, а также круговое кольцо — не односвязны относительно плоскости  $\mathbb{C}$ , так как для каждой из этих областей можно указать такую окружность, принадлежащую области, внутренность которой не вся принадлежит области. Для нужд теории конформных отображений понятие односвязной области обобщается.

**Определение 5.** Область  $G \subset \bar{\mathbb{C}}$  называется односвязной относительно расширенной комплексной плоскости, если для любой замкнутой жордановой кривой  $\gamma$ , принадлежащей  $G$ , внутренность  $\gamma$  или внешность  $\gamma$  также принадлежат  $G$ .

Области, не являющиеся односвязными, называются многосвязными. Например, внешность окружности, которой в расширенной плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$  принадлежит также и бесконечно удаленная точка, является односвязной относительно плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$ , хотя она не односвязна относительно плоскости  $\mathbb{C}$ . Круговое кольцо не односвязно как относительно плоскости  $\mathbb{C}$ , так и относительно плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$ .

Если  $\gamma$  — непрерывная кривая, то она является замкнутым ограниченным множеством. Действительно, поскольку параметрическое представление  $\varphi$  кривой  $\gamma$  — непрерывная функция, заданная на компакте  $[a, b]$ , то по теореме 1, п. 2.8, множество  $E_\varphi = \gamma$  является компактным в себе, т. е. замкнутым и ограниченным.

**Определение 6.** Упорядоченный набор  $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$  гладких ориентированных кривых  $\Gamma_k = (\gamma^{(k)}, \gamma_{\text{оп}}^{(k)})$  ( $k = \overline{1, n}$ ) называется кусочно-гладкой кривой, если  $\forall k \in \overline{1, n-1}$  конечная точка гладкой ориентированной кривой  $\Gamma_k$  совпадает с начальной точкой аналогичной кривой  $\Gamma_{k+1}$ .

Множество  $\gamma = \bigcup_{k=1}^n \gamma^{(k)}$  называется следом кусочно-гладкой кривой  $\Gamma$  или множеством ее точек.

Следующее утверждение имеет важное значение в приложениях.

**Теорема** (о биективных и непрерывных отображениях). Пусть  $G \subset \bar{\mathbb{C}}$  — область и  $G \xrightarrow{f} D$  — обобщенно-непрерывная функция. Тогда множество  $D$  также является областью и функция  $f^{-1}$  обобщенно-непрерывна в  $D$ . Если, сверх того, функция  $f$  определена на границе  $\partial G$ , причем является обобщенно-непрерывной на замыкании  $\bar{G}$ , то  $f$  отображает  $\partial G$  на  $\partial D$ , т. е. граница образа области  $G$  совпадает с образом границы той же области.

Обобщим понятие непрерывной кривой.

Пусть  $[a, b] \xrightarrow{\varphi} \bar{\mathbb{C}}$  — обобщенно-непрерывная функция, причем сегмент  $[a, b]$  может быть бесконечным в одну или в обе стороны. Функция  $\varphi$  называется параметрическим представлением обобщенной непрерывной кривой  $\gamma$  в расширенной комплексной плоскости. Если  $\forall t \in [a, b]$   $\varphi(t) \neq \infty$ , то обобщенная кривая не проходит через бесконечно удаленную точку. Понятия начальной и конечной точек кривой, замкнутой кривой, кратной точки, жордановой кривой распространяются на случай обобщенной непрерывной кривой.

Замкнутое связное множество называется континуумом. Континуум, не имеющий внутренних точек, называется линейным, или канторовой кривой, например, отрезок, окружность. Это другой подход к понятию кривой на плоскости. Существует и другой подход к понятию односвязной области.

Пусть  $M$  — несвязное множество,  $A$  — его связное подмножество. Назовем  $A$  максимально связным, если не существует никакого другого связного подмножества  $B \subset M$  такого, что  $A \subset B$ .

Максимально связные подмножества  $M$  называются его связными компонентами. В теории множеств доказано, что любое множество есть объединение его связных компонент в конечном

или бесконечном количестве.

Область  $G \subset \bar{\mathbb{C}}$  называется *односвязной*, если ее граница  $\partial G$  является связным множеством. Поскольку  $\partial G$  — замкнутое множество, не имеющее внутренних точек, то граница односвязной области есть линейный континуум.

Область, граница которой не является связным множеством, называется *неодносвязной*. При этом, если число связных компонент границы  $\partial G$  конечно, то оно называется *порядком связности* области  $G$ . Если же множество таких компонент бесконечно, то  $G$  называется *бесконечносвязной областью*.

Область  $G$  назовем *компактной* и обозначим  $G \in \mathbb{C}$ , если существует круг  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R < +\infty\}$ , содержащий в себе  $G$ .

Считаем, что множество  $E$  компактно принадлежит области  $G$  и записываем  $E \in G$ , если замыкание  $\bar{E}$  принадлежит  $G$ , т. е.

$$E \in G \Leftrightarrow \bar{E} \subset G.$$

Пусть  $\tau$  — топология расширенной комплексной плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$ ,  $M \subset \bar{\mathbb{C}}$  — связное подмножество,  $z \in M$ ,  $O_z$  — окрестность точки  $z$  в топологическом пространстве  $(\bar{\mathbb{C}}, \tau)$ .

**Определение 7.** Окрестностью точки  $z$  в множестве  $M$  называется множество  $O'_z = O_z \cap M$ .

Совокупность всех окрестностей  $O'_z \forall z \in M$  будем называть *относительной топологией*  $\tau'$  множества  $M$ .

В дальнейшем окажется полезным следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть  $M \subset \bar{\mathbb{C}}$  — связное множество и  $A$  — его непустое подмножество. Если  $A$  одновременно замкнуто и открыто в топологии  $\tau'$ , то  $M = A$ .

◀ Применим метод доказательства от противного. Пусть  $A' = M \setminus A \neq \emptyset$ . Рассмотрим замыкание  $\bar{A}$  в топологии  $\tau$ . Очевидно, что оно состоит из точек его замыкания  $\bar{A}'$  в топологии  $\tau'$  и некоторого множества, не принадлежащего  $M$ . Поэтому

$$\bar{A} \cap A' = \bar{A}' \cap A'.$$

Поскольку множество  $A$  замкнуто в топологии  $\tau'$ , то  $\bar{A}' = A$ . Итак,

$$\bar{A} \cap A' = A \cap A' = \emptyset.$$

Если  $A$  — открытое множество в топологии  $\tau'$ , то его дополнение  $A'$  — замкнутое в той же топологии (предельные точки множества  $A'$  не могут принадлежать  $A$  вследствие его открытости, следовательно, они принадлежат  $A'$ ). Поэтому к пересечению  $\bar{A}' \cap A$  можно применить те же рассуждения, что и к  $\bar{A} \cap A'$ , в силу чего  $\bar{A}' \cap A = \emptyset$ . Соотношения

$$M = A \cup A', \quad \bar{A} \cap A' = \emptyset, \quad \bar{A}' \cap A = \emptyset, \quad A \neq \emptyset, \quad A' \neq \emptyset$$

противоречат связности множества  $M$ . Источник противоречия — в предположении, что  $M \neq A$ . ▶

Рассмотрим примеры.

**48.** Доказать:

1) если  $z_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \rightarrow 1$ ; 2) если  $z_n \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \rightarrow e$ .

◀ 1) Оценим разность  $\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n - 1$ . Поскольку  $\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{z_n^k}{n^k}$ , то

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n - 1 \right| &= \left| \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{z_n^k}{n^k} \right| \leq \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{|z_n|^k}{n^k} = \left(1 + \frac{|z_n|}{n}\right)^n - 1 = \\ &= e^{n \ln \left(1 + \frac{|z_n|}{n}\right)} - 1 = e^{|z_n| + O\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \rightarrow 1$ .

2) Полагая  $w_n = z_n - 1$ , получаем, на основании 1), что  $\left(1 + \frac{w_n}{n}\right)^n \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Так как  $\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{w_n}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{w_n}{n+1}\right)^n$ , то  $\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \rightarrow e$ . ▶

**49.** Доказать, что последовательность  $(\arg z_n)$  может расходиться, если последовательность  $(z_n)$  сходящаяся и  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$ .

◀ Рассмотрим последовательность  $(z_n)$ , где  $z_n = -1 + i \frac{(-1)^n}{n}$ . Она сходится, и  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -1$ .

Поскольку  $z_{2k} = -1 + \frac{i}{4k^2}$ ,  $z_{2k-1} = -1 - \frac{i}{(2k-1)^2}$ , то  $\arg z_{2k} = \pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{4k^2}$ ,  $\arg z_{2k-1} = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{(2k-1)^2}$ . Так как  $\lim_{k \rightarrow \infty} \arg z_{2k} = \pi$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \arg z_{2k-1} = -\pi$ , то последовательность  $(\arg z_n)$  имеет две предельные точки, в силу чего является расходящейся.

Заметим, что и в случае  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$  последовательность  $(\arg z_n)$  может расходиться. Пусть, например,

$$z_n = \frac{e^{i\varphi_n}}{n}, \quad \text{где } \varphi_n = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{если } n = 2k, \\ \frac{\pi}{8}, & \text{если } n = 2k-1. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{2k} = \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{2k-1} = \frac{\pi}{8},$$

т. е. последовательность  $(\varphi_n)$  расходящаяся. ▶

**50.** Пусть  $\sum_{k=1}^n p_k \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $p_n > 0$ . Доказать, что если последовательность  $(z_n)$  комплексных чисел сходится к  $z$ , то и последовательность  $Z_n = \frac{p_1 z_1 + p_2 z_2 + \dots + p_n z_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$  сходится к  $z$ .

◀ Оценим  $|Z_n - z|$ . Имеем

$$|Z_n - z| = \left| \frac{p_1(z_1 - z) + p_2(z_2 - z) + \dots + p_n(z_n - z)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| \leq \frac{p_1|z_1 - z| + p_2|z_2 - z| + \dots + p_n|z_n - z|}{p_1 + p_2 + \dots + p_n},$$

т. е.

$$\rho(Z_n, z) \leq \frac{\sum_{k=1}^n p_k \rho(z_k, z)}{\sum_{k=1}^n p_k}.$$

Так как  $\sum_{k=1}^n p_k \rightarrow +\infty$ , то по теореме Штольца для последовательностей действительных чисел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n p_k \rho(z_k, z)}{\sum_{k=1}^n p_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} \rho(z_{n+1}, z)}{p_{n+1}} = 0.$$

Следовательно,  $\rho(Z_n, z) = o(1)$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = z$ . ▶

**51.** Найти предел последовательности  $(z_n)$ , где  $z_n = \sum_{k=0}^n \frac{(\pi i)^k}{k!}$ .

◀ Докажем, что последовательность  $(z_n)$  фундаментальная. Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$|z_{n+p} - z_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{(\pi i)^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\pi^k}{k!} < \varepsilon$$

при всех достаточно больших  $n$  и  $\forall p \in \mathbb{N}$ , поскольку числовой ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k}{k!}$  сходится согласно признаку Д'Аламбера, и сумма его остатка  $r_n$  стремится к нулю при возрастании  $n$ . Раньше

было показано (см. теорему 1, п. 2.3), что сходимость последовательности комплексных чисел равносильна сходимости последовательностей ее действительной и мнимой частей. Поскольку  $\operatorname{Re} z_n = 1 - \frac{\pi^2}{2!} + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\pi^n}{n!}$ , если  $n$  четное, и  $\operatorname{Re} z_n = 1 - \frac{\pi^2}{2!} + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!}$ , если  $n$  нечетное,  $\operatorname{Im} z_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \dots + (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!}$ , если  $n$  четное,  $\operatorname{Im} z_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!}$ , если  $n$  нечетное, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = \cos \pi = -1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n = \sin \pi = 0.$$

Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -1$ . ►

**52.** Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ , если  $z_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ ,  $a = \alpha + i\beta$ .

◀ Записывая  $z_n = x_n + iy_n = r_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$ , имеем

$$|z_n| = r_n = \left|1 + \frac{a}{n}\right|^n = \left(\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} = \left(1 + \frac{2\alpha}{n} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

$$\varphi_n = \arg z_n = n \arg \left(1 + \frac{a}{n}\right) = n \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta}{n} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-1}\right),$$

так как при больших значениях  $n$  точка  $z_n$  находится в правой полуплоскости  $Z = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ . При  $n \rightarrow \infty$   $1 + \frac{2\alpha}{n} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{n^2} \sim 1 + \frac{2\alpha}{n}$ ,

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{\beta}{n} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-1}\right) \sim \frac{\beta}{n} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-1}, \quad n \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta}{n} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-1}\right) \sim \beta \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right).$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \exp \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\alpha}{n} \cdot \frac{n}{2} \right) = e^\alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \beta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta) = e^{\alpha + i\beta}. \quad \blacktriangleright$$

**53.** Пусть последовательность  $(z_n)$  комплексных чисел такая, что последовательность  $(w_n)$ , где  $w_n = z_n - qz_{n-1}$ ,  $|q| < 1$ , сходится. Доказать, что последовательность  $(z_n)$  сходится, и найти ее предел.

◀ Поскольку последовательность  $(w_n)$  сходится, то она ограничена (см. п. 2.3), т.е.  $\exists C > 0$ :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |w_n| \leq C$ . Пусть  $M = \max\{|z_0|, C\}$ . Докажем, что  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|z_n| \leq \frac{M}{1 - |q|}. \quad (1)$$

Оценим  $z_1$ . Из условия примера получаем

$$z_1 = w_1 + qz_0, \quad |z_1| \leq |w_1| + |q||z_0| \leq C + |q||z_0| \leq M(1 + |q|).$$

Пусть  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 1$ , и справедливо неравенство

$$|z_k| \leq M(1 + |q| + \dots + |q|^{k-1}). \quad (2)$$

В силу высказанного предположения имеем

$$|z_{k+1}| \leq |w_{k+1}| + |q||z_k| \leq M + |q|M(1 + |q| + \dots + |q|^{k-1}) = M(1 + |q| + \dots + |q|^{k+1}) \quad (3)$$

Методом математической индукции доказано, что  $\forall n \in \mathbb{N}$  выполняется оценка

$$|z_n| \leq M \sum_{k=0}^n |q|^k = M \frac{1 - |q|^{n+1}}{1 - |q|} \leq \frac{M}{1 - |q|}.$$

Неравенство (1) установлено.

Из соотношений

$$z_n = w_n + qz_{n-1} = w_n + qw_{n-1} + q^2z_{n-2} = w_n + qw_{n-1} + q^2w_{n-2} + q^3z_{n-3} = \dots$$



имеем  $\forall (n \in \mathbb{N}, p \leq n-1)$

$$z_n = \sum_{k=0}^p w_{n-k} q^k + q^{p+1} z_{n-p-1}. \quad (4)$$

Принимая во внимание, что последовательность  $(w_n)$  сходится, и обозначая  $w = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ , получаем:

$$z_n - \frac{w}{1-q} = \sum_{k=0}^p w_{n-k} q^k + q^{p+1} z_{n-p-1} - w \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^p (w_{n-k} - w) q^k + q^{p+1} z_{n-p-1} - w \sum_{k=p+1}^{\infty} q^k. \quad (5)$$

Поскольку  $|q| < 1$  и  $|z_n| \leq \frac{M}{1-|q|}$ , то

$$|q^{p+1} z_{n-p-1}| \leq M \frac{|q|^{p+1}}{1-|q|} \rightarrow 0 \quad \text{при } p \rightarrow \infty,$$

т. е.  $q^{p+1} z_{n-p-1} = o(1)$ . Так как  $|w| \in \mathbb{R}$  и ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  сходится, то сумма его остатка  $r_p = \sum_{k=p+1}^{\infty} q^k \rightarrow 0$

при возрастании  $p$ . Следовательно,  $w \sum_{k=p+1}^{\infty} q^k = o(1)$ . Каким бы ни было фиксированное  $p \in \mathbb{N}$ ,

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon$  справедлива оценка

$$\left| \sum_{k=0}^p (w_{n-k} - w) q^k \right| \leq \sum_{k=0}^p |w_{n-k} - w| |q|^k < \varepsilon \sum_{k=0}^p |q|^k < \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} |q|^k = \varepsilon \frac{1}{1-|q|} \equiv \varepsilon_1,$$

т. е.  $\sum_{k=0}^p (w_{n-k} - w) q^k = o(1)$ , так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$ . Таким образом,

$$z_n - \frac{w}{1-q} = o(1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{w}{1-q}. \quad \blacktriangleright$$

**54.** Пусть  $a_n = a_1 + (n-1)d$ , где  $a_1 > 0$ ,  $d > 0$ , и пусть  $z_n = \prod_{k=1}^n \left( 1 + i \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a_k}} \right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Доказать:

$$1) |z_{n+1} - z_n| = \sqrt{\frac{d}{a_1}}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1} - r_n}{\varphi_{n+1} - \varphi_n} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{d}{a_1}},$$

где  $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$ ,  $r_n > 0$ ,  $0 < \varphi_{n+1} - \varphi_n < \frac{\pi}{2}$ .

◀ 1) Поскольку

$$|z_n|^2 = z_n \bar{z}_n = \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{d}{a_k} \right) = \prod_{k=1}^n \frac{a_k + d}{a_k} = \prod_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1},$$

то

$$|z_{n+1} - z_n| = |z_n| \left| 1 + i \sqrt{\frac{d}{a_{n+1}}} \right| = \sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_1}} \sqrt{\frac{d}{a_{n+1}}} = \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a_1}} = \sqrt{\frac{d}{a_1}}.$$

2) Из условий задачи следует, что

$$\varphi_n = \arg \prod_{k=1}^n \left( 1 + i \sqrt{\frac{d}{a_k}} \right) = \sum_{k=1}^n \arg \left( 1 + i \sqrt{\frac{d}{a_k}} \right) = \sum_{k=1}^n \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{d}{a_k}},$$

откуда непосредственно следует равенство

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{d}{a_{n+1}}}.$$

Поскольку  $\operatorname{arctg} x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{a_{n+1}} = 0$ , то  $\varphi_{n+1} - \varphi_n \sim \sqrt{\frac{d}{a_{n+1}}}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{r_{n+1} - r_n}{\varphi_{n+1} - \varphi_n} &= \frac{1}{\sqrt{a_1}} \frac{\sqrt{a_{n+2}} - \sqrt{a_{n+1}}}{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{d}{a_{n+1}}}} \sim \frac{\sqrt{a_{n+2}} - \sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{\frac{d}{a_{n+1}}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{a_1}} = \\ &= \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_1 d}} \left( \sqrt{1 + \frac{d}{a_{n+1}}} - 1 \right) = \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_1 d}} \left( 1 + \frac{d}{2a_{n+1}} + o\left(\frac{d}{a_{n+1}}\right) - 1 \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{d}{a_1}} + o(1), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1} - r_n}{\varphi_{n+1} - \varphi_n} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{d}{a_1}}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

55. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + i \frac{n}{n^2 - 1} \right)^n$ .

◀ Пусть  $z_n = \left( 1 + i \frac{n}{n^2 - 1} \right)^n$ , тогда

$$|z_n| = \left( 1 + \frac{n^2}{(n^2 - 1)^2} \right)^{\frac{n}{2}}, \quad \arg z_n = n \operatorname{arctg} \frac{n}{n^2 - 1}.$$

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n^2 - 1)^2} \cdot \frac{n}{2}} = 1, \quad \operatorname{arctg} \frac{n}{n^2 - 1} \sim \frac{n}{n^2 - 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{arctg} \frac{n}{n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 - 1} = 1,$$

то  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \cos 1 + i \sin 1 = e^i$ . ▶

56. Выяснить, при каких значениях комплексного параметра  $a$  сходятся последовательности  $(z_n)$  и  $(\zeta_n)$ , где  $z_n = a^n$ ,  $\zeta_n = \frac{a^n}{1 + a^n}$ .

◀ Если  $|a| < 1$ , то из равенства  $|z_n| = |a|^n$  следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$ . Если  $|a| > 1$ , то  $|z_n| \rightarrow +\infty$  и  $z_n \rightarrow \infty$ , т. е. последовательность расходящаяся.

Пусть  $|a| = 1$ , тогда  $a = e^{i\varphi}$ ,  $\varphi = \arg a$  и  $z_n = a^n = e^{in\varphi}$ . Поскольку  $|z_n| = 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$ . Последовательность  $(n\varphi)$  при  $\varphi \neq 0$  предела не имеет, а при  $\varphi = 0$   $\lim_{n \rightarrow \infty} n\varphi = 0$ . В последнем случае  $a = 1$ ,  $z_n = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$ .

Таким образом, последовательность  $(z_n)$  сходится лишь для  $|a| < 1$  и  $a = 1$ .

Для последовательности  $(\zeta_n)$  рассмотрим те же случаи значений параметра  $a$ , которые изучены выше.

Если  $|a| < 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n) = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1 + a^n} = 0$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = 0$ .

Пусть  $|a| > 1$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = 0$ . Записывая общий член последовательности  $(\zeta_n)$  в виде

$$\zeta_n = 1 - \frac{1}{1 + a^n} = 1 - \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{a^n}},$$

находим:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = 1$ .

Пусть теперь  $|a| = 1$  и  $\forall n \in \mathbb{N} \ a^n \neq -1$ . Тогда  $a = e^{i\varphi}$ ,  $\varphi = \arg a$ ,  $a^n = e^{in\varphi}$  и  $\cos n\varphi \neq -1$ . Для указанных значений  $a$  имеем

$$\zeta_n = \frac{e^{in\varphi}}{1 + e^{in\varphi}} = \frac{e^{in\varphi}(1 + e^{-in\varphi})}{(1 + e^{in\varphi})(1 + e^{-in\varphi})} = \frac{e^{in\varphi} + 1}{2(1 + \cos n\varphi)} = \frac{2\left(\cos \frac{n\varphi}{2} + i \sin \frac{n\varphi}{2} \cos \frac{n\varphi}{2}\right)}{4 \cos^2 \frac{n\varphi}{2}} = \frac{1}{2} + i \operatorname{tg} \frac{n\varphi}{2}.$$

Последовательность  $(\operatorname{tg} \frac{n\varphi}{2})$  сходится лишь при  $\varphi = 0$ , т. е.  $a = 1$ . При этом получаем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \frac{1}{2}$ . Следовательно, последовательность  $(\zeta_n)$  сходится, если  $|a| < 1$ ,  $|a| > 1$  и  $a = 1$ . ▶

57. Доказать сходимость последовательности  $(\zeta_n)$ , где

$$\zeta_n = \frac{n+1+nz+(n-1)z^2+\dots+z^n}{1+n},$$

если  $|z| \leq 1$  и  $z \neq 1$ . Найти ее предел.

◀ Рассмотрим последовательность  $(\eta_n)$ , где  $\eta_n = z\zeta_n \forall n \in \mathbb{N}$ , и образуем разность  $\eta_n - \zeta_n = \frac{z-z^{n+2}}{(1-z)(1+n)} - 1$ . Тогда  $\zeta_n = \frac{z^{n+2}-z}{(1-z)^2(1+n)} + \frac{1}{1-z}$ .

Поскольку  $|z| \leq 1$  и  $z \neq 1$ , то последовательность  $\left(\frac{z^{n+2}-z}{(1-z)^2}\right)$  ограничена и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^{n+2}-z}{(1-z)^2(1+n)} = 0$ . Поэтому последовательность  $(\zeta_n)$  сходится и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \frac{1}{1-z}. \blacktriangleright$$

58. Доказать, что все предельные точки последовательности  $(a_n)$ , где

$$a_n = \frac{1^{it} + 2^{it} + \dots + n^{it}}{n}, \quad t \in \mathbb{R},$$

принадлежат окружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\}$ .

◀ Из очевидного неравенства

$$a_n = n^{it} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{it} = e^{it \ln n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{it}$$

следует, что все предельные точки последовательности  $(e^{it \ln n})$  принадлежат окружности радиуса 1 с центром в начале координат, а

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{it} = \int_0^1 x^{it} dx = \frac{x^{1+it}}{1+it} \Big|_0^1 = \frac{1}{1+it}.$$

Поскольку  $\left|\frac{1}{1+it}\right|^2 = \frac{1}{1+t^2}$ , то все предельные точки последовательности  $(a_n)$  принадлежат окружности  $\gamma$ . Здесь воспользовались тем, что функции комплексного переменного можно интегрировать по известным правилам интегрирования функций действительного переменного: если  $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$ ,  $f_1 \in R[a, b]$ ,  $f_2 \in R[a, b]$ , то  $f \in R[a, b]$  и наоборот, т.е.  $f \in R[a, b] \Leftrightarrow f_1 \in R[a, b] \wedge f_2 \in R[a, b]$ . Если  $F$  — любая первообразная функции  $f$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Функция  $x \mapsto \frac{x^{1+it}}{1+it}$  является первообразной функции  $x \mapsto x^{it}$ . ▶

59. Пусть  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $B \subset \mathbb{C}$ , где  $A = \{z \in \mathbb{C} : z = \frac{p}{m} + i \frac{q}{n}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $B = \{z \in \mathbb{C} : |z^2 - 1| < 1\}$ . Найти предельные точки этих множеств, замыкания и границы. Установить также, будут ли эти множества открытыми, замкнутыми и областями.

◀ Точки множества  $A$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  имеют каждая обе рациональные координаты. Из анализа известно, что множество  $\mathbb{Q}$  всюду плотно в  $\mathbb{R}$ . Поэтому в каждой окрестности  $O_\delta(z)$  точки  $z \in \mathbb{C}$  имеется бесконечное множество точек из  $A$ . Поэтому  $A' = \mathbb{C}$ , где  $A'$  — множество предельных точек  $A$ . Следовательно,  $\overline{A} = \mathbb{C}$ . Отсюда следует, что множество  $A$  незамкнуто.

Поскольку множество всех иррациональных чисел также всюду плотно в  $\mathbb{R}$ , то ни одна точка множества  $A$  не является внутренней. Поэтому  $A$  не является открытым множеством, а значит не является областью.

Установлено, что  $\forall z \in \mathbb{C}$  в каждой ее  $\delta$ -окрестности  $O_\delta(z)$  есть точки множеств  $A$  и  $\mathbb{C} \setminus A$ , т.е.  $\partial A = \mathbb{C}$ .

Полагая  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ , множество  $B$  зададим в виде

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 < (x^2 - y^2)\}.$$

Перейдя к полярным координатам, получим:  $B = \{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \rho^2 < 2 \cos 2\varphi\}$ . Граница этого множества  $\partial B = \{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \rho^2 = 2 \cos 2\varphi\}$  — *лемниската Бернулли*. Поэтому множество  $B$  есть внутренность этой лемнискаты. Пусть  $(\rho_0, \varphi_0) \in B$ , тогда  $\rho_0^2 < 2 \cos 2\varphi_0$ ,  $\rho_0^2 - 2 \cos 2\varphi_0 < 0$ . Поскольку функция  $\varphi \mapsto \rho^2 - 2 \cos 2\varphi$  непрерывная, то по свойству устойчивости строгих неравенств для непрерывных функций существует окрестность  $O_\delta(\rho_0, \varphi_0) \subset B$ , в которой строгое неравенство сохраняется. Поэтому  $B$  — открытое множество. Пусть  $B = B_1 \cup B_2$ , где  $B_1$  — множество всех точек из  $B$ , принадлежащих левой полуплоскости,  $B_2$  — множество всех точек из  $B$ , принадлежащих правой полуплоскости плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Точка  $(0, 0)$  не принадлежит множеству  $B$ . Поэтому любую пару точек  $z_1$  и  $z_2$ , где  $z_1 \in B_1$ ,  $z_2 \in B_2$ , нельзя соединить ломаной, все точки которой принадлежат множеству  $B$ . Поэтому  $B$  не является областью. ►

**60.** На примерах множеств  $E_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq \frac{1}{2}\}$  и  $E_2 = \mathbb{C}$  убедиться в существенности условий теоремы Бореля—Лебега (см. теорему 3, п. 2.4).

◀ Множество  $E_1$  не замкнуто, поскольку ему не принадлежит его предельная точка  $z = 0$ . Полагая  $\forall n \in \mathbb{N} G_n = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2n+1} < |z| < \frac{1}{2n}\}$ . Семейство  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  открытых множеств  $G_n$  покрывает множество  $E_1$ . Однако, никакое конечное семейство  $(G_j)_{j \in A}$  ( $A$  — конечное множество) не покрывает множество  $E_1$ , поскольку их объединение  $\bigcup_{j \in A} G_j$  не содержит множества

$E_1^{(m)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2m+1}\}$ , где  $m \in \mathbb{N}$  — максимальный элемент множества  $A$ . Следовательно, условие замкнутости в теореме Бореля—Лебега играет существенную роль.

$E_2 = \mathbb{C}$  — замкнутое, но не ограниченное множество. Открытые множества семейства  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , где  $G_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| < n\}$ , покрывают множество  $E_2$ . Вместе с тем, никакое конечное семейство  $(G_n)_{n \in A}$  не образует покрытия комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ . Таким образом, условие ограниченности множества в условиях теоремы Бореля—Лебега является существенным. ►

**61.** Определить кривые, заданные следующими уравнениями

- 1)  $z = 1 - it$ ,  $0 \leq t \leq 2$ ;
- 2)  $z = t + it^2$ ,  $-\infty < t < +\infty$ ;
- 3)  $z = t^2 + it^4$ ,  $-\infty < t < +\infty$ ;
- 4)  $z = a(\cos t + i \sin t)$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ ,  $a > 0$ ;
- 5)  $z = t + \frac{i}{t}$ ,  $-\infty < t < 0$ ;
- 6)  $z = t + i\sqrt{1 - t^2}$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ ;
- 7)  $z = -t + i\sqrt{1 - t^2}$ ,  $-1 \leq t \leq 0$ ;
- 8)  $z = a(t + i - ie^{-it})$ ,  $-\infty < t < +\infty$ ,  $a > 0$ ;
- 9)  $z = ia + at - ibe^{-it}$ ,  $-\infty < t < +\infty$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

◀ 1) Пусть  $z = x + iy$ . Тогда  $x = 1$ ,  $y = -t$ ,  $-2 \leq y \leq 0$ . Кривая, заданная уравнением  $z = 1 - it$ ,  $0 \leq t \leq 2$ , есть отрезок  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, -2 \leq y \leq 0\}$ .

2) Если  $z = x + iy = t + it^2$ , то  $x = t$ ,  $y = t^2$ , т.е.  $y = x^2$ ,  $-\infty < x < +\infty$ . Уравнение определяет параболу с вершиной в начале координат и осью симметрии — лучом  $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ .

3) По аналогии с предыдущим  $x = t^2$ ,  $y = t^4 = x^2$ ,  $0 \leq x < +\infty$ . При изменении параметра  $t$  от  $-\infty$  до 0 подвижная точка  $(x(t), y(t))$  пробегает всю правую ветвь параболы сверху вниз, а при изменении параметра  $t$  от 0 до  $+\infty$  она пробегает ту же самую ветвь снизу вверх. Уравнение определяет две противоположно ориентированные непрерывные кривые с одним и тем же множеством точек  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z < +\infty, \operatorname{Im} z = x^2\}$ .

4) Уравнение определяет левую полуокружность, заданную параметрически:  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ .

5) Пусть  $z = x + iy$ . Тогда  $x = t$ ,  $y = \frac{1}{t} = \frac{1}{x}$ ,  $-\infty < x < 0$ . Уравнение определяет гиперболу (одну ее ветвь, лежащую в третьем квадранте плоскости  $xOy$ ).

6) Из условий примера следует, что  $y = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $|x| \leq 1$ . Уравнение определяет верхнюю полуокружность радиуса 1 с центром в точке  $z = 0$ .

7) Из условий примера следует, что  $y = \sqrt{1-x^2}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Уравнение определяет четвертую часть окружности радиуса 1 с центром в точке  $z = 0$ . Все точки кривой принадлежат первому квадранту плоскости  $xOy$ .

8) Уравнение определяет плоскую трансцендентную кривую — *циклоиду*, являющуюся траекторией точки окружности, катящейся по прямой линии без скольжения (рис. 24). Ее параметрические уравнения имеют вид  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Исключив параметр  $t$ , получим уравнение циклоиды в декартовых прямоугольных координатах

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} \sqrt{2ay - y^2}.$$

Циклоида — периодическая кривая, ее период (базис)  $OO_1 = 2\pi a$ . Точки  $O$ ,  $O_k = (2k\pi a, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , — точки возврата. Точки  $A$ ,  $A_k = ((2k+1)\pi a, 2a)$  — вершины.

9) Из уравнения находим:

$$x = a \left( t - \frac{b}{a} \sin t \right), \quad y = a \left( 1 - \frac{b}{a} \cos t \right).$$

Если  $b > a$  ( $b < a$ ), то кривая описывается точкой, лежащей вне (внутри) окружности, которая катится по прямой. В первом случае ее называют *удлиненной циклоидой* (рис. 25), а во втором — *укороченной циклоидой* (рис. 26).

Иногда их называют *трохоидой*. Параметрические уравнения трохойды записываются в виде  $x = at - d \sin t$ ,  $y = a - d \cos t$ , где  $d$  — расстояние точки  $M$  от центра катящейся окружности. ►

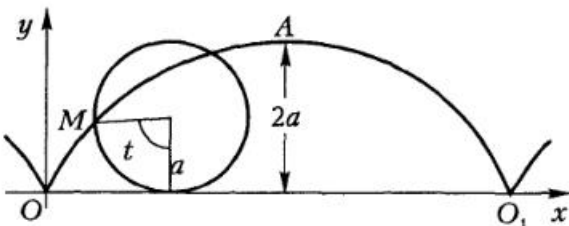


Рис. 24

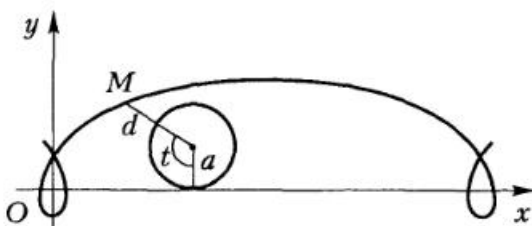


Рис. 25

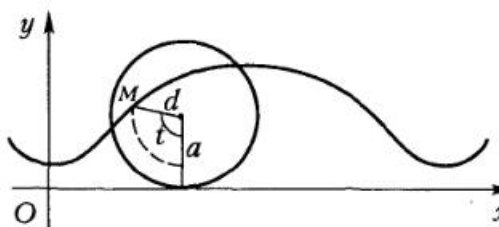


Рис. 26

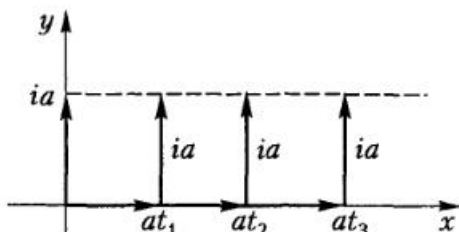


Рис. 27

62. Какая кривая определяется уравнением  $\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = \overline{\left( \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} \right)}$ ?

◀ Очевидно, что  $\operatorname{Im} \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = 0$ ,  $\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Поэтому  $z = z_2 + a(z_1 - z_2)$ . Уравнение определяет прямую, проходящую через точки  $z_1$  и  $z_2$ . ►

63. Какие кривые определяются уравнениями

1)  $z = ia + at$ ,  $a > 0$ ,  $-\infty < t < +\infty$ ;

2)  $z = -ib(\cos t - i \sin t)$ ,  $b > 0$ ,  $-\infty < t < +\infty$ ?

◀ 1) Рассматривая вектор  $z$  с началом в точке  $z = 0$ , замечаем, что его конец описывает прямую, параллельную действительной оси (рис. 27).

2) Конец вектора  $z = b(\cos t + i \sin t)$  с началом в точке  $z = 0$  описывает окружность радиуса  $b$  в положительном направлении. Вектор  $\bar{z} = b(\cos t - i \sin t)$  симметричен вектору  $z$  и, следовательно,

точка  $z_1 = -i\bar{z}$  — результат поворота вектора  $\bar{z}$  на угол  $-\frac{\pi}{2}$ , пробегает указанную окружность в направлении движения часовой стрелки. ►

**64.** Для отображения  $w = z^2$  требуется:

1) найти образы линий а)  $x = c$ , б)  $y = c$ , в)  $x = y$ , г)  $|z| = R$ , д)  $\arg z = \alpha$  и выяснить, какие из них преобразуются взаимно однозначно;

2) найти на  $z$ -плоскости прообразы линий  $u = c$ ,  $v = c$  ( $w = u + iv$ ).

◄ Пусть  $z = x + iy$ , тогда  $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ . Таким образом,  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$ .

а)  $u = C^2 - y^2$ ,  $v = 2Cy \Rightarrow y = \frac{v}{2C} \Rightarrow u = C^2 - \frac{v^2}{4C^2}$ , если  $C \neq 0$ . Это уравнение параболы. Если  $C = 0$ , то  $u = -y^2$ ,  $v = 0$ . Получили множество точек полуоси  $\gamma = \{(u, v) \in \mathbb{C} : u \leq 0, v = 0\}$ .

б)  $u = x^2 - C^2$ ,  $v = 2Cx \Rightarrow x = \frac{v}{2C} \Rightarrow u = \frac{v^2}{4C^2} - C^2$ , если  $C \neq 0$ . Линия  $y = C$  ( $C \neq 0$ ) отображается на параболу в плоскости  $w$ . Если  $C = 0$ , то  $u = x^2$ ,  $v = 0$ . Множество  $\gamma = \{(u, v) \in \mathbb{C} : u \geq 0, v = 0\}$  является положительной полуосью. В случаях а) и б) отображения взаимно однозначны, если  $C \neq 0$ .

в)  $y = x \Rightarrow u = 0$ ,  $v = 2x^2$ . Множество  $\gamma = \{(u, v) \in \mathbb{C} : u = 0, v \geq 0\}$  — положительная полуось. Отображение не взаимно однозначно, так как лучи, находящиеся в первом и третьем квадрантах, переходят в одну и ту же полуось.

г) Если  $|z| = R$ , то  $z = Re^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in \text{Arg } z$ ,  $z^2 = R^2 e^{2i\varphi}$ ,  $|w| = R^2$ . Окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $z = 0$  отображается на окружность радиуса  $R^2$  с центром в точке  $w = 0$ . Отображение не является взаимно однозначным.

д) Образом луча  $\arg z = \alpha$  является луч  $\arg w = 2\alpha$ . Отображение взаимно однозначное.

2) Пусть  $u = C$ , тогда получим при  $C \neq 0$  уравнение гиперболы  $x^2 - y^2 = C$ . При  $C = 0$  имеем пару прямых  $y = \pm x$ . Если  $v = C$ , то  $2xy = C$ . При  $C \neq 0$  получаем уравнение гиперболы  $y = \frac{C}{2x}$ , а при  $C = 0$  — пару прямых  $x = 0$  и  $y = 0$ . ►

**65.** Найти  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ , если: а)  $f(z) = \frac{z^2}{\bar{z}}$ ; б)  $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ .

◄ а) Если  $z_n = x_n + iy_n$ , то  $f(z_n) = \frac{z_n^2}{\bar{z}_n} = z_n \cdot \frac{z_n}{\bar{z}_n}$  и так как  $\left| \frac{z_n}{\bar{z}_n} \right| = 1$ , то  $|f(z_n)| = |z_n| \rightarrow 0$  при  $z_n \rightarrow 0$ . Поэтому  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{\bar{z}} = 0$ .

б) Пусть  $z_n = x_n + iy_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $f(z_n) = 1$ ,  $f(z_n) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Если  $z'_n = iy_n$ ,  $y_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $f(z'_n) = \frac{iy_n}{-iy_n} = -1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) = -1$ . Множество  $E_f(0)$  частичных пределов функции  $f$  в точке  $z = 0$  содержит больше одного элемента, поэтому  $f$  не имеет предела в этой точке. ►

**66.** Функции  $f_1(z) = \frac{\text{Re } z}{z}$ ,  $f_2(z) = \frac{z}{|z|}$ ,  $f_3(z) = \frac{\text{Re } z^2}{|z|^2}$ ,  $f_4(z) = \frac{z \text{Re } z}{|z|}$  определены на множестве  $Z = \overline{D}_\delta(0) \setminus \{0\}$ , где  $\overline{D}_\delta(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \delta; \delta > 0\}$ . Можно ли продолжить их на множество  $\overline{D}_\delta(0)$  так, чтобы эти продолжения были непрерывными в точке  $z = 0$ ?

◄ Пусть  $z_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ ,  $z'_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ . Тогда последовательности  $(z_n)$  и  $(z'_n)$  при достаточно больших  $n \in \mathbb{N}$  принадлежат множеству  $\overline{D}_\delta(0)$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = 0$ . Из равенств  $f_1(z_n) = 1$  и  $f_1(z'_n) = 0$ ,  $f_2(z_n) = 1$  и  $f_2(z'_n) = i$ ,  $f_3(z_n) = 1$  и  $f_3(z'_n) = -1$  следует, что функции  $f_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) не имеют пределов в точке  $z = 0$  и поэтому не могут быть продолжены на множество  $\overline{D}_\delta(0)$  так, чтобы полученные функции были непрерывными при  $z = 0$ . Рассмотрим функцию  $f_4$ . Пусть  $(z_n) = (x_n + iy_n)$  — произвольная последовательность точек множества  $\overline{D}_\delta(0)$ ,  $z_n \rightarrow 0 \wedge \forall n \in \mathbb{N}$   $z_n \neq 0$ . Тогда  $x_n \rightarrow 0$  и  $y_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поскольку  $|f_4(z_n)| = |x_n| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_4(z_n) = 0$ . Следовательно, функция  $\overline{D}_\delta(0) \xrightarrow{f_4} \mathbb{C}$ , где

$$\varphi(z) = \begin{cases} f_4(z), & \text{если } z \in \overline{D}_\delta(0) \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{при } z = 0, \end{cases}$$

непрерывна в точке  $z = 0$ . ►



**67.** Будут ли функции  $f_1(z) = \frac{1}{1-z}$ ,  $f_2(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ,  $D_{f_1} = D_{f_2} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  непрерывны, а также равномерно непрерывны?

◀ Пусть  $z_0 \in D_{f_1}$  — любая точка. Тогда  $1 - z_0 \neq 0$  и по теореме о непрерывности частного двух непрерывных функций  $f_1$  непрерывна на множестве  $D_{f_1}$ . Аналогично, функция  $f_2$  непрерывна  $\forall z \in D_{f_2}$ . Таким образом, обе функции непрерывны в области определения. Исследуем их на равномерную непрерывность. Пусть  $z'_n = 1 - \frac{1}{n}$ ,  $z''_n = 1 - \frac{2}{n}$ . Тогда

$$\rho(z'_n, z''_n) = |z''_n - z'_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Вместе с тем

$$\rho(f_1(z'_n), f_1(z''_n)) = \frac{\rho(z'_n, z''_n)}{|1 - z'_n||1 - z''_n|} = \frac{n}{2} \rightarrow +\infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, функция  $f_1$  не является равномерно непрерывной на множестве  $D_{f_1}$ .

Пусть  $z'_n = i(1 - \frac{1}{n})$ ,  $z''_n = i(1 - \frac{2}{n})$ . Тогда

$$\rho(z'_n, z''_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad \rho(f_2(z'_n), f_2(z''_n)) = \frac{\rho(z'_n, z''_n)}{|1 + z'^2_n||1 + z''^2_n|} = \frac{n}{2} \rightarrow +\infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Функция  $f_2$  также не является равномерно непрерывной на множестве  $D_{f_2}$ . ▶

**68.** Функция  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D_f = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  равномерно непрерывная в области определения. Доказать, что для любой точки  $\zeta$  на окружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  и любой последовательности  $(z_n)$  точек  $z_n \in D_f$ , сходящейся к  $\zeta$ , существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ . Доказать также, что этот предел не зависит от выбора последовательности  $(z_n)$  и что функция, доопределенная на границе круга при помощи предельного перехода, будет непрерывна во всем замкнутом круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ .

◀ Из определения равномерно непрерывной функции следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (z_1 \in D_f, z_2 \in D_f) (\rho(z_1, z_2) < \delta) \Rightarrow \rho(f(z_1), f(z_2)) < \varepsilon. \quad (1)$$

Пусть  $\zeta \in \gamma$ ,  $z_n \rightarrow \zeta \wedge \forall n \in \mathbb{N} z_n \in D_f$ . Сходящаяся последовательность  $(z_n)$  является фундаментальной, поэтому для указанного в условиях (1)  $\delta > 0$  существует такое  $n_\delta \in \mathbb{N}$ , что  $\forall (n \geq n_\delta, p \in \mathbb{N})$  выполняется условие  $\rho(z_n, z_{n+p}) < \delta$ . Тогда, согласно условиям (1),  $\rho(f(z_n), f(z_{n+p})) < \varepsilon$ , т.е. последовательность  $(f(z_n))$  фундаментальная и поэтому сходится. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ . Если  $z'_n \rightarrow \zeta$ , то, как доказано выше, последовательность  $(f(z'_n))$  сходится. Обозначим  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) = B$  и предположим, что  $A \neq B$ . Смешанная последовательность  $z_1, z'_1, z_2, z'_2, \dots$  сходится к точке  $\zeta$ , а последовательность  $f(z_1), f(z'_1), f(z_2), f(z'_2), \dots$  является фундаментальной и поэтому сходится. Обозначим  $C = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z''_n)$ , где  $z''_n$  — общий член смешанной последовательности. Поскольку последовательности  $(z_n)$  и  $(z'_n)$  являются подпоследовательностями смешанной последовательности, то  $A = C$  и  $B = C$ , т.е.  $A = B$ . Таким образом,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$  существует и не зависит от выбора последовательности  $(z_n)$ . Доопределяя функцию  $f$  на окружности  $\gamma$  предельными значениями в ее точках, получим непрерывную на компакте  $K$  функцию. ▶

**69.** Пусть  $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ ,  $D_f = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq R\}$ . Является ли функция  $f$  равномерно непрерывной?

◀ Функция  $f$  непрерывна, как композиция двух непрерывных функций. Для исследования ее на равномерную непрерывность полагаем  $z = x + iy$ . Тогда

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2 - y^2 + i2xy} = \frac{x^2 - y^2 - i2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad e^{-\frac{1}{z^2}} = e^{-\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}} e^{\frac{i2xy}{(x^2 + y^2)^2}}.$$

Пусть  $z'_n = \left(0, \frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)$ ,  $z''_n = \left(0, \frac{1}{\sqrt{\ln 2n}}\right)$ . Тогда  $\forall n \in \mathbb{N}$   $z'_n \in D_f$ ,  $z''_n \in D_f$ ,

$$\rho(z'_n, z''_n) = \sqrt{\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln 2n}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

$$\rho(f(z'_n), f(z''_n)) = e^{\ln 2n} - e^{\ln n} = 2n - n = n \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, функция  $f$  не является равномерно непрерывной. ►

## § 4. Дифференцируемые функции комплексного переменного.

### Связь между $\mathbb{C}$ -дифференцируемостью и $\mathbb{R}^2$ -дифференцируемостью.

### Аналитические функции

#### 4.1. Определение дифференцируемой функции. Правила дифференцирования.

**Определение.** Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  и  $z_0 \in D_f$ . Функция  $f$  называется дифференцируемой в точке  $z_0$ , если существует такая непрерывная в точке  $z_0$  функция  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D_\varphi = D_f$ , что  $\forall z \in D_f$  выполняется равенство

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\varphi(z). \quad (1)$$

Если  $z_0$  — предельная точка множества  $D_f$ , то число  $\varphi(z_0)$  называется производной функции  $f$  в точке  $z_0$  и обозначается символом  $f'(z_0)$ , т. е.

$$f'(z_0) = \varphi(z_0). \quad (2)$$

**Теорема 1.** Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in D_f$  и  $z_0$  — предельная точка множества  $D_f$ . Если функция  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$ , то существует

$$\lim_{D_f \ni z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0). \quad (3)$$

◀ Согласно формуле (1), имеем

$$\lim_{D_f \ni z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{D_f \ni z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0) = f'(z_0). \quad \blacktriangleright$$

Пусть, например,  $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ . Вычислим  $f'(z_0)$ ,  $z_0 \in D_f$ . Поскольку

$$\frac{z}{1+z^2} - \frac{z_0}{1+z_0^2} = (z - z_0) \frac{1 - z z_0}{(1+z_0^2)(1+z^2)}, \quad \varphi(z) = \frac{1 - z z_0}{(1+z_0^2)(1+z^2)}, \quad \varphi(z_0) = \frac{1 - z_0^2}{(1+z_0^2)^2},$$

то

$$f'(z_0) = \frac{1 - z_0^2}{(1+z_0^2)^2} \quad \text{и} \quad \forall z \in D_f \quad f'(z) = \frac{1 - z^2}{(1+z^2)^2}.$$

**Теорема 2** (о производной композиции). Пусть функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируема в точке  $z_0$ , а функция  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируема в точке  $\zeta_0$ . Если  $z_0 = g(\zeta_0)$  и  $\zeta_0$  — предельная точка множества  $D_{f \circ g}$ , то композиция  $f \circ g$  дифференцируема в точке  $\zeta_0$  и выполняется равенство

$$(f \circ g)'(\zeta_0) = f'(z_0)g'(\zeta_0). \quad (4)$$

◀ Согласно определению дифференцируемости функции  $f$  в точке  $z_0$ , существует такая непрерывная в этой точке функция  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D_\varphi = D_f$ , что  $\forall z \in D_f$   $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\varphi(z)$ . Пусть  $\zeta \in D_{f \circ g}$ . Тогда  $g(\zeta) \in D_f$  и при этом выполняется равенство

$$f(g(\zeta)) - f(g(\zeta_0)) = (g(\zeta) - g(\zeta_0))\varphi(g(\zeta)). \quad (5)$$

Поскольку функция  $g$  дифференцируема в точке  $\zeta_0$ , то существует такая непрерывная в этой точке функция  $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D_\psi = D_g$ , что  $\forall \zeta \in D_g$

$$g(\zeta) - g(\zeta_0) = (\zeta - \zeta_0)\psi(\zeta).$$

Равенство (5) принимает вид

$$(f \circ g)(\zeta) - (f \circ g)(\zeta_0) = (\zeta - \zeta_0)\psi(\zeta)(\varphi \circ g)(\zeta). \quad (6)$$

Из равенства (6) следует дифференцируемость композиции  $f \circ g$  в точке  $\zeta_0$ , причем

$$(f \circ g)'(\zeta_0) = \psi(\zeta_0)(\varphi \circ g)(\zeta_0) = g'(\zeta_0)\varphi(z_0) = f'(z_0)g'(\zeta_0). \blacktriangleright$$

**Теорема 3** (о линейности операции дифференцирования). Пусть функции  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  и  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируемы в точке  $z_0$ , являющейся предельной для множества  $D_f \cap D_g$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$ . Тогда функция  $\lambda f + \mu g$  дифференцируема в точке  $z_0$  и справедливо равенство

$$(\lambda f + \mu g)'(z_0) = \lambda f'(z_0) + \mu g'(z_0). \quad (7)$$

◀ Согласно определению дифференцируемости функций  $f$  и  $g$ , найдутся такие непрерывные в точке  $z_0$  функции  $\varphi$  и  $\psi$ , что  $D_\varphi = D_f$ ,  $D_\psi = D_g$  и

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\varphi(z), \quad g(z) - g(z_0) = (z - z_0)\psi(z).$$

Следовательно,

$$(\lambda f + \mu g)(z) - (\lambda f + \mu g)(z_0) = (z - z_0)(\lambda\varphi + \mu\psi)(z).$$

По определению, функция  $\lambda f + \mu g$  дифференцируема в точке  $z_0$  и

$$(\lambda f + \mu g)'(z_0) = (\lambda\varphi + \mu\psi)(z_0) = \lambda f'(z_0) + \mu g'(z_0). \blacktriangleright$$

**Теорема 4** (о непрерывности дифференцируемой функции). Если функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируема в точке  $z_0$ , то она непрерывна в этой точке.

◀ Из определения дифференцируемости функции  $f$  в точке  $z_0$  следует равенство

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi(z).$$

По теореме о непрерывности в точке  $z_0$  суммы и произведения непрерывных функций  $f$  является непрерывной при  $z = z_0$ . ▶

Обратное утверждение неверно: существуют непрерывные недифференцируемые функции. Например, пусть  $f(z) = \bar{z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Функция  $f$  непрерывна. Согласно определению производной

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

В рассматриваемом случае

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h}.$$

Пусть  $z = x + iy$ ,  $h = \xi + i\eta$ . Тогда  $\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\xi - i\eta}{\xi + i\eta}$ . Если  $\eta = 0$ ,  $\xi \rightarrow 0$ , то  $\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \rightarrow 1$ ; если  $\xi = 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ , то  $\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \rightarrow -1$ . Функция  $f$  не имеет производной в каждой точке непрерывности.

**Теорема 5** (о дифференцируемости произведения бесконечно малой дифференцируемой функции и непрерывной функции). Пусть функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируема в точке  $z_0$  и  $f(z_0) = 0$ . Если  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  непрерывна в точке  $z_0$  и  $z_0$  является предельной для множества  $D_f \cap D_g$ , то функция  $fg$  дифференцируема в этой точке и справедлива формула

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0). \quad (8)$$

◀ Согласно определению дифференцируемости функции  $f$ , существует такая непрерывная в точке  $z_0$  функция  $\varphi$ , что  $D_\varphi = D_f$  и  $f(z) = (z - z_0)\varphi(z)$  (принято во внимание, что  $f(z_0) = 0$ ). Следовательно,

$$(fg)(z) - (fg)(z_0) = (z - z_0)\varphi(z)g(z),$$

что означает дифференцируемость функции  $fg$  в точке  $z_0$ . При этом

$$(fg)'(z_0) = \varphi(z_0)g(z_0) = f'(z_0)g(z_0). \blacktriangleright$$

**Следствие** (правило дифференцирования произведения функций). Если функции  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируемы в точке  $z_0$ , являющейся предельной для множества  $D_f \cap D_g$ , то функция  $fg$  дифференцируема в этой точке и справедлива формула

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + g'(z_0)f(z_0). \quad (9)$$

◀ Доказательство следует из тождества

$$f(z)g(z) = (f(z) - f(z_0))g(z) + f(z_0)g(z) \quad \forall z \in D_f \cap D_g$$

и теорем 3, 5. ▶

**Теорема 6** (о производной частного). Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  — дифференцируемые функции в точке  $z_0$ , являющейся предельной для множества  $D_f \cap D_g$ . Если  $g(z_0) \neq 0$ , то функция  $\frac{f}{g}$  дифференцируема в точке  $z_0$  и справедлива формула

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - g'(z_0)f(z_0)}{g^2(z_0)}. \quad (10)$$

◀ Воспользуемся правилом дифференцирования произведения функций и теоремой о производной композиции функций. Получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(z_0) = f'(z_0) \frac{1}{g(z_0)} + f(z_0) \left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = \\ &= \frac{f'(z_0)}{g(z_0)} + f(z_0) \left(-\frac{g'(z_0)}{g^2(z_0)}\right) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - g'(z_0)f(z_0)}{g^2(z_0)}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Теорема 7** (о производной обратной функции). Пусть функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  обратима,  $z_0 \in D_f$  и является предельной точкой множества  $D_f$ ,  $w_0 = f(z_0)$ . Если существует  $f'(z_0) \neq 0$  и обратная функция  $f^{-1}$  непрерывна в точке  $w_0$ , то она дифференцируема в этой точке. Если, дополнительно,  $w_0$  — предельная точка множества  $E_f = D_{f^{-1}}$ , то

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}. \quad (11)$$

◀ По определению дифференцируемости функции  $f$  в точке  $z_0$ , существует такая непрерывная в этой точке функция  $\varphi$ , что  $D_\varphi = D_f$  и  $\forall z \in D_f$

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\varphi(z). \quad (12)$$

Поскольку из равенства (12) и взаимной однозначности функции  $f$  следует, что  $\varphi(z) \neq 0$  при  $z \neq z_0$  и  $\varphi(z_0) = f'(z_0) \neq 0$ , то, полагая  $w = f(z)$ , имеем

$$f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0) = (w - w_0) \frac{1}{\varphi(f^{-1}(w))}. \quad (13)$$

Так как функция  $\varphi \circ f^{-1}$  непрерывна в точке  $w_0$ , то по определению функция  $f^{-1}$  дифференцируема в точке  $w_0$ . Если  $w_0$  — предельная точка множества  $E_f = D_{f^{-1}}$ , то на основании определения производной получаем

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(w_0))} = \frac{1}{\varphi(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}. \quad \blacktriangleright$$

Заметим, что в случае, когда множество  $D_f$  является компактом и функция  $f$  непрерывная, то непрерывность обратной функции следует из теоремы п. 6.3, гл. 1.

В теории функций комплексного переменного дифференцируемые функции принято называть *монотонными*. Точнее, функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , определенная на множестве  $E \subset \mathbb{C}$ , называется *монотонной* (относительно множества  $E$ ) в конечной неизолированной точке  $z_0 \in E$ , если она имеет в этой точке конечную производную  $f'_E(z_0)$  по переменной  $z \in E$ :

$$f'_E(z_0) = \lim_{E \ni z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Функция, моногенная в каждой неизолированной точке множества  $E$ , называется *моногенной на  $E$* . Если  $E = G$  — область комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , то функция, моногенная на  $G$ , называется аналитической функцией в области  $G$ .

#### 4.2. Дифференциал функции.

Пусть функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируема в точке  $z_0 \in D_f$ , предельной для множества  $D_f$ . Тогда по определению  $\forall z \in D_f$  ее приращение в точке  $z_0$  записывается в виде

$$\Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0) = \varphi(z)(z - z_0), \quad (1)$$

где  $\varphi$  — непрерывная в точке  $z_0$  функция и  $\varphi(z_0) = f'(z_0)$ . Записав равенство (1) в виде

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = \varphi(z_0) \Delta z + \alpha(z_0, \Delta z) \Delta z, \quad \Delta z = z - z_0,$$

где  $\alpha(z_0, \Delta z) = \varphi(z) - \varphi(z_0) = \varphi(z_0 + \Delta z) - \varphi(z_0)$ , делаем вывод, что приращение дифференцируемой в точке  $z_0$  функции  $f$  равно сумме двух слагаемых, одно из которых  $f'(z_0) \Delta z$ , а второе —  $\alpha(z_0, \Delta z) \Delta z$ , где  $\alpha$  — непрерывная функция, обращающаяся в нуль при  $z = z_0$ , т. е. бесконечно малая при  $z \rightarrow z_0$ . Обозначим  $\alpha(z_0, \Delta z) = o(1)$ ,  $\alpha(z_0, \Delta z) \Delta z = o(1) \Delta z = o(|\Delta z|)$ . Функция  $o(|\Delta z|)$  имеет высший порядок малости по сравнению с  $|\Delta z|$  при  $z \rightarrow z_0$ , т. е.  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{o(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0$ .

Таким образом, равенство (1) принимает вид

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = f'(z_0) \Delta z + o(|\Delta z|). \quad (2)$$

Прежде чем анализировать формулу (2), рассмотрим линейное отображение  $\mathbb{C} \xrightarrow{L} \mathbb{C}$ .

**Определение 1.** Функция  $\mathbb{C} \xrightarrow{L} \mathbb{C}$  называется *линейной*, если  $\forall (z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{C})$  выполняются условия:

1)  $L(z_1 + z_2) = L(z_1) + L(z_2)$  (свойство аддитивности);

2)  $L(\lambda z_1) = \lambda L(z_1)$  (свойство однородности).

Из условий 1) и 2) следует, что  $L(0) = 0$  и  $\forall z \in \mathbb{C} L(z) = az$ ,  $a = L(1) = \text{const}$ .

**Теорема.** Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in D_f$  — предельная точка множества  $D_f$ . Если существует такое линейное отображение (линейная форма)  $\mathbb{C} \xrightarrow{L} \mathbb{C}$ ,  $L(z) = az$ , что  $\forall z \in D_f$  выполняется равенство

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = a \Delta z + o(|\Delta z|), \quad (3)$$

то функция  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$  и  $f'(z_0) = a$ .

◀ При выполнении условий теоремы существует

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z} = a = f'(z_0). \quad \blacktriangleright$$

Принимая во внимание равенство (2) и доказанную теорему, видим, что условие (3) может быть принято в качестве определения дифференцируемой функции  $f$  в точке  $z_0$ .

**Определение 2.** Если функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируема в точке  $z_0 \in D_f$ , предельной для множества  $D_f$ , то линейная форма  $\mathbb{C} \xrightarrow{L} \mathbb{C}$ , удовлетворяющая условию (3), называется *дифференциалом функции  $f$  в точке  $z_0$*  и обозначается символом  $df(z_0)$ . Для любого  $h \in \mathbb{C}$  имеем

$$L(h) = df(z_0)(h) = f'(z_0)h. \quad (4)$$

Таким образом, приращение функции  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , дифференцируемой в точке  $z_0 \in D_f$ , предельной для множества  $D_f$ , состоит из суммы двух слагаемых, первое из которых есть значение дифференциала  $df(z_0)$  при  $h = \Delta z$ , а второе является функцией вида  $\alpha(z_0, \Delta z) = o(1) \Delta z$ ,  $D_\alpha = D_f$ , где  $o(1)$  — непрерывная бесконечно малая при  $z \rightarrow z_0$  функция, значение которой в точке  $z_0$  равно нулю.

Пусть  $\forall z \in \mathbb{C} g(z) = z$ . Тогда  $\forall h \in \mathbb{C}$  имеем

$$dg(z)(h) = dz(h) = z'h = h, \quad (5)$$

т. е. значения дифференциалов  $dz$  функции  $z \mapsto z$  в любой точке комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  равны друг другу при выборе фиксированного  $h \in \mathbb{C}$ . Поскольку

$$df(z_0)(h) = f'(z_0)h = f'(z_0)dz(h), \quad (6)$$

то

$$df(z_0) = f'(z_0)dz. \quad (7)$$

Формула (7) определяет дифференциал функции  $f$  в точке  $z_0$  как линейную форму

$$\mathbb{C} \xrightarrow{df(z_0)} \mathbb{C}. \quad (8)$$

Принимая во внимание, что производную функции  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  можно рассматривать как частное дифференциалов функции и независимого переменного, принято обозначение

$$f' = \frac{df}{dz}, \quad f'(z_0) = \frac{df(z_0)}{dz}.$$

Для приближенного вычисления значений дифференцируемой функции  $f$  в точках из некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $z_0 \in D_f$  при достаточно малом  $\delta > 0$  пользуются приближенной формулой

$$\Delta f(z_0, \Delta z) \approx df(z_0)(\Delta z) = f'(z_0) \Delta z, \quad (9)$$

т. е.

$$f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0) \Delta z, \quad \Delta z = z - z_0. \quad (10)$$

#### 4.3. Критерий дифференцируемости функции комплексного переменного.

Если функция  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируема в точке  $z_0 \in D_f$  в смысле определения п. 4.1, то будем называть ее  $\mathbb{C}$ -дифференцируемой в этой точке. Функцию  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , дифференцируемую в точке  $(x_0, y_0)$ , будем называть  $\mathbb{R}^2$ -дифференцируемой (напомним, что ее приращение в точке  $(x_0, y_0)$  имеет вид  $\Delta g(x_0, y_0) = \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \alpha \rho$ , где  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow 0$ ). Поскольку функцию комплексного переменного можно записать в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = (x, y),$$

то естественно возникает вопрос о связи  $\mathbb{C}$ -дифференцируемости функции  $f$  с  $\mathbb{R}^2$ -дифференцируемостью функций  $u$  и  $v$  в точке  $z_0 = (x_0, y_0)$ . Эту связь устанавливает следующее утверждение.

**Теорема** (критерий дифференцируемости функции  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ). Пусть функция  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , где  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , определена в некоторой окрестности точки  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Для дифференцируемости функции  $f$  в точке  $z_0$  необходимо и достаточно, чтобы функции  $u$  и  $v$  были  $\mathbb{R}^2$ -дифференцируемы в точке  $(x_0, y_0)$  и чтобы их частные производные в этой точке были связаны соотношениями

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \quad (1)$$

Соотношения (1) принято называть условиями Коши—Римана.

◀ Необходимость. Пусть функция  $f$   $\mathbb{C}$ -дифференцируема в точке  $z_0 = (x_0, y_0)$ . Тогда ее приращение в этой точке имеет вид

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = f'(z_0) \Delta z + \alpha(z_0, \Delta z) \Delta z, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Delta z \rightarrow 0. \quad (2)$$

Отделяя в этом равенстве действительную и мнимую части и обозначив  $f'(z_0) = a + ib$ , получим при  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$

$$\Delta u(x_0, y_0) = a \Delta x - b \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \beta_1 \Delta y, \quad \alpha_1 \rightarrow 0, \beta_1 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0,$$

$$\Delta v(x_0, y_0) = b \Delta x + a \Delta y + \alpha_2 \Delta x + \beta_2 \Delta y, \quad \alpha_2 \rightarrow 0, \beta_2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0.$$

Из  $\mathbb{R}^2$ -дифференцируемости функций  $u$  и  $v$  в точке  $(x_0, y_0)$  следует, что

$$a = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad b = -\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Достаточность. Пусть функции  $u$  и  $v$   $\mathbb{R}^2$ -дифференцируемы в точке  $(x_0, y_0)$  и выполняются условия (1). Обозначим  $\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = A$ ,  $\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = B$ . Запишем приращения функций  $u$  и  $v$  в точке  $(x_0, y_0)$ , приняв во внимание условия (1). Имеем

$$\Delta u(x_0, y_0) = A \Delta x - B \Delta y + \alpha \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0, \quad (3)$$

$$\Delta v(x_0, y_0) = B \Delta x + A \Delta y + \beta \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad \beta \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0. \quad (4)$$



Умножив обе части равенства (4) на  $i$  и складывая полученное с равенством (3), находим:

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = \Delta u(x_0, y_0) + i \Delta v(x_0, y_0) = A(\Delta x + i \Delta y) + B(i \Delta x - \Delta y) + (\alpha + i\beta) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \quad (5)$$

Поскольку  $\Delta x + i \Delta y = \Delta z$ ,  $i \Delta x - \Delta y = i \Delta \bar{z}$ , то равенство (5) принимает вид

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = (A + iB) \Delta z + o(|\Delta z|), \quad (6)$$

т. е. функция  $f$   $\mathbb{C}$ -дифференцируема в точке  $z_0$ . ►

Соотношения (1) впервые изучались еще в XVIII столетии Д'Аламбером и Эйлером, поэтому их следовало бы называть условиями Эйлера—Д'Аламбера—Коши—Римана.

Сделаем несколько замечаний.

1. В процессе доказательства теоремы установлена связь между производной  $f'(z)$  и частными производными действительной и мнимой частей функции  $f$  в виде

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

2. Из курса математического анализа известно, что для  $\mathbb{R}^2$ -дифференцируемости функций  $u$  и  $v$  достаточно существования и непрерывности частных производных  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  в некоторой окрестности точки. Поэтому для дифференцируемости функции  $f = u + iv$  в точке  $z = (x, y)$  достаточно, чтобы частные производные  $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$  существовали в некоторой окрестности точки  $(x, y)$ , были непрерывны в ней и удовлетворяли условиям Коши—Римана.

3. Введем в рассмотрение дифференциальные операторы  $\frac{\partial}{\partial z}$  и  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ , полагая

$$\frac{\partial f}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (8)$$

Тогда условия Коши—Римана можно записать как одно комплексное равенство

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (9)$$

Если  $u$  и  $v$  —  $\mathbb{R}^2$ -дифференцируемые в точке  $(x_0, y_0)$ , то

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = \frac{\partial f(z_0)}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f(z_0)}{\partial \bar{z}} \Delta \bar{z} + o(|\Delta z|). \quad (10)$$

Полагая в (10)  $\Delta z = |\Delta z|e^{i\theta}$ , получим

$$\frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z} = \frac{\partial f(z_0)}{\partial z} + \frac{\partial f(z_0)}{\partial \bar{z}} e^{-i2\theta} + o(|\Delta z|). \quad (11)$$

Из соотношения (11) следует, что предел отношения  $\frac{\Delta f}{\Delta z}$  при  $\Delta z \rightarrow 0$  существует тогда и только тогда, когда  $\frac{\partial f(z_0)}{\partial \bar{z}} = 0$ .

#### 4.4. Аналитические функции.

**Определение 1.** Функция  $w = f(z)$ , определенная в некоторой области  $G \subset \mathbb{C}$ , называется аналитической в  $G$  или голоморфной, если  $\forall z \in G$  она дифференцируема.

**Определение 2.** Функция  $w = f(z)$  называется аналитической в точке  $z \in \mathbb{C}$ , если она аналитическая в некоторой окрестности этой точки.

**Определение 3.** Функция  $w = f(z)$  называется аналитической на кривой  $\gamma \subset \mathbb{C}$ , если она аналитическая в некоторой области, содержащей эту кривую.

**Определение 4.** Функция  $w = f(z)$  называется аналитической на открытом множестве  $E \subset \mathbb{C}$ , если она аналитическая в каждой точке  $z \in E$ .

**Определение 5.** Функция  $w = f(z)$  называется аналитической на произвольном множестве  $M \subset \mathbb{C}$ , если она аналитическая на некотором открытом множестве  $E \supset M$ .

В частности, функция  $w = f(z)$  называется *аналитической в замкнутой области  $\bar{G}$* , если она аналитическая в некоторой области  $D \ni G$ .

Понятие аналитической функции можно распространить и на области из  $\bar{\mathbb{C}}$ , если дать соответствующее определение аналитичности в бесконечно удаленной точке.

**Определение 6.** Функция  $f$ , определенная в расширенной комплексной плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$ , называется *аналитической на бесконечности*, если функция  $\varphi: z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$  аналитическая в точке  $z = 0$ .

Отметим некоторые свойства аналитических функций.

1) Сумма, разность, произведение и частное (при условии, что делитель  $\neq 0$ ) двух аналитических функций также являются аналитическими функциями. Отсюда следует, что множество функций  $\{f\}$ , аналитических в области  $G$ , образует кольцо. Обозначим его символом  $A(G)$ .

2) Композиция  $f \circ g$  аналитических функций есть аналитическая функция.

Свойства 1) и 2) следуют из теорем о дифференцируемых функциях, рассмотренных в п. 4.1.

Примером функции, аналитической в любой области  $G \subset \mathbb{C}$ , служит произвольный многочлен

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n.$$

**Рациональная функция**

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}$$

аналитическая в каждой области  $G$ , не содержащей нулей знаменателя.

3) Если  $f \in A(G)$  и  $\forall z \in G \ |f'(z)| \neq 0$ , то на множестве  $E_f = f(G)$  определена функция  $f^{-1}$ , являющаяся аналитической. При этом, если  $w_0 = f(z_0)$ , то  $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$ .

◀ Обратимость отображения  $w = u + iv$  означает, что уравнения  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  можно разрешить относительно  $x, y$  в области  $G$ . Поскольку функция  $f$  аналитическая в области  $G$ , то  $\forall z_0 = (x_0, y_0) \in G$  выполняются условия Коши—Римана (1), п. 4.3, вследствие которых якобиан

$$\begin{aligned} \frac{D(u, v)}{D(x, y)}(x_0, y_0) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \right)^2 = \\ &= \left| \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \right|^2 = |f'(z_0)|^2 \end{aligned}$$

отличный от нуля в точке  $z_0$ , поскольку  $\forall z \in G \ |f'(z)| \neq 0$ . По теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки  $w_0 = (u_0, v_0)$  существует  $z = f^{-1}(w)$ . Существование и непрерывность производной  $(f^{-1})'$  доказываются так же, как в теореме 7, п. 4.1. ▶

4) Пусть  $u$  — действительная часть функции  $f \in A(G)$ . Тогда мнимая часть  $v$  этой функции определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Действительно, в силу условий Коши—Римана, по известной функции  $u$  однозначно определяется полный дифференциал неизвестной функции  $v$ :

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Это позволяет восстановить функцию  $v$  по известной формуле

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} d\xi + \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta + C.$$

5) Пусть  $f \in A(G)$ ,  $f = u + iv$ ,  $u(x, y) = C$ ,  $v(x, y) = C$  — линии уровней функций  $u$  и  $v$ . Вычислим  $\forall z = (x, y) \in G$   $\text{grad } u$  и  $\text{grad } v$ :  $\text{grad } u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ ,  $\text{grad } v = \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ . Считая пространство  $\mathbb{R}^2$  евклидовым, получим, принимая во внимание условия Коши—Римана:

$$\langle \text{grad } u, \text{grad } v \rangle = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Так как вектор-градиент функции ортогонален ее линии уровня, то семейства кривых  $u(x, y) = C$  и  $v(x, y) = C$  взаимно ортогональны.

#### 4.5. Геометрический смысл производной функции комплексного переменного. Понятие конформного отображения.

Пусть  $f \in A(G)$  и  $z_0 \in G$  — произвольная точка. Проведем через нее гладкую жорданову кривую  $\gamma \subset G$ . Функция  $f$  отображает область  $G$  комплексной плоскости  $z$  на некоторую область  $D$  комплексной плоскости  $w$ . Пусть  $w_0 = f(z_0)$ ,  $\gamma^*$  — образ кривой  $\gamma$  при отображении  $f$  и  $w_0 \in \gamma^*$  (рис. 28).

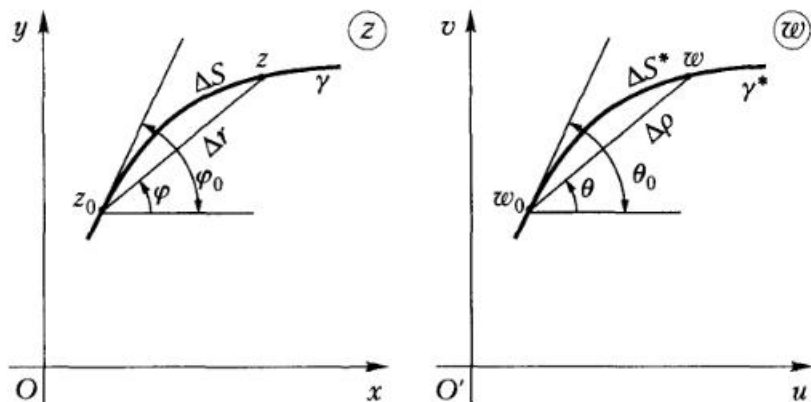


Рис. 28

Если подвижная точка  $z$  стремится к  $z_0$  по кривой  $\gamma$ , то ее образ  $w$  стремится к  $w_0 = f(z_0)$  по кривой  $\gamma^*$ . Предположим, что  $f'(z_0) \neq 0$ . Тогда  $f'(z_0) = |f'(z_0)|e^{i\alpha}$ ,  $\alpha = \arg f'(z_0)$ . Полагая  $\Delta z = z - z_0 = \Delta r e^{i\varphi}$ ,  $\Delta w = \Delta r e^{i\theta}$ , имеем

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta \rho}{\Delta r}, \quad \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\theta - \varphi) \quad (1)$$

Пусть  $\psi$  — параметрическое представление гладкой кривой  $\gamma$ . Тогда композиция  $f \circ \psi$  является параметрическим представлением гладкой кривой  $\gamma^*$ . По теореме о производной композиции дифференцируемых функций в точке  $t_0$ , в которой  $\psi(t_0) = z_0$ , получаем

$$(f \circ \psi)'(t_0) = f'(z_0)\varphi'(t_0) \neq 0. \quad (2)$$

Следовательно,  $\varphi'(t_0) \neq 0$ . Обозначим через  $\varphi_0$  и  $\theta_0$  углы наклона к осям  $Ox$  и  $O'u$  касательных к кривым  $\gamma$  и  $\gamma^*$  соответственно в точках  $z_0$  и  $w_0 = f(z_0)$ . Тогда  $\varphi_0 = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varphi$ ,  $\theta_0 = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \theta$  и второе соотношение в (1) примет вид

$$\arg f'(z_0) = \theta_0 - \varphi_0 \quad (3)$$

Таким образом, угол, на который поворачивается кривая  $\gamma$  в точке  $z_0 \in G$  при отображении  $w = f$ , не зависит от вида и направления  $\gamma$ . Считаем, что направления осей  $Ox$  и  $O'u$ ,  $Oy$  и  $O'v$  совпадают, и под углом поворота понимаем угол между первоначальным и отображенным направлениями. Из равенства (3) следует, что  $\alpha = \arg f'(z_0)$  равен углу поворота в точке  $z_0$  при отображении  $w = f(z)$ . Итак, отображение  $f$  имеет свойство сохранения углов: угол между двумя произвольными гладкими кривыми в точке  $z_0$  равен углу между их образами в точке  $w_0 = f(z_0)$ .

Пусть  $z = \psi(t) \in \gamma$ . Вследствие гладкости кривых  $\gamma$  и  $\gamma^*$  величины  $|\Delta z|$  и  $|\Delta w|$  при  $t \rightarrow t_0$  бесконечно малы и эквивалентны соответственно длинам  $\Delta s$  и  $\Delta s^*$  дуг  $\gamma$  и  $\gamma^*$ , отвечающих сегменту  $[t, t_0]$ . Поэтому соотношение

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = |f'(z_0)|$$

можно записать в виде

$$|f'(z_0)| = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Delta s^*}{\Delta s} = \frac{ds^*}{ds}. \quad (4)$$

Следовательно, с геометрической точки зрения  $|f'(z_0)|$  есть коэффициент растяжения дуги  $\gamma$  в точке  $z_0$  при отображении  $f$ . Поскольку  $\gamma$  — произвольная гладкая кривая, то все дуги растягиваются одинаково в точке  $z_0$ . Поэтому отображение  $f$  имеет в точке  $z_0$  так называемое *круговое свойство*: оно отображает малые окружности с центром в точке  $z_0$  в кривые с центром в точке  $w_0 = f(z_0)$ , которые отличаются от окружностей на бесконечно малые высшего порядка. Заметим также, что круговое свойство остается в силе и в случае, когда  $f'(z_0) = 0$ , однако принимает вырожденную форму: тогда коэффициент растяжения равен нулю.

**Определение 1.** Отображение  $f$  называется *конформным* в точке  $z_0 \in G$ , если оно локально гомеоморфно в этой точке и имеет в ней свойство сохранения углов.

Из геометрической интерпретации аргумента производной  $f'$  следует, что отображение, осуществляемое аналитической функцией, конформное в каждой точке  $z \in G$ , в которой  $f'(z) \neq 0$ .

**Определение 2.** Если отображение  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  конформное в каждой точке области  $G$ , то оно называется *конформным* в этой области.

Преимущественно понятие конформного отображения включает в себя гомеоморфизм области  $G$  (см. п. 6.6, гл. 1).

**Замечание 1.** При конформном отображении углы сохраняются не только по величине, но и по направлению отсчета. Поэтому его также называют конформным отображением первого рода, в отличие от конформного отображения второго рода, при котором углы сохраняются лишь по величине, а направление их отсчета изменяется на противоположное.

**Замечание 2.** Отображение, осуществляемое аналитической функцией с отличной от нуля производной, характеризуется также и постоянством коэффициента растяжения в точке. Очевидно, что отображение, обладающее этими двумя свойствами, в предположении, что коэффициент растяжения отличный от бесконечности, является аналитическим.

**Замечание 3.** Пусть функции  $u$  и  $v$  имеют непрерывные частные производные. В этом случае элементарными методами можно показать, что из конформности отображения  $f = u + iv$  необходимо следует его аналитичность, а если отображение  $f$  имеет постоянный коэффициент растяжения, то оно является конформным первого или второго рода.

Можно также доказать, что при непрерывном однолистом отображении  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D_f = G$ , из условия консерватизма углов следует аналитичность функции  $f$ .

Для изучения геометрических свойств отображения  $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  условимся о таком определении величины угла, под которым пересекаются кривые в точке  $z = \infty$ : этот угол считается равным углу пересечения образов этих кривых (при этом величину последнего берем с обратным знаком) в точке  $\zeta = 0$  при отображении  $\zeta = \frac{1}{z}$ .

В связи с понятием конформного отображения в расширенной комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  дадим следующие определения.

**Определение 3.** Функция  $f$  конформно отображает окрестность  $O_{z_0}$  точки  $z_0$  на окрестность точки  $w = \infty$ , если функция  $w = \frac{1}{f(z)}$  конформно отображает  $O_{z_0}$  на окрестность точки  $w = 0$ .

**Определение 4.** Функция  $f$  конформно отображает окрестность  $O_\infty$  точки  $z = \infty$  на окрестность  $O_{w_0}$  точки  $w_0$ , если функция  $w = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$  конформно отображает окрестность точки  $\zeta = 0$  на  $O_{w_0}$ .

**Определение 5.** Функция  $f$  конформно отображает окрестность  $O_\infty$  точки  $z = \infty$  на окрестность  $O'_\infty$  точки  $w = \infty$ , если функция  $w = \frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$  конформно отображает окрестность точки  $\zeta = 0$  на окрестность точки  $w = 0$ .

#### 4.6. Плоские физические поля и их связь с аналитическими функциями.

Пусть в некоторой области  $G \in \mathbb{C}$  задано плоскопараллельное векторное поле  $F = (F_x, F_y)$ . Функции  $F_x = F_x(x, y)$ ,  $F_y = F_y(x, y)$  считаем дифференцируемыми в области  $G$ . Пусть поле  $F$  потенциальное, т. е.

$$\operatorname{rot} F = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

и соленоидальное, т. е.

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Из (1) следует, что дифференциальная форма

$$F_x dx + F_y dy = \omega \quad (3)$$

является полным дифференциалом некоторой функции  $u = u(x, y)$ , которую называют *потенциалом* поля  $F$ :

$$F = \nabla u = \operatorname{grad} u. \quad (4)$$

Из (2) получаем

$$-F_y dx + F_x dy = dv \quad (5)$$

Функция  $v = v(x, y)$  называется *функцией тока*. Рассмотрим функцию

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (6)$$

Из (3) и (5) имеем

$$F_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad F_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (7)$$

Следовательно,  $f \in A(G)$ .

Таким образом, всякому потенциальному и соленоидальному плоскопараллельному векторному полю  $F$  соответствует аналитическая функция, полностью определяющая это поле. Эту функцию называют *комплексным потенциалом* векторного поля  $F$ .

Наоборот, каждой аналитической в области  $G$  функции  $f$  соответствует плоскопараллельное векторное поле  $F$ , для которого  $f$  является комплексным потенциалом. Имеем очевидное равенство

$$F = \overline{f'(z)}. \quad (8)$$

Векторное поле  $F$  может иметь различную природу. Рассмотрим некоторые конкретные поля.

**1. Гидродинамическая интерпретация векторного поля.** Пусть  $F$  — поле скоростей стационарного плоскопараллельного потока несжимаемой жидкости, плотность которой  $\mu = \operatorname{const}$ . Это поле потенциальное и соленоидальное. Его соленоидальность означает, что в данной области  $G$  отсутствуют источники жидкости, другими словами, поток жидкости через произвольный замкнутый контур  $\Gamma \subset G$  равен нулю:

$$\oint_{\Gamma} F_n ds = \oint_{\Gamma} -F_y dx + F_x dy = 0. \quad (9)$$

Потенциальность поля скоростей жидкости означает, что циркуляция жидкости вдоль произвольного замкнутого контура  $\Gamma \subset G$  равна нулю:

$$\oint_{\Gamma} F_{\tau} ds = \oint_{\Gamma} F_x dx + F_y dy = 0. \quad (10)$$

**2. Электростатическая интерпретация векторного поля.** Рассмотрим плоское электростатическое поле, заданное вектором напряженности  $E$ . Известно, что оно потенциальное, т. е.

$$E = -\nabla \varphi, \quad (11)$$

где  $\varphi$  — потенциал электростатического поля. Для произвольной замкнутой гладкой или кусочно-гладкой кривой  $\Gamma \subset G$  имеем

$$\oint_{\Gamma} E_{\tau} ds = 0, \quad (12)$$

поскольку этот интеграл равен работе по перемещению единичного заряда вдоль контура  $\Gamma$ .

Интеграл

$$\oint_{\Gamma} E_n ds \quad (13)$$

согласно теореме Гаусса равен  $2\pi$ , умноженному на алгебраическую сумму зарядов, содержащихся в области, ограниченной контуром  $\Gamma$ . Отсюда следует, что в области, в которой заряды отсутствуют, поле  $E$  будет соленоидальным.

Таким образом, при изучении плоскопараллельных электростатических полей в областях, в которых отсутствуют заряды, удобно пользоваться аппаратом аналитических функций.

#### 4.7. Неравенство Лагранжа.

Пусть материальная точка движется прямолинейно. Если ее начальное и конечное положения совпадают, или направления движения в начальный и конечный моменты времени противоположны, то она должна иметь в какой-то момент времени скорость равную нулю, т.е. обязана остановиться. В математике эти простые физические явления описываются классическими теоремами Ролля и Дарбу. Справедливы ли классические теоремы Ролля, Дарбу и Лагранжа для функций вида  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ? Физическое истолкование производной как скорости движения материальной точки в плоскости  $\mathbb{C}$  позволяет ответить на поставленный вопрос. Двигаясь на плоскости, материальная точка может вернуться в исходное положение без остановки в какой-либо момент времени, и в этом состоит одно из принципиальных различий движений на плоскости и на прямой. Примером, подтверждающим сказанное, является вращение материальной точки вокруг неподвижного центра, математической моделью которого служит функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , где  $f(x) = e^{ix}$ ,  $D_f = [0, 2\pi]$ . Действительно,  $f(0) = f(2\pi) \wedge f'(x) = ie^{ix} \neq 0 \forall x \in [0, 2\pi]$ . Поэтому существуют такие функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , для которых утверждения теорем Ролля и Лагранжа несправедливы.

Теорема Дарбу была основана на том факте, как отмечалось выше, что при прямолинейном движении материальной точки для изменения его на противоположное требуется, чтобы скорость в какой-то момент времени обратилась в нуль. Подтверждением того, что, двигаясь на плоскости, материальная точка может изменить направление движения на противоположное, имея в каждый момент времени ненулевую скорость, служит пример движения точки по полуокружности, задаваемого функцией  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , где  $f(x) = ie^{ix}$ ,  $D_f = [0, \pi]$ . Векторы скорости  $f'(0)$  и  $f'(\pi)$  противоположно направлены, и тем не менее вектор  $f'(x)$  ненулевой  $\forall x \in [0, \pi]$ . Следовательно, утверждение теоремы Дарбу для функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{C}$  несправедливо.

Физическое истолкование производной указывает правильный аналог теоремы Лагранжа для функций  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Если  $f(a)$  — начальное положение движущейся материальной точки и ее скорость по модулю не превосходит числа  $v = \|f'\| = \sup_{x \in D_f} |f'(x)|$ , то за время  $t = b - a$  она не может попасть за пределы окружности  $\gamma = \{w \in \mathbb{C} : |w - f(a)| = v(b - a)\}$ .

**Теорема (Лагранжа).** Пусть функция  $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{C}$  непрерывна на  $[a, b]$  и дифференцируема в каждой точке интервала  $(a, b)$ . Тогда справедливо неравенство

$$|f(b) - f(a)| \leq \|f'\|(b - a), \quad (1)$$

где  $\|f'\| = \sup_{x \in (a, b)} |f'(x)|$ .

◀ Пусть  $\varphi \in \text{Arg}(f(b) - f(a))$ . Тогда

$$|f(b) - f(a)| = e^{-i\varphi}(f(b) - f(a)) = (e^{-i\varphi}f)(b) - (e^{-i\varphi}f)(a). \quad (2)$$

Полагая  $e^{-i\varphi}f(x) = u(x) + iv(x) \forall x \in [a, b]$ . Имеем

$$|f(b) - f(a)| = (u(b) + iv(b)) - (u(a) + iv(a)) = u(b) - u(a) + i(v(b) - v(a)).$$

Начало цепочки равенств показывает, что ее конец является действительным числом. Поэтому  $v(b) - v(a) = 0$ . По теореме Лагранжа для функции  $u$  существует такая точка  $\xi \in (a, b)$ , что

$$|f(b) - f(a)| = u'(\xi)(b - a) \leq |f'(\xi)|(b - a) \leq \|f'\|(b - a). \blacktriangleright$$

Рассмотрим примеры.

**70.** Доказать, что функция  $w = z^2 + 2z + 3$  однолистная в области  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

◀ Пусть  $|z_1| < 1$ ,  $|z_2| < 1$  и  $z_1 \neq z_2$ . Покажем, что  $w(z_1) \neq w(z_2)$ , т.е.  $|w(z_1) - w(z_2)| > 0$ . Действительно,

$$|w(z_1) - w(z_2)| = |z_1^2 + 2z_1 - z_2^2 - 2z_2| = |z_1 - z_2||z_1 + z_2 + 2| \geq |z_1 - z_2|(2 - |z_1| - |z_2|) > 0. \blacktriangleright$$



**71.** Доказать, что функция

$$w(z) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{5}{3}}}{x^2 + y^2} + i \frac{x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{4}{3}}}{x^2 + y^2}, & \text{если } z \neq 0, \\ 0 & \text{при } z = 0, \end{cases}$$

не дифференцируема в точке  $z = 0$ .

◀ Покажем, что  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w(z)}{z}$  не существует, откуда и будет следовать справедливость утверждения.

Пусть  $z = x + iy$ , тогда

$$\frac{w(z)}{z} = \begin{cases} \frac{x^{\frac{7}{3}} y^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{7}{3}}}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{x^{\frac{8}{3}} y^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{8}{3}}}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{если } z \neq 0, \\ 0 & \text{при } z = 0. \end{cases}$$

Пусть  $y = x \rightarrow 0$ , тогда  $z \rightarrow 0$  и  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w(z)}{z} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4}{4x^4} = \frac{1}{2}$ . Если  $z = x \rightarrow 0$ , то  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w(z)}{z} = 0$ .

Следовательно,  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w(z)}{z}$  не существует и функция  $w$  не дифференцируема в точке  $z = 0$ . ▶

**72.** Доказать, что функция  $w = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 - 1)$ ,  $D_w = \mathbb{C}$ , является аналитической.

◀ Действительно, функции  $u = x^3 - 3xy^2$ ,  $v = 3x^2y - y^3 - 1$  дифференцируемы, и условия Коши—Римана выполняются:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 3x^2 - 3y^2, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy, & \frac{\partial v}{\partial x} &= 6xy, \\ \frac{dw}{dz} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + i6xy. \end{aligned}$$

**73.** Функция  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  имеет в точке  $z \in D_f$  свойства:

1)  $u$  и  $v$  — дифференцируемые функции;

2) существует  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$ .

Доказать, что либо  $f$ , либо  $\bar{f}$  дифференцируема в точке  $z$ .

◀ Поскольку  $\Delta w = \Delta u + i \Delta v$ ,  $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ , то

$$\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \sqrt{\frac{\Delta u^2 + \Delta v^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

По условию существует  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$ . Этот предел не зависит от способа стремления  $\Delta z$  к нулю.

Взяв  $\Delta z = \Delta x$ , получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}.$$

Если  $\Delta z = i \Delta y$ , то

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2}.$$

Следовательно,

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \quad (1)$$

Из дифференцируемости функций  $u$  и  $v$  в точке  $z = (x, y)$  следует, что их приращения в этой точке имеют вид

$$\Delta u = du + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}),$$

$$\Delta v = dv + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

Выражение  $\frac{\Delta u^2 + \Delta v^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u^2 + \Delta v^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} &= \frac{\left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \Delta x^2 + \left( \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) \Delta y^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} + \frac{o(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание равенство (1), имеем

$$\frac{\Delta u^2 + \Delta v^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} + o(1).$$

Поскольку  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}$ , то

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Последнее возможно лишь в случаях: а)  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ; б)  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ . В случае а) функция  $f$  дифференцируема, так как для нее выполняются условия Коши—Римана. В случае б) условиям Коши—Римана удовлетворяет функция  $\bar{f}$ . Таким образом, либо  $f$ , либо  $\bar{f}$  дифференцируема в точке  $z$ . ►

**74.** Пусть  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  — аналитическая в области  $D$  функция. Доказать, что если  $\forall z \in D \ u^2 + uv + v^2 = a$  ( $a = \text{const}$ ), то  $f \equiv \text{const}$  в  $D$ .

◀ Продифференцируем тождество  $u^2 + uv + v^2 = a$  по  $x$  и по  $y$ . Получим

$$(2u + v) \frac{\partial u}{\partial x} + (u + 2v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (2u + v) \frac{\partial u}{\partial y} + (u + 2v) \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Допустим, что существует точка  $z_0 \in D$ , в которой  $f'(z_0) \neq 0$ . Тогда система уравнений (1) относительно  $2u + v$ ,  $u + 2v$  имеет лишь тривиальное решение  $\forall z \in O_{z_0}$ , т.е.  $u = v \equiv 0$ , что противоречит предположению. Следовательно,  $\forall z \in D \ f'(z) = 0$ , т.е.  $f(z) \equiv \text{const}$  в  $D$ . ►

**75.** Пусть функция  $f$  является аналитической в области  $G$ . Доказать, что если  $|f(z)| \equiv \text{const}$  в  $G$ , то функция  $f$  также постоянна в  $G$ .

◀ Если  $|f(z)| = 0$  для всех  $z \in G$ , то  $f(z) = 0$  в каждой точке области  $G$ , т.е.  $f(z) = \text{const}$ . Пусть  $|f(z)| \equiv C \ \forall z \in G$ ,  $C \neq 0$  и  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \ \forall (x, y) \in G$ . Тогда в области  $G$  выполняется тождество

$$u^2(x, y) + v^2(x, y) \equiv C^2,$$

которое с помощью функции  $\bar{f}(z) = u(x, y) - iv(x, y)$  запишется как произведение  $f(z)\bar{f}(z) = C^2 \ \forall z \in G$ . Из последнего равенства следует, что  $f(z) \neq 0$  для всех  $z \in G$ , вследствие чего функция  $\bar{f}(z) = \frac{C^2}{f(z)}$  является аналитической в области  $G$ . Условия Коши—Римана для функций  $f$  и  $\bar{f}$  приводят к равенствам

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

в каждой точке области  $G$ . Значит, функции  $u$  и  $v$  постоянны в области  $G$ , следовательно  $f$  также постоянна в  $G$ . ►

**76.** Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D_f = G$ ,  $G$  — область,  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  и функции  $u, v$  дифференцируемы в точке  $z_0 = (x_0, y_0) \in G$ . Доказать, что множество всех предельных значений частного  $\frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z}$  при  $\Delta z \rightarrow 0$  есть либо точка, либо окружность.

◀ Если  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$ , то  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z} = f'(z_0)$  и  $f'(z_0)$  — единственное предельное значение указанного частного при  $\Delta z \rightarrow 0$ . Пусть  $f$  не дифференцируема в точке  $z_0$ . Поскольку в этой точке дифференцируемы функции  $u$  и  $v$ , то

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z} &= \frac{\Delta u(x_0, y_0) + i \Delta v(x_0, y_0)}{\Delta z} = \\ &= \frac{1}{\Delta z} \left( \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta z|) \right) + \frac{i}{\Delta z} \left( \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta z|) \right) = \\ &= \frac{1}{\Delta z} (A \Delta x + B \Delta y) + \frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z}, \end{aligned}$$

где  $A = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$ ,  $B = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}$ . Поскольку  $\Delta x = \frac{\Delta z + \Delta \bar{z}}{2}$ ,  $\Delta y = \frac{\Delta z - \Delta \bar{z}}{2i}$ , то после несложных преобразований получим:

$$\frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z} = A_1 + B_1 \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} + \frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z}, \quad (1)$$

где  $A_1$  и  $B_1$  — некоторые комплексные числа. Так как  $\left| \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} \right| = 1$ , то  $\frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} = e^{-2i\varphi}$ ,  $\varphi \in \text{Arg } \Delta z$ . Запишем соотношение (1) в виде

$$\frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z} - A_1 = B_1 e^{-2i\varphi} + \frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z}. \quad (2)$$

Поскольку  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z} = 0$ , то при каждом фиксированном  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) получим

$$\left| \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z} - A_1 \right| = |B_1|,$$

т. е. все частичные пределы частного  $\frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z}$  принадлежат окружности

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - A_1| = |B_1|\}. \blacktriangleright$$

**77.** Записать уравнения Коши—Римана для функции  $f = u + i v$  в полярных координатах  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

◀ Применяя правило дифференцирования сложных функций, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \varphi. \end{aligned}$$

Решив эту систему относительно  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Теперь запишем условия Коши—Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} = \frac{\partial v}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} = -\frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \quad (2)$$

Умножив (1) на  $\cos \varphi$ , (2) — на  $\sin \varphi$  и складывая полученное, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \quad (3)$$

Умножая (1) на  $-\sin \varphi$ , (2) — на  $\cos \varphi$ , сложим полученные результаты. Находим:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r} \quad (4)$$

Таким образом, уравнения Коши—Римана для функции  $f = u + iv$  в полярных координатах имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r}. \quad (5)$$

**78.** Доказать, что функция  $w = f(z) = z \operatorname{Re} z$ ,  $D_f = \mathbb{C}$  дифференцируема только в точке  $z = 0$ . Найти  $f'(0)$ .

◀ Поскольку  $f(z) = u + iv = x^2 + ixy$ , то  $u = x^2$ ,  $v = xy$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = x$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = x$ . Следовательно,  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow x = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow y = 0$ , т. е. условия Коши—Римана выполнены лишь в точке  $z = 0$ . По определению

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + ixy)(x - iy)}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + ixy}{x + iy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - ix^2y + ix^2y + xy^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0. \quad \blacktriangleright$$

**79.** Доказать, что для функции  $f(z) = \sqrt{|xy|}$ ,  $D_f = \mathbb{C}$  в точке  $z = 0$  выполняются условия Коши—Римана, но производная не существует.

◀ Если рассматривать функцию  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  в виде  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , то в данном случае  $u = \sqrt{|xy|}$ ,  $v = 0$ . По определению частных производных функции двух независимых переменных имеем

$$\frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x} = 0, \quad \frac{\partial u(0, 0)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0, y) - u(0, 0)}{y} = 0.$$

Так как  $v \equiv 0$ , то  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ . Следовательно, в точке  $z = 0$  выполняются условия Коши—Римана. Рассмотрим отношение  $\frac{\Delta f(0, \Delta z)}{\Delta z} = \frac{\sqrt{|xy|}}{x + iy}$ , т. к.  $\Delta f(0, \Delta z) = f(z) - f(0) = \sqrt{|xy|}$ ,  $\Delta z = z - 0 = x + iy$ . Если  $z = (x, 0)$ ,  $x \rightarrow 0$ , то  $\Delta z \rightarrow 0$  и  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(0, \Delta z)}{\Delta z} = 0$ . Пусть  $x \rightarrow 0$ ,  $x > 0$  и  $y = x$ . Тогда  $\Delta z \rightarrow 0$ , если  $x \rightarrow 0$  и  $\frac{\Delta f(0, \Delta z)}{\Delta z} = \frac{x}{x(1+i)} \rightarrow \frac{1-i}{2}$ . Таким образом,  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(0, \Delta z)}{\Delta z}$

не существует и функция  $f$  не имеет производной в точке  $z = 0$ . Здесь нет противоречия с теоремой о необходимом и достаточном условии дифференцируемости функции  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  в фиксированной точке. Поскольку функция  $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$  не дифференцируема в точке  $(0, 0)$ , то не выполнено одно из условий упомянутой теоремы. ▶

**80.** Доказать следующие утверждения:

1) если у функции  $w = f(z)$  в точке  $z$  существует предел  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( \operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right)$ , то частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial v}{\partial y}$  существуют и равны между собой;

2) если существует предел  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( \operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right)$ , то существуют частные производные  $\frac{\partial u}{\partial y}$  и  $\frac{\partial v}{\partial x}$ , причём  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ;

3) если заранее предположить, что функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы, то существование любого из пределов, указанных в п.п. 1) и 2), обеспечивает существование другого и, следовательно, дифференцируемость функции  $f$ .

◀ 1) Пусть  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$ . Тогда

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y} = \frac{(\Delta u + i \Delta v)(\Delta x - i \Delta y)}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\Delta u \Delta x + \Delta v \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} + i \frac{\Delta v \Delta x - \Delta u \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

$$\operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u \Delta x + \Delta v \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad \operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta v \Delta x - \Delta u \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Поскольку  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z}$  существует, то он не зависит от способа стремления  $\Delta z$  к нулю. Взяв  $\Delta z = \Delta x$  и  $\Delta z = i \Delta y$ , соответственно получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

2) Рассуждая аналогично, имеем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta u}{\Delta y} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

3) Пусть функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы и существует  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ . Тогда, по доказанному,

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ . Приращения  $\Delta u$  и  $\Delta v$  дифференцируемых функций  $u$  и  $v$  имеют вид

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta z|), \quad \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta z|).$$

Тогда

$$\operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u \Delta x + \Delta v \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y + (\Delta x + \Delta y) o(|\Delta z|) \right).$$

Поскольку  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ , то

$$\operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} + \frac{(\Delta x + \Delta y) o(|\Delta z|)}{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Из существования предела  $\operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z}$  при  $\Delta z \rightarrow 0$ , который равен  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , следует, что  $\left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$ , т. е.  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ . Поскольку для функции  $f$  выполнены условия Коши—Римана в точке  $z$ , то  $f$  дифференцируема в этой точке. ►

**81.** Найти множество точек  $Z$  плоскости  $\mathbb{C}$  при отображении  $w = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $c \neq 0$ , для которого: 1) коэффициент растяжения равен единице; 2) угол поворота равен нулю.

◀ 1) Имеем

$$|w'(z)| = \left| \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \right| = 1,$$

откуда

$$|ad - bc| = |cz + d|^2, \quad \text{или} \quad \left| z + \frac{d}{c} \right| = \frac{\sqrt{|ad - bc|}}{|c|}.$$

Таким образом,

$$Z = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z + \frac{d}{c} \right| = \frac{\sqrt{|ad - bc|}}{|c|} \right\}$$

— множество точек окружности радиуса  $\frac{\sqrt{|ad - bc|}}{|c|}$  с центром в точке  $z = -\frac{d}{c}$ .

2) По условию  $\arg w'(z) = 0$ , т. е.  $\arg(ad - bc) - \arg(cz + d)^2 = 0$ . Отсюда получаем

$$(cz + d)^2 = (ad - bc)r, \quad r > 0.$$

Таким образом,

$$z = -\frac{d}{c} + \frac{\sqrt{ad - bc}}{c} t, \quad -\infty < t < +\infty. \quad (1)$$

Множество  $Z$  — это множество точек прямой, заданной уравнением (1). ►

**82.** Пусть функция  $w = f(z)$  аналитическая в точке  $z_0$ ,  $f'(z_0) \neq 0$ , а гладкие кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  имеют свойство:  $|w(z)| = |w(z_0)|$ , если  $z \in \gamma_1$ ,  $\arg w(z) = \arg w(z_0)$ , если  $z \in \gamma_2$ . Доказать, что кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  пересекаются в точке  $z_0$  под прямым углом.

◀ Из условия задачи следует, что образом кривой  $\gamma_1$  при отображении  $f$  является дуга окружности  $\Gamma = \{w \in \mathbb{C} : |w| = |w(z_0)|\}$ , а образом кривой  $\gamma_2$  — отрезок луча, выходящего из начала координат под углом  $\arg w(z_0)$ . Отсюда следует, что образы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  пересекаются в точке  $w(z_0)$  под прямым углом, следовательно, кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  также пересекаются в точке  $z_0$  под прямым углом. ▶

**83.** Потенциальные линии заданы уравнением  $|z - a| = b$ ,  $a = a_1 + ia_2$ ,  $b > 0$ . Найти комплексный потенциал  $f(z)$  потока жидкости, а также скорость.

◀ Имеем

$$\ln |z - a| = \ln b = \text{const},$$

или  $\text{Re}(\ln(z - a)) = \text{const}$ . Таким образом

$$f(z) = \ln(z - a), \quad v = \overline{f'(z)} = \frac{1}{z - a}; \quad v(2a) = \frac{1}{a}. \quad \blacktriangleright$$

**84.** Пусть функция  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  является аналитической в замыкании области  $D$ , а  $G$  — образ области  $D$  при отображении  $f$ . Доказать, что если отображение  $f$  в области  $D$  однолистно, то для площади  $\mu(G)$  области  $G$  справедлива формула

$$\mu(G) = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy.$$

◀ Пусть  $z = x + iy$ ,  $w = f(z) = u + iv$ ,  $z \in D$ ,  $w \in G$ . Тогда функции  $u = \text{Re } f$ ,  $v = \text{Im } f$  осуществляют с помощью уравнений

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \quad (1)$$

биективное отображение области  $D$  на  $G$  (см. п. 4.4). Из курса математического анализа известно, что мера (площадь) жорданова множества  $G$  вычисляется по формуле

$$\mu(G) = \iint_D \left| \frac{D(u, v)}{D(x, y)} \right| dx dy, \quad (2)$$

где  $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$  — якобиан преобразования (1). В п. 4.4 показано, что  $\left| \frac{D(u, v)}{D(x, y)}(x, y) \right| = |f'(z)|^2$ . Следовательно,  $\mu(G) = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy$ . ▶

**85.** Найти площадь  $\mu(G)$  образа  $G$  области  $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, |\arg z| < \frac{\pi}{4}\}$ .

◀ По доказанной в предыдущем примере формуле получаем:

$$\mu(G) = \iint_D |3z^2|^2 dx dy = 9 \iint_D (x^2 + y^2)^2.$$

Полагая  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , имеем  $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$ ,  $1 < \rho < 2$ ,

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \rho, \quad \mu(G) = 18 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_1^2 \rho^5 d\rho = 18 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{6} \rho^6 \Big|_{\rho=1}^{\rho=2} = \frac{189\pi}{4}. \quad \blacktriangleright$$

### Упражнения для самостоятельной работы

1. Упростить выражение

а)  $\frac{\sqrt{1+x^2+ix}}{x-i\sqrt{1+x^2}}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ); б)  $\frac{z^2-iz-1}{2iz}$ , если  $z = e^{i\theta}$ .



2. Доказать, что для произвольного комплексного числа  $z \neq 0$  существует такое единственное число  $w$ , что  $|w| = k|z|$  ( $k > 0$ ) и  $\arg w = -\arg z$ . Найти это число.

3. Доказать, что ни при каких значениях  $m$  ( $m \in \mathbb{R}$ ) комплексное число вида

$$\log_2(m^2 - 13m + 44) - 2 + i\sqrt{\log_2 m - 3}$$

не может быть чисто мнимым.

4. Доказать тождества:

а)  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ ;

б)  $|1 - z_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1 z_2|)^2 - (|z_1| + |z_2|)^2$ ;

в)  $\left|z + \frac{1}{z}\right|^2 + i\left|z + \frac{i}{z}\right|^2 - (1+i)|z|^2 - \frac{1}{4}(1+i) = z$ ;

г)  $\left|\frac{z_1+z_2}{2} + z_3\right| + \left|\frac{z_1+z_2}{2} - z_3\right| = |z_1| + |z_2|$ , если  $z_1 z_2 = z_3^2$ ;

д)  $\sum_{k=1}^n \left|1 + \frac{k}{z}\right|^2 + \sum_{k=1}^n \left|1 - \frac{k}{z}\right|^2 = \frac{2n^2+9n+1}{3}$ , если  $|z^2| = n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;

е)  $\left|\frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = r$ , если  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$ ;

ж)  $\prod_{k=1}^{n-1} \left(e^{i \frac{2k\pi}{n}} - 1\right) = (-1)^{n-1} \cdot n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

5. Пусть  $z_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) и  $z_0$  — произвольные комплексные числа и  $z = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k$ . Доказать равенство

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |z_0 - z_k|^2 = |z_0 - z|^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |z_k - z|^2.$$

6. Пусть при всех  $z$ ,  $|z| < 1$ ,  $w(z) = z^2 + 2z + 5$ . Доказать, что

$$w(z_1) = w(z_2) \Leftrightarrow z_1 = z_2.$$

7. Пусть ни одно из чисел  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  не совпадает с  $z_4$ . Доказать, что если из чисел  $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$ ,  $\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}$ ,  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_4}$  два — чисто мнимые, то таковым является и третье.

Указание. Воспользоваться соотношением

$$|z_3 - z_4|^2 \operatorname{Re} \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} + |z_1 - z_4|^2 \operatorname{Re} \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_4} + |z_2 - z_4|^2 \operatorname{Re} \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_4} = 0.$$

8. Доказать, что

а) если  $z \neq -1$  и  $|z| = 1$ , то  $z = \frac{1+it}{1-it}$ , где  $t$  — некоторое действительное число;

б) всякое действительное число  $\alpha$  представимо в виде  $\alpha = i \frac{1+z}{1-z}$ , где  $z$  — некоторое комплексное число, причем  $|z| = 1$  и  $z \neq 1$ .

9. Представить в тригонометрической форме число  $z = (1 - \cos \alpha + i \sin \alpha)^n$ , где  $n$  — целое число, не равное нулю.

10. Найти суммы

$$S_n = 1 + \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} + \dots + \frac{\sin nx}{\sin^n x}, \quad \sigma_n = 1 + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} + \dots + \frac{\cos nx}{\sin^n x}.$$

Указание. Вычислить  $\sigma_n + i(S_n - 1)$ .

11. Пусть  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{C}$  и  $a \neq 0$ . Доказать, что

а) расстояние от начала координат до прямой  $az + a\bar{z} = 2b$  равно  $\frac{2|b|}{|a|}$ ;

б) расстояние от точки  $z_0 \in \mathbb{C}$  до прямой  $\bar{a}z + a\bar{z} = b$  равно  $\frac{|\operatorname{Re} a \bar{z}_0 - b|}{|a|}$ .

12. Доказать, что точки  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

13. Пусть  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  — соответственно вершины треугольника  $ABC$ , вписанного в единичную окружность. Доказать, что  $AC = AB$  (т. е. треугольник является равнобедренным) тогда и только тогда, когда  $z_1^2 = z_2 z_3$ .

14. Доказать, что  $\forall (n \in \mathbb{N}, z_k : |z_k| < 1)$  выполняется неравенство

$$\left| \prod_{k=1}^n (1 - z_k) \right| \geq 1 - \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

15. Доказать, что

а)  $|1 + z^2| \geq 2(\operatorname{Re} z)^2 \quad \forall z : -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1;$

б)  $\operatorname{Re} \frac{z_1}{z_2 + it} \geq \frac{\operatorname{Re} z_1 - |z_1|}{2 \operatorname{Re} z_2}$ , если  $z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z_2 > 0$ .

16. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} z^3 + w^5 = 0 \\ z^2 \cdot \bar{w}^4 = 1. \end{cases}$$

17. Показать, что корни квадратного уравнения  $az^2 + bz + c = 0$  с действительными  $a, b, c$  и отрицательным дискриминантом образуют пару взаимно сопряженных комплексных чисел.

18. Доказать, что корни  $z_1$  и  $z_2$  уравнения  $z^2 + 2pz + q = 0$  ( $p \in \mathbb{C}, q \in \mathbb{C}, q \neq p^2$ ) лежат на прямой, проходящей через начало координат, в том и только в том случае, когда или  $p = 0$ , или  $p \neq 0$ , а  $\frac{q}{p^2} \in \mathbb{R}$  и  $\frac{q}{p^2} < 1$ .

19. Найти множество точек  $z$  в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , удовлетворяющих следующим соотношениям:

а)  $|z - a| = R$ ; б)  $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1$ ; в)  $\arg z = \alpha, \alpha \in (-\pi, \pi]$ ; г)  $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1$ ;

д)  $\operatorname{Re}(z^2 - \bar{z}) = 0$ ; е)  $|z - i| + |z + i| = 4$ ; ж)  $\operatorname{Re}(1 + z) - |z| = 0$ .

20. Написать в комплексной форме уравнения следующих линий:

а)  $xy = 1$ ; б)  $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ ; в)  $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$ ; г)  $y^2 = 2x + 1$ ; д)  $\rho = \frac{1}{1 + \cos \varphi}$ .

21. Найти множества точек  $z$  на плоскости  $\mathbb{C}$ , которые определяются условиями:

а)  $r < |z - z_0| < R$ ; б)  $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1$ ; в)  $a < \operatorname{Re} z < b$ ; г)  $\frac{1}{4} < \operatorname{Re} \frac{1}{z} + \operatorname{Im} \frac{1}{z} < \frac{1}{2}$ ; д)  $0 < \arg \frac{i-z}{1+z} < \frac{\pi}{2}$ .

22. Среди комплексных чисел  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - 25i| \leq 15$ , найти то, главное значение аргумента которого наименьшее.

23. Доказать, что отличные от  $O$  и  $N$  точки  $A(z_1)$  и  $A(z_2)$  сферы Римана диаметрально противоположны тогда и только тогда, когда точки  $z_1$  и  $z_2$  плоскости  $\mathbb{C}$  связаны условием  $z_1 \bar{z}_2 = -1$ .

24. При каких значениях параметра  $\alpha$  следующие окружности комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  отвечают большим кругам на сфере Римана:

а)  $|z - \alpha| = \alpha$  ( $\alpha > 0$ ); б)  $|z - \frac{\alpha}{2}| = \alpha$  ( $\alpha > 0$ ); в)  $|z - i| = \alpha$  ( $\alpha > 0$ ); г)  $|z - 2\alpha i| = \alpha$  ( $\alpha > 0$ ).

25. Найти:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^2 \left( 1 - \cos \frac{3}{n} \right) + i(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n}) \sin \frac{1}{n} \right)$ ;

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1})$ , если  $|z| < 1$ .

26. Доказать, что предельные точки последовательности  $(c_n)$ , где  $c_n = \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{i}{k} \right)$  лежат на

окружности  $\gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi}} \right\}$ .

27. Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha \neq \beta, |\alpha| < 1, |\beta| < 1$ ) — заданные комплексные числа, а последовательность  $(z_n)$  определена рекуррентными соотношениями

$$z_n = (\alpha + \beta)z_{n-1} - \alpha\beta z_{n-2} \quad \forall n \geq 2.$$

Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ .

28. Пусть  $z_1 = a, z_2 = b$  ( $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$ ) и  $\frac{2}{z_n} = \frac{1}{z_{n-1}} + \frac{1}{z_{n+1}}$ . Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ .

29. Доказать, что если области  $D_1$  и  $D_2$  плоскости  $\mathbb{C}$  имеют общую точку, то  $D_1 \cup D_2$  также является областью.

30. Дана функция  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , где  $f(z) = \frac{z^2 - iz - 1}{2iz}$ ,  $z = e^{i\varphi}$  и  $\varphi$  — произвольное действительное число; а) доказать, что  $f$  — действительная функция от  $\varphi$ ; б) найти образ отрезка  $\gamma = \{\varphi \in \mathbb{R} : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\}$  при отображении  $f$ .

31. Для отображения  $w = \frac{1}{z}$  ( $w = u + iv, z = x + iy$ ) найти:

- а) образы линий: 1)  $x = C$ ; 2)  $y = C$ ; 3)  $x + y = 1$ ; 4)  $\arg z = \alpha$ ; 5)  $|z + i| = 1$ ; 6)  $y = |x|$ ;  
 б) образы множеств: 7) полосы, заключенной между прямыми  $x = 0$  и  $x = 1$ ; 8) полосы, заключенной между прямыми  $y = 0$  и  $y = 1$ ;  
 в) прообразы линий: 9)  $u = C$ ; 10)  $v = C$ .

32. Для отображения  $w = \frac{z-4}{z-1}$  найти прообразы множеств:

- а)  $W = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 2\}$ ; б)  $W = \{w \in \mathbb{C} : |w| \geq 1\}$ .

33. Доказать, что функция  $w = z^2 + 2z + 3$  однолистка в круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

34. Определить кривые и построить их графики:

- 1)  $z = z_0 + \alpha e^{it} + \beta e^{-it}$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ;  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ );

- 2)  $z = ate^{it}$ ,  $0 \leq t < +\infty$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ;

- 3)  $z = t^2 + \frac{i}{t^2}$ ,  $0 < t < +\infty$ ;

- 4)  $z = (\alpha + \beta)e^{it} - \beta e^{\frac{i\alpha + \beta}{\beta}t}$ , где  $0 < t < +\infty$ ,  $\alpha, \beta$  — положительные постоянные.

35. Найти (если существуют) пределы:

- 1)  $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2}{z-1}$ ; 2)  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-2i}{z+1}$ ; 3)  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2+1}{z-2i}$ ; 4)  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2+1}{z^4-1}$ ; 5)  $\lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{z^2}{x^2+y^2} + 2i \right)$ ;

- 6)  $\lim_{z \rightarrow 1-i} \bar{z}$ ; 7)  $\lim_{z \rightarrow -1} \arg z$ ; 8)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}}$ ; 9)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}$ .

36. Исследовать на непрерывность в областях существования следующие функции:

- 1)  $w = \operatorname{Im} z$ ; 2)  $w = \bar{z}$ ; 3)  $w = \begin{cases} x + iy, & \text{если } x \text{ или } y \text{ рациональные,} \\ 0, & \text{если } x \text{ и } y \text{ иррациональные.} \end{cases}$

- 4)  $w = \frac{z}{z^2+4}$ ; 5)  $w = \operatorname{tg}(\arg z)$ .

37. Пусть функции  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  дифференцируемы в области  $D$  и  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  для всех  $(x, y) \in D$ . Доказать, что для дифференцируемости функции  $f$  в точке  $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$  необходимо и достаточно, чтобы выражение  $du(x_0, y_0) + i dv(x_0, y_0)$  было пропорционально  $dz = dx + i dy$ .

38. Пусть функции  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  дифференцируемы в области  $D$ ,  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  для всех  $z = x + iy \in D$  и  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ ,  $\nabla v = \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$  — градиенты соответственно функций  $u$  и  $v$ . Доказать, что условия дифференцируемости функции  $f$  как функции комплексного переменного  $z \in \mathbb{C}$  выражаются равенствами

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0, \quad |\nabla u| = |\nabla v|,$$

где  $\langle \nabla u, \nabla v \rangle$  — скалярное произведение градиентов, а  $|\nabla u|$ ,  $|\nabla v|$  — их длины.

39. Доказать, что функция  $f(z) = \begin{cases} \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}, & \text{если } z \neq 0, \\ 0 & \text{при } z = 0 \end{cases}$  непрерывна в окрестности

точки  $z = 0$ , пределы  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)-f(0)}{z}$  существуют, если  $z$  стремится к нулю вдоль произвольной прямой, и равны между собой, однако  $f$  не дифференцируема в точке  $z = 0$ .

40. Исследовать на аналитичность в областях определения функции:

- 1)  $f(x + iy) = x + \frac{x}{x^2+y^2} + i \left( y - \frac{y}{x^2+y^2} \right)$ ; 2)  $f(z) = |z|^2 + 2z$ ; 3)  $f(z) = \frac{|z|+z}{2}$ .

41. Пусть все корни многочлена  $P(z)$  лежат в некотором круге. Доказать, что в этом же круге лежат и все корни его производной  $P'(z)$ .

42. Доказать, что если функции  $f$  и  $g$  являются аналитическими в точке  $z_0$  и  $f(z_0) = g(z_0) = 0$ , но  $g'(z_0) \neq 0$ , то  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$ . Найти  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{1+z^6}{1+z^{10}}$ .

43. Пусть функция  $f$  — аналитическая в области  $D$ ,  $u = \operatorname{Re} f$ ,  $v = \operatorname{Im} f$ . Доказать, что линии  $u = \operatorname{const}$  всегда пересекают линии  $v = \operatorname{const}$  перпендикулярно в тех точках, где  $f'(z) \neq 0$ .

44. Определить аналитические функции  $f$ , если

- а)  $u = x^2 - y^2 + 2x$ ,  $f(i) = -1 + 2i$ ; б)  $v = e^x \sin y + 2xy + 5y$ ,  $f(0) = 10$ .

## Элементарные функции в комплексной плоскости

В этой главе рассматриваются элементарные функции комплексного переменного, их основные свойства и конформные отображения, осуществляемые ими.

### § 1. Дробно-линейные функции и их свойства

#### 1.1. Определение дробно-линейной функции. Конформность отображения.

Дробно-линейными называются функции вида

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1)$$

где  $a \in \mathbb{C}$ ,  $b \in \mathbb{C}$ ,  $c \in \mathbb{C}$ ,  $d \in \mathbb{C}$  и выполняется условие  $ad - bc \neq 0$ . Это условие исключает случай вырождения функции (1) в постоянную величину. При  $c = 0$ ,  $d \neq 0$  функция (1) становится линейной:

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = Az + B.$$

Дробно-линейная функция  $w$  определена для всех  $z \in \overline{\mathbb{C}}$ , за исключением двух точек:  $z_1 = -\frac{d}{c}$  и  $z_2 = \infty$ . При  $c = 0$  эти точки совпадают. Продолжим функцию  $w$  на всю расширенную плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$ , полагая  $w(z_1)$  и  $w(\infty)$  равными предельным значениям  $w$  в этих точках:

$$w(z_1) = \infty, \quad w(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Тогда дробно-линейная функция станет непрерывной в  $\overline{\mathbb{C}}$ , осуществляя непрерывное отображение  $\overline{\mathbb{C}}$  на  $\overline{\mathbb{C}}$ . Рассматривая (1) как уравнение и решив его относительно  $z$ , получим

$$z = -\frac{dw + b}{cw - a} \quad (2)$$

Получили опять дробно-линейную функцию, определенную в плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$ , поскольку  $z = \infty$  при  $w = \frac{a}{c}$  и  $z = -\frac{d}{c}$  при  $w = \infty$  согласно с принятым выше условием. Таким образом, получили теорему.

**Теорема 1.** Всякая дробно-линейная функция (1) осуществляет гомеоморфное (т. е. взаимно однозначное и непрерывное) отображение  $\overline{\mathbb{C}}$  на  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Производная дробно-линейной функции

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

не равна нулю и конечна для всех  $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2\}$ . Поэтому отображение, осуществляемое дробно-линейной функцией  $w$ , является конформным для всех  $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2\}$ . Чтобы установить свойство конформности также в точках  $z_1$  и  $z_2$ , введем в рассмотрение понятие угла в бесконечно удаленной точке.

**Определение.** Под углом в точке  $z = \infty$  между двумя путями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , проходящими через бесконечность и имеющими в своих сферических изображениях касательные в полюсе  $N$ , понимаем угол между образами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  этих путей при отображении  $z \mapsto \frac{1}{z} = Z$  в точке  $Z = 0$  (при условии, что  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  имеют касательные в точке  $Z = 0$ ) (рис. 29).

Пусть  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — два пути, проходящие через точку  $z = -\frac{d}{c}$  и пересекающиеся в ней под углом  $\alpha$  (считая, что пути имеют касательные в этой точке). Их образы  $\Gamma_1^*$  и  $\Gamma_2^*$  при отображении (1) будут проходить через бесконечно удаленную точку. Угол между ними в бесконечности по определению равен углу между их образами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  при отображении  $W = \frac{1}{w}$ . Поскольку

$$W = \frac{cz + d}{az + b}, \quad (3)$$

то пути  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  можно рассматривать как образы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  при отображении (3). Это отображение является дробно-линейным с производной

$$\frac{dW}{dz} = \frac{bc - ad}{(az + b)^2},$$

отличной от нуля в точке  $z = -\frac{d}{c}$ , т. е. отображение (3) конформное в точке  $z = -\frac{d}{c}$ , и угол между  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  в точке  $W = 0$  равен  $\alpha$ . Отсюда

имеем, что угол между  $\Gamma_1^*$  и  $\Gamma_2^*$  на бесконечности равен  $\alpha$ . Конформность отображения (1) в точке  $z = -\frac{d}{c}$  доказана. Для доказательства конформности отображения (1) в точке  $z = \infty$  применим приведенные выше рассуждения к обратной функции (2) в точке  $w = \frac{a}{c}$ . В результате получим следующую теорему.

**Теорема 2.** Дробно-линейное отображение конформное везде на  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что композиция дробно-линейных отображений опять есть дробно-линейное отображение. Поэтому справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.** Совокупность  $\Lambda$  всех дробно-линейных отображений образует группу, если за групповую операцию принять композицию отображений.

Доказательство состоит в непосредственной проверке групповых аксиом (ассоциативность, существование единицы и существование обратного элемента).

## 1.2. Геометрические свойства дробно-линейных отображений.

Рассмотрим следующие четыре частных случая дробно-линейных отображений:

1) параллельный перенос на вектор  $h$

$$w = z + h;$$

2) поворот вокруг начала координат на угол  $\theta$

$$w = e^{i\theta} z;$$

3) подобие с коэффициентом подобия  $r$  ( $r > 0$ ) и центром подобия в точке  $z = 0$

$$w = rz;$$

4) обратное отображение

$$w = \frac{1}{z}.$$

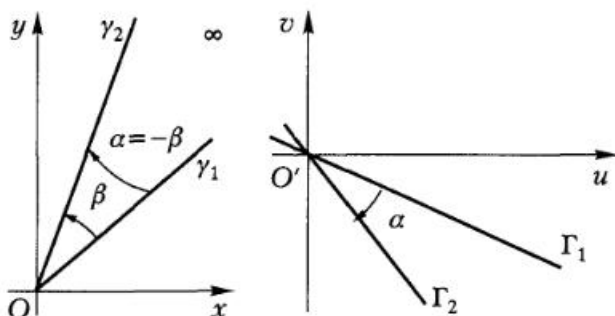


Рис. 29

Покажем, что любое дробно-линейное отображение можно получить в результате композиции нескольких отображений, каждое из которых является одним из четырех рассмотренных:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + w_4 \quad (\text{параллельный перенос});$$

$$w_4 = \left(b - \frac{ad}{c}\right) \frac{1}{cz + d} = \left(b - \frac{ad}{c}\right) w_3 \quad (\text{подобие и поворот});$$

$$w_3 = \frac{1}{cz + d} = \frac{1}{w_2} \quad (\text{обратное отображение});$$

$$w_2 = cz + d = w_1 + d \quad (\text{параллельный перенос});$$

$$w_1 = cz \quad (\text{подобие и поворот}).$$

Итак, свойства, справедливые для указанных четырех отображений, можно в ряде случаев перенести на общее дробно-линейное отображение. Таким образом получается, например, круговое свойство дробно-линейных отображений.

**Теорема 1** (круговое свойство). *Любое дробно-линейное отображение преобразует каждую окружность на  $\bar{C}$  в окружность на  $\bar{C}$ , где под окружностью на  $\bar{C}$  понимаем всякую окружность или прямую на комплексной плоскости.*

◀ Для отображений поворота, подобия, параллельного переноса круговое свойство очевидно. Докажем его справедливость для обратного отображения.

Каждую окружность на плоскости  $\bar{C}$  можно задать уравнением

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0. \quad (1)$$

Полагая  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ , перепишем (1) в виде

$$Az\bar{z} + B_1z + C_1\bar{z} + D = 0, \quad (2)$$

где  $B_1 = \frac{1}{2}(B - iC)$ ,  $C_1 = \frac{1}{2}(B + iC)$ .

Чтобы получить уравнение образа окружности (2) при обратном отображении, полагаем в (2)  $z = \frac{1}{w}$ . Получим

$$A + B_1\bar{w} + C_1w + Dw\bar{w} = 0.$$

Рис. 30

Это уравнение вида (2) и, следовательно, является уравнением окружности на плоскости  $\bar{C}$ . ▶

Чтобы сформулировать второе геометрическое свойство дробно-линейных отображений, введем в рассмотрение понятие симметричных точек относительно окружности.

**Определение 1.** Точки  $z$  и  $z^*$  называются симметричными относительно окружности (конечного радиуса) на  $\bar{C}$ , если они лежат на одном и том же луче, выходящем из центра окружности  $z_0$ , а произведение их расстояний от центра равно квадрату радиуса  $R^2$  данной окружности (рис. 30).

Имеем

$$\arg(z - z_0) = \arg(z^* - z_0), \quad |z - z_0||z^* - z_0| = R^2, \\ z^* - z_0 = \frac{R^2}{|z - z_0|} e^{i \arg(z - z_0)} = \frac{R^2}{|z - z_0| e^{-i \arg(z - z_0)}} = \frac{R^2}{\overline{z - z_0}}.$$

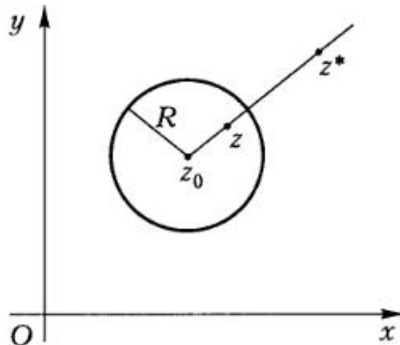
Отсюда

$$z^* = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z - z_0}}. \quad (3)$$

В частности, при  $z_0 = 0$ ,  $R = 1$  получаем  $z^* = \frac{1}{\bar{z}}$ .

**Определение 2.** Точки  $z$  и  $z^*$  назовем симметричными относительно прямой (т. е. окружности бесконечного радиуса), если они лежат на одном и том же перпендикуляре к этой прямой, на одинаковом расстоянии от нее, но с разных сторон.

Докажем основное свойство симметричных точек, полностью характеризующее их.





**Теорема 2.** Для того чтобы точки  $z$  и  $z^*$  были симметричными относительно окружности  $\Gamma$ , необходимо и достаточно, чтобы любая окружность  $\gamma$  на  $\bar{\mathbb{C}}$ , проходящая через них, была ортогональна  $\Gamma$ .

◀ Необходимость. Пусть точки  $z$  и  $z^*$  симметричны относительно окружности  $\Gamma$  и  $\gamma$  — произвольная окружность, проходящая через  $z$  и  $z^*$  (рис. 31).

Проведем через точку  $z_0$  касательную к окружности  $\gamma$ . По известной теореме квадрат длины отрезка этой касательной  $|\zeta - z_0|^2$  равен произведению длины отрезка секущей  $|z^* - z_0|$  на длину его внешней части  $|z - z_0|$ , т. е.  $|\zeta - z_0|^2 = |z - z_0||z^* - z_0|$ . Так как  $z$  и  $z^*$  симметричны относительно  $\Gamma$ , то  $|\zeta - z_0| = R$ . Таким образом, отрезок касательной к  $\gamma$  является радиусом окружности  $\Gamma$ , т. е.  $\gamma$  ортогональна  $\Gamma$ .

Достаточность. Пусть точки  $z$  и  $z^*$  имеют свойство: любая окружность  $\gamma$ , проходящая через них, ортогональна  $\Gamma$ . Тогда:

1) точки  $z$  и  $z^*$  лежат на одном луче с вершиной  $z_0$  — центром окружности  $\Gamma$ . Это следует из того, что в качестве  $\gamma$  можно взять прямую, которая должна быть ортогональной  $\Gamma$  и, следовательно, проходит через центр  $z_0$  окружности  $\Gamma$ .

2)  $|z - z_0||z^* - z_0| = |\zeta - z_0|^2 = R^2$ , т. е. точки  $z$  и  $z^*$  симметричны относительно  $\Gamma$ . ▶

Из доказанного свойства симметричных точек вытекает, что в случае, когда окружность  $\Gamma$  вырождается в прямую линию, симметрия относительно окружности превращается в обычную симметрию.

Доказанная теорема предоставляет возможность дать другое определение симметричных точек.

**Определение 3.** Точки  $z$  и  $z^*$  называются симметричными относительно окружности  $\Gamma$  на плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$ , если любая окружность  $\gamma$ , проходящая через них, ортогональна  $\Gamma$ .

Отображение  $z \mapsto z^*$  называется инверсией.

**Теорема 3** (об инвариантности симметричных точек при дробно-линейном отображении). Произвольное дробно-линейное отображение переводит каждую пару точек  $z$  и  $z^*$ , симметричных относительно некоторой окружности  $\Gamma \subset \bar{\mathbb{C}}$ , в точки  $w$  и  $w^*$ , симметричные относительно окружности  $\Gamma^*$ , являющейся образом окружности  $\Gamma$  при данном отображении.

◀ Проведем через точки  $w$  и  $w^*$  произвольную окружность  $\gamma^*$ . Ее прообраз  $\gamma$  в плоскости  $z$ , согласно теореме 2, ортогонален окружности  $\Gamma$ . В связи с конформностью дробно-линейного отображения окружности  $\gamma^*$  и  $\Gamma^*$  ортогональные. Тогда, по теореме 2, точки  $w$  и  $w^*$  симметричны относительно  $\Gamma^*$ . ▶

### 1.3. Дробно-линейные изоморфизмы и автоморфизмы.

В формулу, задающую дробно-линейное отображение  $L$

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (1)$$

входит четыре комплексных параметра  $a, b, c, d$ . В действительности же, отображение (1) зависит от трех параметров, поскольку числитель и знаменатель (1) можно разделить на один из отличных от нуля параметров. Поэтому естественно ожидать, что посредством дробно-линейного преобразования три заданные точки единственным образом преобразуются в три заданные.

**Теорема 1.** Какими бы ни были три разных точки  $z_1 \in \bar{\mathbb{C}}$ ,  $z_2 \in \bar{\mathbb{C}}$ ,  $z_3 \in \bar{\mathbb{C}}$  и три разных точки  $w_1 \in \bar{\mathbb{C}}$ ,  $w_2 \in \bar{\mathbb{C}}$ ,  $w_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ , существует, и притом единственное, такое дробно-линейное отображение  $L$ , что  $L(z_k) = w_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

◀ Существование: а) Пусть  $z_k \in \bar{\mathbb{C}}$ ,  $w_k \in \bar{\mathbb{C}}$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Рассмотрим дробно-линейное отображение, переводящее точки  $z_1, z_2, z_3$  и  $w_1, w_2, w_3$  соответственно в точки  $0, \infty, 1$  плоско-

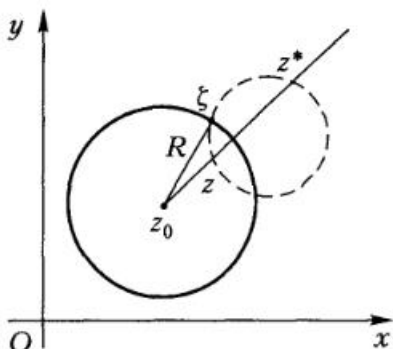


Рис. 31

сти  $\zeta$ :

$$L_1: \zeta = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}, \quad L_2: \zeta = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}.$$

Очевидно, что отображение  $L = L_2^{-1} \circ L_1$  является искомым,  $L: w = w(z)$ ,  $w(z_k) = w_k$ . Его можно найти из соотношения

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}. \quad (2)$$

б) Если одна из точек  $z_i$  или  $w_j$  или одна точка  $z_i$  и одна точка  $w_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) бесконечно удаленная, то формула (2) остается в силе. В этом случае лишь требуется числитель и знаменатель дроби, где появляется эта точка (каждая точка  $z_i$  и  $w_j$  входит в (2) дважды: один раз в числитель, второй раз — в знаменатель), заменить единицей. Например, пусть  $z_1 = w_1 = \infty$ . Тогда (2) примет вид

$$\frac{z_3 - z_2}{z - z_2} = \frac{w_3 - w_2}{w - w_2}.$$

**Единственность.** Пусть кроме отображения  $L$  существует такое дробно-линейное отображение  $\lambda$ , что  $\lambda(z_k) = w_k$ . Рассмотрим дробно-линейное отображение  $\tilde{L} = L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1}$ . Оно оставляет неподвижными точки  $0, \infty, 1$ . Из  $\tilde{L}(\infty) = \infty \Rightarrow \tilde{L}(z) = az + b$ , из  $\tilde{L}(0) = 0 \Rightarrow b = 0$ , из  $\tilde{L}(1) = 1 \Rightarrow a = 1$ . Следовательно,  $\tilde{L}(z) = z$ , т.е.  $L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1} = E$ , где  $E$  — тождественное отображение. Отсюда имеем  $\lambda = L_2^{-1} L_1 = L$ . ►

**Следствие.** Любую окружность  $\gamma \subset \mathbb{C}$  можно посредством дробно-линейного отображения преобразовать в любую другую окружность  $\gamma^* \subset \mathbb{C}$ .

Действительно, для этого достаточно перевести три точки окружности  $\gamma$  в три точки окружности  $\gamma^*$ . Из кругового свойства дробно-линейного отображения, а также из того, что три точки определяют единственную окружность, следует утверждение.

Дробно-линейное отображение области  $D$  на область  $D^*$  называется *дробно-линейным изоморфизмом*, а области  $D$  и  $D^*$ , для которых такой изоморфизм существует, называются *дробно-линейно изоморфными*.

Область  $K \subset \bar{\mathbb{C}}$  называется *кругом*, если ее граница является окружностью на  $\bar{\mathbb{C}}$ . Следовательно, это может быть круг в обычном понимании, или внешность такого круга, а также полуплоскость. Любая окружность  $\gamma$  плоскости  $z$  разделяет  $\bar{\mathbb{C}}$  на два круга  $K_1$  и  $K_2$ . В свою очередь окружность  $\gamma^* = L(\gamma)$  плоскости  $w$  разбивает  $\bar{\mathbb{C}}$  на два круга  $K_1^*$  и  $K_2^*$ . Из топологических соображений ясно, что возможны два случая: а)  $L(K_1) = K_1^*$ ,  $L(K_2) = K_2^*$ ; б)  $L(K_1) = K_2^*$ ,  $L(K_2) = K_1^*$ .

Чтобы выяснить, какой из этих двух случаев выполняется, достаточно найти образ любой точки круга  $K_1$  (или круга  $K_2$ ). Можно также воспользоваться так называемым правилом обхода, которое состоит в следующем.

Зафиксируем на окружности  $\gamma$  три точки  $z_1, z_2, z_3$ . Их образами соответственно будут точки  $w_1, w_2, w_3$ . Три точки на окружности устанавливают на ней вполне определенное направление обхода. Используя свойство сохранения углов при конформном отображении, можно показать, что при обходе окружности  $\gamma$  и  $\gamma^*$  в направлениях, определенных точками  $z_i$  и  $w_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), области, соответствующие друг другу, будут размещены с одной и той же стороны. Теперь легко убедиться в следующем.

**Теорема 2.** Любые два круга на плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$  дробно-линейно изоморфны.

Найдем, например, все дробно-линейные изоморфизмы верхней полуплоскости  $Z^+ = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z > 0\}$  на единичный круг  $K = \{w \in \mathbb{C}: |w| < 1\}$ .

Пусть  $a$  ( $\operatorname{Im} a > 0$ ) — точка верхней полуплоскости  $Z^+$ , которая при данном отображении переходит в центр круга  $K$   $w = 0$ . Точка  $\bar{a}$ , согласно с инвариантностью симметричных точек, перейдет при дробно-линейном отображении в точку  $w = \infty$ , симметричную точке  $w = 0$  относительно окружности  $\gamma = \{w \in \mathbb{C}: |w| = 1\}$ . Очевидно, что искомое отображение имеет вид

$$w = k \frac{z - a}{z - \bar{a}}. \quad (3)$$

При  $z = x$  имеем  $|z - a| = |z - \bar{a}|$ . Для того чтобы ось  $Ox$  отображалась на единичную окружность, необходимо, чтобы  $|k| = 1$ , т.е.  $k = e^{i\theta}$ .

Итак, все дробно-линейные изоморфизмы верхней полуплоскости  $Z^+$  на единичный круг определяются формулой

$$w = e^{i\theta} \frac{z - a}{z - \bar{a}}, \quad (4)$$

где  $a$  — произвольная точка верхней полуплоскости ( $\operatorname{Im} a > 0$ ), а  $\theta$  — произвольное действительное число. Имеем также  $w(\infty) = e^{i\theta}$ .

Установлено, что вся совокупность дробно-линейных изоморфизмов верхней полуплоскости на единичный круг зависит от трех действительных параметров, а именно  $\theta$ ,  $\operatorname{Re} a$  и  $\operatorname{Im} a$ .

Дробно-линейный изоморфизм области на себя назовем дробно-линейным автоморфизмом. Очевидно, что совокупность всех дробно-линейных автоморфизмов какой-нибудь области образует группу, которая является подгруппой группы  $\Lambda$  всех дробно-линейных отображений. Так,

1) совокупность всех дробно-линейных автоморфизмов  $\mathbb{C}$  совпадает с  $\Lambda$ ,

2) совокупность дробно-линейных автоморфизмов  $\mathbb{C}$  совпадает с подгруппой (целых) линейных преобразований  $z \mapsto az + b$ ;

3) подгруппа автоморфизмов единичного круга  $K = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$  имеет вид

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad |a| < 1 \quad (5)$$

и зависит от трех действительных параметров: двух координат точки  $a$  и числа  $\theta$ .

Рассмотрим примеры.

1. Найти образ оси  $Oy$  при отображении  $w = \frac{z + ia}{-z + ia}$ ,  $a \neq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

◀ Имеем  $w(0) = 1$ ,  $w(\infty) = -1$ ,  $w(ia) = \infty$ . Три точки  $-1$ ,  $1$ ,  $\infty$  на плоскости  $w$  определяют действительную ось. ▶

2. Найти образ отрезка с концами в точках  $z_1 = -1 + 2i$ ,  $z_2 = 1 + 2i$  при отображении

$$w = \frac{2z + i}{iz + 2}.$$

◀ Поскольку  $w(z_1) = -5 - 2i$ ,  $w(z_2) = 5 - 2i$ ,  $w(2i) = \infty$ , то образом прямой  $y = 2$ , которой принадлежит данный отрезок, будет прямая  $\operatorname{Im} w = -2$ . Конечный отрезок  $[z_1, z_2]$  переходит в отрезок, содержащий бесконечно удаленную точку, с концами  $w_1 = -5 - 2i$ ,  $w_2 = 5 - 2i$ . ▶

3. Найти линию  $z$ -плоскости, образом которой при отображении  $w = \frac{\sqrt{2}(z - 1 - i)}{2z - 1 - i}$  является единичная окружность  $\gamma = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ .

◀ Имеем  $|w| = 1 \Rightarrow w\bar{w} = 1$ . Исходя из этого, получаем  $\frac{2(z - 1 - i)(\bar{z} - 1 + i)}{(2z - 1 - i)(2\bar{z} - 1 + i)} = 1$ , откуда  $z\bar{z} = 1$ , т.е. искомый прообраз — единичная окружность  $\gamma' = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . ▶

4. Доказать, что  $|a| = |c| > 0$  является необходимым и достаточным условием того, что функция  $w = \frac{dz - b}{a - cz}$  переводит окружность  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  в прямую.

◀ Необходимость. Пусть заданная функция переводит окружность  $\gamma$  в прямую. Прообразом точки  $w = \infty$  является точка  $z = \frac{a}{c}$ , поэтому  $|\frac{a}{c}| = 1$ .

Достаточность. Пусть  $|a| = |c| > 0$ . Дробно-линейная функция  $z = \frac{aw + b}{cw + d}$  переводит  $\infty$  в точку  $\frac{a}{c}$ , которая, согласно условию, лежит на единичной окружности. А поскольку точка, лежащая на единичной окружности, перешла в бесконечность, то прообразом единичной окружности является прямая. ▶

5. Построить дробно-линейный автоморфизм верхней полуплоскости, при котором точки  $z = 0$ ,  $z = -1$  остаются неподвижными.

◀ Пусть  $w = L(z)$  — искомый автоморфизм. Имеем  $L(0) = 0$  и  $L(-1) = -1$ . Пусть, далее,  $L(a) = b$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ). Тогда, по правилу обхода,  $a$  и  $b$  должны удовлетворять одному из следующих условий: 1)  $\{a, b\} \notin [-1, 0]$ ; 2)  $\{a, b\} \in [-1, 0]$ .

По формуле (2), п. 1.3, получаем

$$w = \frac{(a + 1)bz}{(a - b)z + a(b + 1)}. \quad \blacktriangleright$$

6. Найти образ единичного круга  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  и его верхнего полуокружности при отображении  $w = \frac{3-2z}{4z+8}$ .

◀ Согласно данной формуле  $w(-1) = \frac{5}{4}$ ,  $w(1) = \frac{1}{12}$ . Поскольку коэффициенты дробно-линейного отображения действительные числа, то действительная ось перейдет в действительную ось. образом единичной окружности будет окружность, для которой отрезок  $[\frac{1}{12}, \frac{5}{4}]$  является диаметром. Принимая во внимание, что  $w(0) = \frac{3}{8}$ , единичный круг отображается на круг

$$K_1 = \{w \in \mathbb{C} : |w - \frac{7}{12}| < \frac{7}{12}\}.$$

По правилу обхода устанавливаем, что образом верхнего полуокружности будет нижний полуокруг. ▶

7. Найти функцию, отображающую круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  на круг  $K^* = \{w \in \mathbb{C} : |w - i| < 1\}$  и переводящую точки 0 и 1 соответственно в точки  $\frac{1}{2}$  и 0.

◀ По формуле (3), п. 1.2, находим точку  $w^*$ , симметричную точке  $w = \frac{1}{2}$ :

$$w^* = i + \frac{1}{\frac{i}{2} - i} = -i.$$

Искомое отображение находим по соответствию трех пар точек

$$w(0) = \frac{i}{2}, \quad w(1) = 0, \quad w(\infty) = -i.$$

Окончательно получаем

$$w = \frac{i - iz}{z + 2}. \quad \blacktriangleright$$

8. Построить дробно-линейную функцию, переводящую точки множества  $Z = \{-1, i, 1 + i\}$  соответственно в точки множества  $W = \{i, \infty, 1\}$ . Найти образ области

$$D = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{1-i}{2}\right| > \sqrt{\frac{5}{2}}\right\}.$$

◀ По формуле (3), п. 1.1, имеем

$$\frac{z+1}{z-i} \cdot \frac{1+i-i}{1+i+1} = \frac{w-i}{1-i}.$$

Отсюда

$$w = \frac{(1+2i)z + 6 - 3i}{5(z-i)}.$$

Принимая во внимание, что точки  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = i$ ,  $z_3 = 1 + i$  лежат на окружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1-i}{2}| = \sqrt{\frac{5}{2}}\}$  и окружность  $\gamma$  переходит в прямую  $u + v = 1$ , по правилу обхода устанавливаем, что образом области  $D$  является полуплоскость  $P = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + v > 1\}$ . ▶

9. Найти дробно-линейную функцию, отображающую правую полуплоскость без круга  $\bar{K} = \{z \in \mathbb{C} : |z - h| \leq R\}$ ,  $h > R$  на кольцо  $K_1 = \{w \in \mathbb{C} : \rho < |w| < 1\}$  так, что мнимая ось переходит в единичную окружность. Найти  $\rho$ .

◀ Найдем точки  $x$  и  $x^*$  действительной оси плоскости  $z$ , симметричные одновременно относительно мнимой оси и окружности  $\partial K$ . Очевидно, что  $x^* = -x$ . Считая  $x > 0$ , по формуле (3), п. 1.2, при  $z = x$  и  $x^* = -x$  находим  $x = \sqrt{h^2 - R^2}$ . Строим искомое отображение как дробно-линейную функцию, переводящую точки  $x$  и  $x^*$  соответственно в 0 и  $\infty$ :

$$w = k \frac{z - \sqrt{h^2 - R^2}}{z + \sqrt{h^2 - R^2}}.$$

Из условия  $|w(iy)| = 1$  находим, что  $|k| = 1$ . Принимая во внимание, что образ точки  $z = h - R$  лежит на окружности  $\gamma = \{w \in \mathbb{C} : |w| = \rho\}$ , имеем

$$\rho = \frac{|h - R - \sqrt{h^2 - R^2}|}{|h - R + \sqrt{h^2 - R^2}|} = \left| \frac{(h - R)^2 - 2(h - R)\sqrt{h^2 - R^2} + h^2 - R^2}{(h - R)^2 - h^2 + R^2} \right| =$$

$$= \left| \frac{(h - R)(h - \sqrt{h^2 - R^2})}{R(R - h)} \right| = \left| \frac{\sqrt{h^2 - R^2} - h}{R} \right| = \frac{h - \sqrt{h^2 - R^2}}{R}. \blacktriangleright$$

**10.** Найти общий вид дробно-линейной функции, имеющей две неподвижные точки  $z_1$  и  $z_2$ .

◀ 1)  $z_1 = 0, z_2 = \infty$ , тогда  $w = Az, A \in \mathbb{C}$ .

2) Полагая  $W = \frac{w - z_1}{w - z_2}, Z = \frac{z - z_1}{z - z_2}$  и принимая во внимание 1), находим:

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = A \frac{z - z_1}{z - z_2}. \blacktriangleright$$

**11.** При каких значениях  $A$  дробно-линейное отображение с двумя неподвижными точками  $z_1$  и  $z_2$  (см. пример 10) переводит саму в себя любую окружность, проходящую через неподвижные точки, с сохранением направления обхода? Показать, что при этом любая окружность, ортогональная к окружности, проходящей через неподвижные точки, переходит в окружность также с сохранением направления обхода.

◀ Для того чтобы отображение  $w = Az$  переводило прямые  $y = kx$  сами в себя с сохранением обхода, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство  $A > 0$ . Это же условие сохраняется и для общего случая, о чем свидетельствует общий случай 2) в примере 10. Второе утверждение задачи непосредственно следует из конформности дробно-линейных отображений, а именно, свойства сохранения углов по величине и направлению отсчета. ▶

**12.** Доказать, что прямая, проходящая через неподвижные точки отображения  $w = \frac{iz + 2}{z - i}$  переходит в себя.

◀ Неподвижные точки отображения  $w$  являются решениями уравнения  $z^2 - 2iz - 2 = 0$ ,  $z_{1,2} = \pm 1 + i$ . Точка  $i$ , которая указанным отображением переводится в  $\infty$ , лежит на прямой, проходящей через неподвижные точки  $z_1, z_2$ . ▶

**13.** Последовательность  $(z_n)$  определена так:  $z_0$  — известное,  $z_{n+1} = f(z_n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_0$ , где  $f$  — дробно-линейная функция с двумя неподвижными точками. Исследовать ее на сходимость.

◀ Пусть  $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}$  — неподвижные точки отображения  $f$ . Принимая во внимание формулу, полученную в примере 10, имеем

$$\frac{z_{n+1} - \alpha}{z_{n+1} - \beta} = A \frac{z_n - \alpha}{z_n - \beta} = A^2 \frac{z_{n-1} - \alpha}{z_{n-1} - \beta} = \dots = A^{n+1} \frac{z_0 - \alpha}{z_0 - \beta} = |A|^{n+1} e^{i(n+1)\theta} \frac{z_0 - \alpha}{z_0 - \beta}, \quad \theta = \arg A.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_{n+1} - \alpha}{z_{n+1} - \beta} = \begin{cases} 0, & \text{если } |A| < 1, \\ \infty, & \text{если } |A| > 1, \end{cases}$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \begin{cases} \alpha, & \text{если } |A| < 1, \\ \beta, & \text{если } |A| > 1. \end{cases}$$

При  $|A| = 1$   $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  не существует. ▶

**14.** Найти центр  $w_0$  и радиус  $R$  окружности, на которую функция  $w = \frac{z - z_1}{z - z_2}$ ,  $\operatorname{Im} z_2 \neq 0$ , отображает действительную ось.

◀ Из того, что  $w(z_2) = \infty$ , следуют равенства  $w_0 = w(\bar{z}_2) = \frac{\bar{z}_2 - z_1}{\bar{z}_2 - z_2}$ . Поскольку  $w(\infty) = 1$ , то точка  $w = 1$  принадлежит окружности и, следовательно,  $R = |w_0 - 1| = \frac{|z_2 - z_1|}{2|\operatorname{Im} z_2|}$ . ▶

**15.** Единичный круг отображается на себя так, что точка  $z_0 \neq 0$  переходит в центр круга. Доказать, что при этом единичная полуокружность отображается на полуокружность тогда и только тогда, когда ее концы лежат на диаметре, проходящем через точку  $z_0$ .

◀ Отображение единичного круга на себя имеет вид

$$w = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

Диаметр окружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , проходящий через точку  $z_0$ , переходит в диаметр окружности  $\gamma' = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$  согласно тому, что  $w(z_0) = 0$ ,  $w\left(\frac{1}{\bar{z}_0}\right) = \infty$ . Итак, единичная полуокружность, концы которой лежат на диаметре, проходящем через точку  $z_0$ , перейдет в полуокружность, поскольку ее концы также лежат на диаметре. Любой другой диаметр, не проходящий через точку  $z_0$ , будет отображаться на дугу окружности конечного радиуса. Таким образом, полуокружности с концами на этом диаметре уже не будут отображаться на полуокружности. ▶

**16.** Найти симметричный образ относительно окружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$  линии  $\gamma' = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 2\}$  (окружности  $\gamma'$ ).

◀ Преобразование симметрии относительно окружности  $\gamma$  полностью определяется функцией  $w = 1 + \frac{1}{z-1}$  (см. формулу (3), п. 1.2), откуда  $z = 1 + \frac{1}{w-1}$ . Поэтому нужно охарактеризовать те и только те точки, для которых  $\left|1 + \frac{1}{w-1} - 2\right| = 2$ , или  $|w-2| = 2|w-1|$ . Это множество точек, отношение расстояний которых от двух данных точек есть величина постоянная. Оно является окружностью Аполлония относительно точек 1 и 2. ▶

## § 2. Степенная функция

$w = z^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ).

Многозначная функция  $w = \sqrt[n]{z}$   
и ее поверхность Римана

### 2.1. Степенная функция.

Функция

$$w = z^n, \quad z \in \mathbb{C} \quad (1)$$

аналитическая в плоскости  $\mathbb{C}$ . Поскольку  $\frac{dw}{dz} = nz^{n-1} \neq 0 \quad \forall z \neq 0$ , то отображение, осуществляемое степенной функцией, конформное в каждой точке  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Пусть  $z = re^{i\varphi}$ ,  $w = \rho e^{i\psi}$ . Тогда

$$\rho = r^n, \quad \psi = n\varphi \quad (\varphi = \arg z). \quad (2)$$

Из (2) видно, что отображение (1) увеличивает в  $n$  раз углы с вершиной в точке  $z = 0$ . Итак, отображение (1) не является конформным в точке  $z = 0$ .

Отображение (1) однозначное, но не взаимно однозначное, поскольку любые две точки  $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  с одинаковыми модулями  $|z_1| = |z_2|$  и аргументами, отличающимися на целое кратное  $\frac{2\pi}{n}$

$$\arg z_1 = \arg z_2 + k \frac{2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

переходят в одну точку  $w$ . Следовательно, отображение (1) не является однолиственным в  $\mathbb{C}$ . Другими словами, вершины каждого правильного  $n$ -угольника с центром в начале координат переходят при отображении в одну точку на плоскости  $w$ . Область плоскости  $z$ , не содержащая никаких двух разных вершин правильного  $n$ -угольника с центром в точке  $z = 0$ , является областью однолистности функции  $z \mapsto z^n$ . Очевидно, что областью однолистности будет любая область, целиком



лежащая внутри угла величиной  $\frac{2\pi}{n}$  с центром в начале координат. В частности, внутренность любого угла

$$\alpha < \varphi^* < \alpha + \frac{2\pi}{n}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (3)$$

является областью однолиственности степенной функции и будет отображаться на всю плоскость  $w$  с выброшенным лучом  $\rho\alpha \in \text{Arg } w$ .

## 2.2. Многозначная функция $w = \sqrt[n]{z}$ и ее поверхность Римана.

С помощью лучей  $\varphi = \alpha + k\frac{2\pi}{n}$  всю плоскость  $z$  можно разбить на  $n$  областей однолиственности степенной функции ( $k = \overline{0, n-1}$ ).

Пусть  $\alpha = 0$ . Тогда такими областями будут внутренности углов

$$\frac{2k\pi}{n} < \varphi < \frac{2(k+1)\pi}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad (1)$$

т. е. бесконечные секторы.

Попытаемся теперь построить такой геометрический образ, чтобы степенная функция (1), п. 2.1, устанавливала взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между точками всей плоскости  $z$  и точками этого образа.

Рассмотрим первый угол  $0 < \varphi < \frac{2\pi}{n}$ . Он отображается на всю плоскость  $w$  с выброшенной положительной полуосью. В нее переходят два луча:  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ . Чтобы сберечь взаимную однозначность множества  $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq |z| < +\infty, 0 \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{n}\}$  и плоскости  $w$ , проведем на плоскости  $w$  вдоль действительной положительной полуоси разрез и в соответствии с правилом обхода считаем, что луч  $\varphi = 0$  переходит в верхний берег разреза, а луч  $\varphi = \frac{2\pi}{n}$  — в нижний. Изготавливаем  $n$  экземпляров плоскости  $w$  с разрезами вдоль положительной части действительной оси, являющихся образами бесконечных секторов, определяемых условиями (1), подкладываем их друг под друга и склеиваем так, чтобы сохранить непрерывность и взаимную однозначность соответствия. Для этого нижний берег разреза первого листа склеиваем с верхним берегом второго (находящегося под ним) листа, нижний берег разреза второго листа с верхним берегом разреза третьего листа и т. д. и, наконец, нижний берег разреза  $n$ -го листа с верхним берегом разреза первого листа (рис. 32).

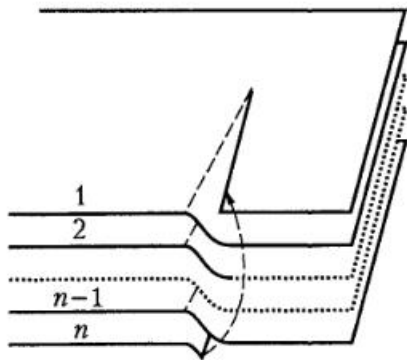


Рис. 32

Полученный геометрический образ называется поверхностью Римана функции  $z = \sqrt[n]{w}$ . Поверхность Римана наглядно помогает лучше понять природу отображения, совершаемого степенной функцией.

Выше отмечалось, что область плоскости  $z$  является областью однолиственности функции  $z \mapsto z^n$  тогда и только тогда, когда она не содержит двух разных вершин правильного  $n$ -угольника с центром в точке  $z = 0$ . Ясно, что область, содержащая точку  $z = 0$  или  $z = \infty$ , этому условию не удовлетворяет. Заметим также, что эти точки являются неподвижными, т. к.  $0^n = 0$ ,  $(\infty)^n = \infty$ .

Пусть теперь  $D^*$  — любая односвязная область плоскости  $w$ , не содержащая точек  $0$  и  $\infty$ . В такой области можно определить  $n$  разных функций (однозначных), для каждой из которых функция  $w = z^n$  является обратной. Эти функции называются *однозначными ветвями* многозначной функции  $z = \sqrt[n]{w}$ . Пусть  $z = re^{i\varphi}$ ,  $w = \rho e^{i\theta}$ . Тогда  $r = \sqrt[n]{\rho}$ ,  $\varphi = \frac{\theta}{n}$ . Угол  $\theta$  определяется однозначно для каждой ветки и каждой точки из области  $D^*$ , а именно, берем любую точку  $w_0 \in D^*$ , фиксируем в ней какое-нибудь определенное значение  $\theta = \theta_0$  и в дальнейшем считаем, что при непрерывном перемещении точек  $w$  в  $D^*$  угол  $\theta$  изменяется непрерывно. Поскольку область  $D^*$  не содержит точки  $0$  и  $\infty$ , то значение  $\theta$  для каждой точки множества  $D^*$  будет однозначно определено и равенство  $z = \sqrt[n]{|w|}e^{i\frac{\theta}{n}}$  будет определять однозначную функцию в области  $D^*$ . Если теперь положить для  $w_0 \in D^*$   $\theta = \theta_0 + 2\pi$ , то получим другую ветвь, при  $\theta = \theta_0 + 4\pi$  — третью ветвь и т. д. Таким образом, фиксируя значение  $\theta$  в точке  $w_0$  разными способами, полагая  $\theta = \theta_0 + 2k\pi$  ( $k = \overline{0, n-1}$ ), получаем  $n$  функций, для каждой из которых

степенная функция  $w = z^n$  является обратной. Объединение этих функций (однозначных ветвей) назовем *многозначной функцией*  $z = \sqrt[n]{w}$ .

Точка, при обходе которой в достаточно малой ее окрестности совершается переход от одной ветви многозначной функции к другой ее ветви, называется *точкой разветвления* этой многозначной функции. Причем, если после  $n$ -кратного обхода в одном и том же направлении опять возвращаемся на начальную ветвь, то говорят, что это *точка разветвления*  $(n-1)$ -го порядка, в противном случае — *бесконечного порядка*. Точки разветвления конечного порядка называются *алгебраическими точками разветвления*. Точки  $w = 0$  и  $w = \infty$  являются *алгебраическими точками разветвления*  $(n-1)$ -го порядка функции  $z = \sqrt[n]{w}$ . В этих точках сама функция принимает по одному значению:  $\sqrt[n]{0} = 0$ ,  $\sqrt[n]{\infty} = \infty$ . На поверхности Римана они будут концевыми точками разрывов, общими для всех листов. Каждая ветвь функции  $z = \sqrt[n]{w}$  является аналитической в области  $D^*$  с производной

$$\frac{d}{dw} \sqrt[n]{w} = \frac{\sqrt[n]{w}}{nw} \neq 0.$$

Таким образом, отображение, осуществляемое каждой ветвью, конформное в любой области  $D^*$  ( $0 \notin D^*$  и  $\infty \notin D^*$ ).

Рассмотрим примеры.

**17.** Найти образы следующих областей при отображении  $w = z^2$ :

- внутренности правой ветви гиперболы  $x^2 - y^2 = a^2$ ;
- области, ограниченной правой ветвью гиперболы  $x^2 - y^2 = 1$  и лучами  $\arg z = \pm \frac{\pi}{4}$ ;
- полуплоскости  $P = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq c; c = \operatorname{const} > 0\}$ .

◀ а) правая ветвь гиперболы переходит в прямую  $u = a^2$ . Принимая во внимание, что  $x > 0$ , по правилу обхода устанавливаем, что внутренность правой ветви гиперболы переходит в полуплоскость  $Q = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > a^2\}$ .

б) Лучи  $\arg z = \pm \frac{\pi}{4}$  являются асимптотами гиперболы  $x^2 - y^2 = 1$ . При отображении  $w = z^2$  лучи переходят в мнимую ось, а правая ветвь гиперболы  $x^2 - y^2 = 1$  — в прямую  $\operatorname{Re} w = 1$ . Образом заданной области является полоса  $M = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} w < 1\}$ .

в) При  $y = c$  имеем  $u = x^2 - c^2$ ,  $v = 2cx$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Исключив  $x$ , находим:  $u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2$ . Принимая во внимание, что  $c > 0$ , по правилу обхода устанавливаем: образом полуплоскости  $P$  является внешность параболы  $u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2$  (т.е. область, ограниченная этой параболой и такая, что ей не принадлежит фокус параболы). ▶

**18.** Построить конформное отображение области, ограниченной двумя параболой  $y^2 = 4(x+1)$ ,  $y^2 = 8(x+2)$  на полосу  $M = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} w < 1\}$ .

◀ Образом прямых  $\operatorname{Im} W = c$  в плоскости  $z = W^2$  являются параболы  $y^2 = 4c^2(x + c^2)$  (см. предыдущий пример). Следовательно, функция  $W = \sqrt{z}$  ( $\sqrt{1} = 1$ ) отображает заданную область на полосу  $M' = \{W \in \mathbb{C} : 1 < \operatorname{Im} W < 2\}$ . С помощью отображения  $w = -(\sqrt{2}+1)(iW+1)$  полоса  $M'$  перейдет в полосу  $M$ . Окончательно имеем

$$w = -(\sqrt{2}+1)(i\sqrt{z}+1). \quad \blacktriangleright$$

**19.** Найти образ области  $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 1, |z| \leq 2\}$  при конформном отображении  $w = -\left(\frac{z + \sqrt{3} - i}{z - \sqrt{3} - i}\right)^3$ .

◀ Область  $G$  — круговая луночка. Точки  $z_1 = -\sqrt{3} + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  — ее угловые точки. С помощью равенств  $w_1(i) = -1$ ,  $w_1(2i) = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$  устанавливаем, что функция  $w_1 = \frac{z-z_1}{z-z_2}$  отображает луночку  $G$  на внутренность угла  $\pi < \arg w_1 < \frac{4}{3}\pi$ . Отображение  $w = -w_1^3$  переводит точки внутренней углы в множество  $P = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$ , являющееся образом области  $G$ . ▶

**20.** Найти отображение области (луночки)  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2, |z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}\}$  на верхнюю полуплоскость.

◀ Найдём точки пересечения окружностей  $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$  и  $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - \sqrt{2}| = \sqrt{2}\}$ :  $z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ ,  $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ .

## Функция

$$w_1 = \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad w_1(2) = \frac{(\sqrt{2} - 1)(-1 + i)}{2 - \sqrt{2}}, \quad w_1(2\sqrt{2}) = i$$

отображает луночку  $G$  на внутренность угла  $\frac{\pi}{2} < \arg w_1 < \frac{3\pi}{4}$ , а функция  $w = w_1^4$  отображает внутренность угла на верхнюю полуплоскость  $P = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$ . Следовательно, искомое отображение имеет вид

$$w = \left( \frac{z - \sqrt{2}(1 - i)}{z - \sqrt{2}(1 + i)} \right)^4. \blacktriangleright$$

**21.** Конформно отобразить плоскость с разрезом вдоль промежутков  $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ ,  $[\frac{1}{2}, +\infty)$  на круг  $K = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$  так, чтобы  $0 \mapsto 0$ .

◀ Искомое отображение находим посредством следующей цепочки отображений:

$$z_1(z) = 2z, \quad z_2(z_1) = \frac{z_1 + 1}{z_1 - 1}, \quad z_3(z_2) = \sqrt{z_2}, \quad z_3(-1) = i, \quad w(z_3) = e^{i\theta} \frac{z_3 - i}{z_3 + i}, \quad w(i) = 0.$$

Окончательно имеем

$$w = e^{i\theta} \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z}. \blacktriangleright$$

**22.** Найти конформное отображение плоскости с разрезом вдоль интервала  $(-\infty, -1)$  на круг  $K = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ , при котором  $z = 0 \mapsto w = 0$ .

◀ При отображении  $w_1 = \sqrt{z+1}$ ,  $w_1(0) = 1$ , заданная область переходит в правую полуплоскость  $P = \{w_1 \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w_1 > 0\}$ . При отображении  $w_2 = iw_1 = i\sqrt{z+1}$  правая полуплоскость  $P$  переходит в верхнюю полуплоскость  $P' = \{w_2 \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w_2 > 0\}$ ,  $w_2(0) = i$ . С помощью формулы (4), п. 1.3, при  $a = i$  окончательно получаем:

$$w = e^{i\theta} \frac{w_2 - i}{w_2 + i} = e^{i\theta} \cdot \frac{\sqrt{z+1} - 1}{\sqrt{z+1} + 1}. \blacktriangleright$$

**23.** Найти образ области  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$  при отображении

$$w = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \sqrt{1+z^2} \Big|_{z=0} = 1.$$

◀ Отрезок  $[0, 1]$  отображается функцией  $w$  в отрезок  $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ , а отрезок  $[0, i]$  — в луч  $[1, +\infty)$ . Дуга  $z = e^{it}$  ( $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ) перейдет в кривую  $w = \frac{1}{\sqrt{1+(e^{it})^2}}$ , или  $w = u + iv = \frac{\cos \frac{t}{2} - i \sin \frac{t}{2}}{\sqrt{2} \cos t}$ .

Исключив параметр  $t$ , получим, что дуга окружности переходит в часть гиперболы  $u^2 - v^2 = \frac{1}{2}$ ,  $u > 0$ ,  $v < 0$ . В соответствии с правилом обхода, искомым образом является область

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 > \frac{1}{2}, v < 0\}. \blacktriangleright$$

## § 3. Показательная функция $w = e^z$ и многозначная функция $z = \operatorname{Ln} w$ .

### 3.1. Показательная функция $w = e^z$ .

Показательную функцию  $z \mapsto e^z$ ,  $z \in \mathbb{C}$  определим соотношением

$$w = u + iv = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \quad (1)$$

Для действительных  $z = x$  это определение совпадает с обычным. Чтобы установить этот факт, полагаем в формуле (1)  $y = 0$ .

Функция  $w = e^z$  аналитическая функция  $\forall z \in \mathbb{C}$ . Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad (2)$$

т. е.  $\forall z \in \mathbb{C}$  функции  $u$  и  $v$  удовлетворяют уравнениям Коши—Римана. Дифференцируя функцию  $w$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$  имеем

$$\frac{d}{dz} e^z = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z. \quad (3)$$

Для функции  $z \mapsto e^z$  сохраняется теорема сложения

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}. \quad (4)$$

Действительно, пусть  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ . Тогда

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) = e^{x_1 + x_2} (\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = e^{z_1 + z_2}.$$

Функция  $w = e^z$  периодическая с чисто мнимым основным периодом  $2\pi i$ . Действительно, пусть  $e^{z+w} = e^z$ ,  $w = \alpha + i\beta$ . Умножим обе части этого равенства на  $e^{-z}$ . Получим

$$e^w = e^\alpha \cos \beta + i e^\alpha \sin \beta = 1$$

или

$$e^\alpha \cos \beta = 1, \quad e^\alpha \sin \beta = 0.$$

Отсюда находим:  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2m\pi$ ,  $w = 2m\pi i$ , т. е.  $2\pi i$  — основной период функции  $w$ .

Функция  $w$  определена в  $\mathbb{C}$  и не имеет предела при  $z \rightarrow \infty$ , так как

$$\lim_{\substack{z=x>0 \\ x \rightarrow +\infty}} e^z = \infty, \quad \lim_{\substack{z=x<0 \\ x \rightarrow -\infty}} e^z = 0.$$

Показательная функция не принимает в  $\mathbb{C}$  нулевого значения, т. е. начало координат не принадлежит образу плоскости  $\mathbb{C}$  при отображении  $z \mapsto e^z$ . Чтобы доказать это, полагаем в формуле (4)  $z_1 = z$ ,  $z_2 = -z$ . Тогда  $e^z e^{-z} = 1$ , или  $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ . Отсюда и следует утверждение, так как если бы в какой-нибудь точке показательная функция обратилась бы в нуль, то в точке  $-z$  она не была бы определена, что противоречит ее определению.

Покажем, что любая другая точка плоскости  $w$  (т. е.  $w \neq 0$ ) принадлежит образу плоскости  $\mathbb{C}$  при отображении (1). Пусть  $w$  — произвольная точка плоскости  $\mathbb{C}$ , отличная от нуля и бесконечности. Найдем по  $w$  такое  $z$ , что  $e^z = w$ . Имеем

$$|w| = e^x \Rightarrow x = \ln |w|, \quad y \in \text{Arg } w.$$

Следовательно,

$$z = x + iy = \ln |w| + iy = \ln |w| + i(\arg w + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Замечаем, что существует бесконечное множество прообразов точки  $w \in \mathbb{C} \wedge w \neq 0$ . Все они лежат на прямой, параллельной оси  $Oy$ , на расстоянии  $2\pi$  один от другого. Таким образом,

$$w = e^z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Это отображение однозначное, но не взаимно однозначное, поскольку каждая точка  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  имеет бесконечное множество прообразов.

Любая область, не содержащая двух разных точек, в которых действительные части совпадают, а мнимые отличаются на  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , будет областью однолиственности показательной функции  $z \mapsto e^z$ . Так, областью ее однолиственности будет полоса  $M = \{z \in \mathbb{C} : b < \text{Im } z < b + 2\pi\}$ . Ее образом будет вся плоскость  $w$  с выброшенным лучом, выходящим из начала координат под углом  $b$ .

Пусть  $w = \rho e^{i\theta}$ . Тогда из равенства  $\rho e^{i\theta} = e^x e^{iy}$  имеем  $\rho = e^x$ ,  $\theta = y$ , т. е. прямые  $y = \text{const}$  функция  $w = e^z$  переводит в лучи, а отрезки  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \text{const}, b < y < b + 2\pi\}$  — в окружности с выброшенной точкой, лежащей на луче  $\theta = b$ .

Каждая горизонтальная полоса шириной  $2\pi$

$$M_k = \{z \in \mathbb{C} : 2k\pi < \text{Im } z < 2(k+1)\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

отображается показательной функцией на множество

$$G_R = \{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho < +\infty, 2k\pi < \theta < 2(k+1)\pi\},$$

т. е. на плоскость  $w$  с разрезом по положительной действительной полуоси.

### 3.2. Многозначная функция $z = \operatorname{Ln} w$ .

Разобьем всю плоскость  $z$  на области однолиственности функции  $w = e^z$ , например, прямыми  $y = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Для каждой из этих областей возьмем свой экземпляр плоскости  $w$ , являющийся ее образом при отображении  $z \mapsto e^z$ . Чтобы сохранить взаимно однозначное отображение области вместе с границей, каждую из этих плоскостей разрезаем вдоль положительной действительной полуоси. Подкладывая эти листы друг под друга и склеивая их надлежащим образом (например, нижний берег разреза каждого листа с верхним берегом разреза находящегося под ним листа), построим поверхность Римана многозначной функции  $z = \operatorname{Ln} w$ , являющейся обратной к показательной  $w = e^z$ . Согласно (1), п. 3.1, имеем

$$\operatorname{Ln} w = \ln |w| + i(\arg w + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Для функции  $w \mapsto \operatorname{Ln} w$  точки  $0$  и  $\infty$  являются точками разветвления бесконечного порядка. В любой односвязной области  $D^*$ , не содержащей точек  $0$  и  $\infty$ , можно построить счетное множество однозначных функций, по отношению к которым функция  $z \mapsto e^z$  будет обратной. Эти функции назовем *однозначными ветвями* функции  $z = \operatorname{Ln} w$ . Для того чтобы выделить в  $D^*$  одну какую-нибудь ветвь, фиксируем точку  $w_0$  и задаем  $\theta_0 \in \operatorname{Arg} w_0$ . При этом считаем, что при непрерывном изменении  $w$  в  $D^*$   $\theta \in \operatorname{Arg} w$  изменяется непрерывно. Тогда, принимая во внимание, что  $0 \notin D^*$  и  $\infty \notin D^*$ , для каждой точки  $w \in D^*$   $\theta \in \operatorname{Arg} w$  будет определен однозначно и мы получим в  $D^*$  однозначную функцию

$$z = \ln |w| + i\theta. \quad (2)$$

Изменив значения  $\theta_0$  на  $\theta_0 + 2\pi$  ( $\theta_0 - 2\pi$ ), получим с помощью предыдущих рассуждений вторую ветвь и т.д. Ветвь функции  $z = \operatorname{Ln} w$ , для которой  $\theta = \arg w$ , называется ее *главной ветвью*.

Рассмотрим примеры.

**24.** Доказать, что функция  $w = e^z$  отображает полосу  $M = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\}$  на первый квадрант  $w$ -плоскости.

◀ Сторона  $y = 0$  полосы  $M$  переходит в положительную часть действительной оси:  $|w| = e^x$ ,  $\arg w = 0$ ,  $-\infty < x < +\infty$ . Сторона  $y = \frac{\pi}{2}$  переходит в положительную часть мнимой оси:  $|w| = e^x$ ,  $\arg w = \frac{\pi}{2}$ ,  $-\infty < x < +\infty$ . Используя правило обхода, получаем первый квадрант  $w$ -плоскости. ▶

**25.** Отобразить плоскость с разрезом вдоль положительной действительной полуоси на полосу  $M = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} w < 1\}$ .

◀ В плоскости  $w_1 = \operatorname{Ln} z$  ( $\operatorname{Ln} 1 = 0$ ) получим полосу  $M' = \{w_1 \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} w_1 < 2\pi\}$ . Функция  $w = \frac{1}{2\pi} w_1 = \frac{\ln z}{2\pi}$  осуществляет указанное отображение. ▶

**26.** Найти конформное отображение луночки  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z - \frac{i}{2}| < \frac{1}{2}\}$  на верхнюю полуплоскость  $P = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$ .

◀ Цепочка функций

$$w_1 = \frac{1}{z-i}, \quad w_2 = \frac{1}{z-i} - \frac{i}{2} = \frac{1-iz}{2(z-i)}, \quad w_3 = \frac{\pi(1-iz)}{z-i}, \quad w = e^{w_3}$$

отображает  $G$  соответственно на полосу  $M_1 = \{w_1 \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} w_1 < 1\}$ , на полосу  $M_2 = \{w_2 \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} w_2 < \frac{1}{2}\}$ , на полосу  $M_3 = \{w_3 \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} w_3 < \pi\}$ , на верхнюю полуплоскость  $P$ . Таким образом,  $w = e^{\frac{\pi(1-iz)}{z-i}}$ . ▶

**27.** Отобразить на верхнюю полуплоскость полосу, ограниченную прямыми  $y = x$  и  $y = x + h$ ,  $h > 0$ .

◀ Находим ширину полосы  $d = \frac{h}{\sqrt{2}}$ . Искомое отображение получаем посредством композиции следующих отображений:

$$1) w_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} z = \frac{1-i}{\sqrt{2}} z \text{ — поворот на угол } -\frac{\pi}{4};$$

$$2) w_2 = \frac{\pi}{d} w_1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{h} w_1 \text{ — подобие с коэффициентом подобия } \frac{\pi\sqrt{2}}{h};$$

$$3) w = e^{w_2} = e^{\frac{\pi\sqrt{2}}{h} w_1} = e^{\frac{\pi(1-i)z}{h}}. \text{ ▶}$$

Простейшие конформные отображения, осуществляемые показательной функцией  $w = e^z$ , приведены на рис. 33.

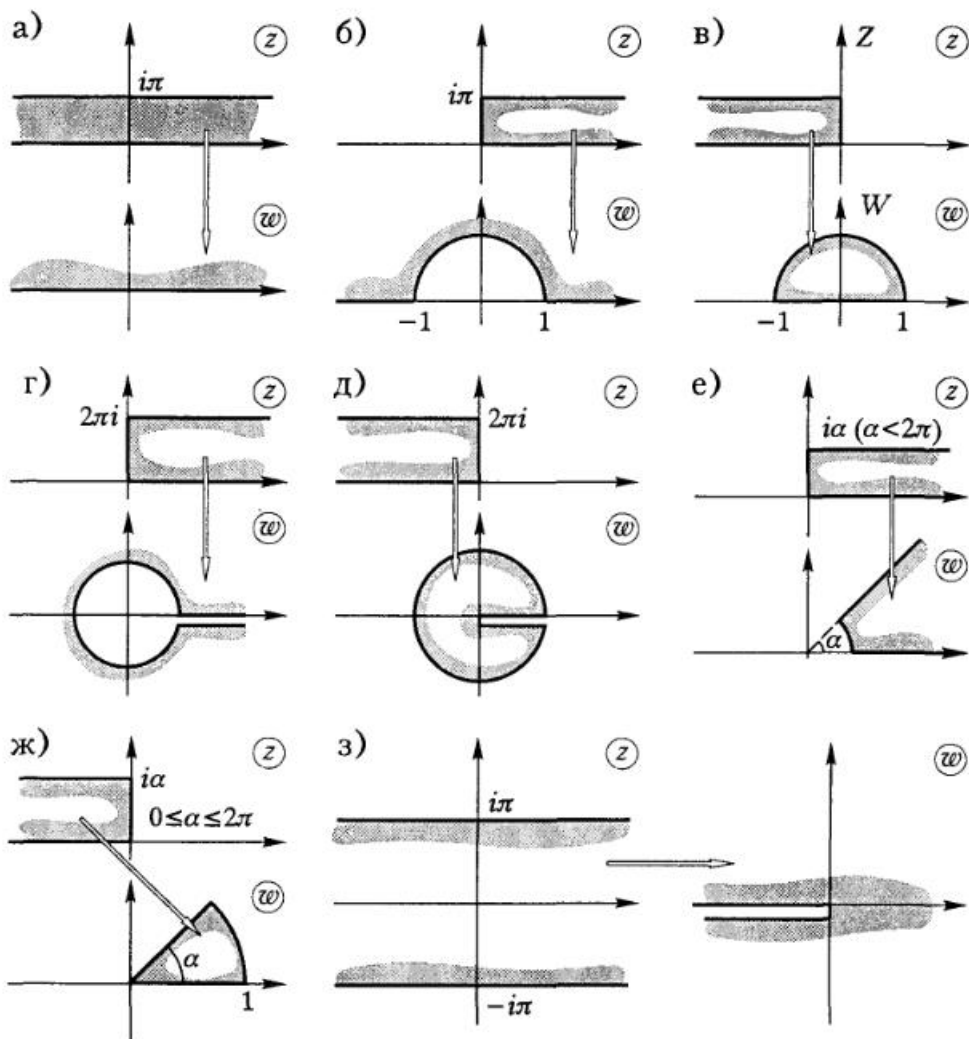


Рис. 33

## § 4. Общая степенная и общая показательная функции

### 4.1. Общая степенная функция.

Согласно правилу возведения комплексного числа в произвольную действительную степень, имеем при  $\rho \in \mathbb{R}$

$$w = z^\rho = |z|^\rho (\cos \rho\varphi + i \sin \rho\varphi) = |z|^\rho e^{i\rho\varphi}, \quad \varphi \in \text{Arg } z. \quad (1)$$

Если  $\rho = n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), то функция  $w$  аналитическая в  $\mathbb{C}$ . Она изучена в § 2.

Если  $\rho$  — произвольное рациональное число и  $\rho = \frac{p}{q}$  ( $p$  и  $q$  — взаимно простые), где  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , то функция  $w$  в каждой точке  $z \in \mathbb{C} \wedge z \neq 0$  имеет  $q$  разных значений и в любой односвязной области, не содержащей нуля и бесконечности, можно выделить  $q$  однозначных ветвей. Следовательно, нуль и бесконечность — точки разветвления  $(q-1)$ -го порядка многозначной функции  $w = z^{\frac{p}{q}}$ .

Если  $\rho$  — иррациональное число, то в каждой точке  $z \neq 0$ ,  $z \neq \infty$  существует сколь угодно много значений  $z^{\rho}$ . В любой односвязной области, не содержащей точек 0 и  $\infty$ , существует бесконечное множество однозначных ветвей многозначной функции  $w = z^{\rho}$ .

Объясним, какой смысл вкладывается в понятие комплексной степени  $z^{\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

Запишем равенство (1) в виде

$$z^{\rho} = |z|^{\rho} e^{i\rho\varphi} = e^{\rho \ln |z| + i\rho\varphi} = e^{\rho \operatorname{Ln} z},$$

и обобщим это равенство на комплексную степень. А именно,

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha \ln z} e^{i\alpha 2k\pi}.$$

Заметим, что степень с произвольным показателем, вообще говоря, не подпадает под правило сложения показателей при умножении степеней, а также правило умножения показателей при возведении степени в степень. Так

$$\begin{aligned} z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} &= e^{\alpha_1 \operatorname{Ln} z} e^{\alpha_2 \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha_1 \operatorname{Ln} z + \alpha_2 \operatorname{Ln} z} \neq e^{(\alpha_1 + \alpha_2) \operatorname{Ln} z} = z^{\alpha_1 + \alpha_2}, \\ (z^{\alpha})^{\beta} &= (e^{\alpha \operatorname{Ln} z})^{\beta} = e^{\beta(\alpha \operatorname{Ln} z + 2k\pi i)} \neq e^{\beta\alpha \operatorname{Ln} z}. \end{aligned}$$

## 4.2. Общая показательная функция.

Общая показательная функция  $w = a^z$  ( $a \neq 0$ ) определяется формулой  $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$ . Чтобы получить определенную однозначную ветвь, следует зафиксировать одно из значений  $\operatorname{Ln} a$ , например,  $\operatorname{Ln} a = b$ . Тогда  $a^z = e^{bz} \in A(\mathbb{C})$  — везде дифференцируемая функция (напомним читателю, что символом  $A(D)$  обозначается множество функций, аналитических в области  $D$ ). Рассматривая все возможные значения  $\operatorname{Ln} a$ , получим все возможные однозначные ветви многозначной функции  $z \mapsto a^z$ . Поскольку два значения  $\operatorname{Ln} a$  отличаются на слагаемое вида  $2k\pi i$ , то две ветки функции  $w = a^z$  отличаются множителем вида  $e^{i2k\pi z}$ , который является однозначной функцией со значением 1 лишь для целых значений  $z$ . В рассматриваемом случае ветви многозначной функции  $w = a^z$  существенно отличаются от ветвей всех ранее рассмотренных многозначных функций. А именно, в исследованных ранее случаях на плоскости  $\mathbb{C}$  существуют точки разветвления, перемещаясь вокруг которых по замкнутым кривым и требуя непрерывного изменения значений функции (ее определенных ветвей), имели возможность непрерывно перевести одну ветвь в другую. В данном случае картина иная. Здесь каждая ветвь является однозначной функцией в  $\mathbb{C}$ . Двигаясь по любому замкнутому пути при возвращении в начальную точку получим то же самое начальное число  $z$ , возможно, с другим значением аргумента, а значит и то же самое значение  $e^{bz}$ .

Таким образом, многозначная функция  $w = a^z$  не имеет точек разветвления и ее однозначные ветви не могут непрерывно переходить одна в другую. Это позволяет рассматривать их как самостоятельные, не связанные друг с другом функции:

$$z \mapsto e^{z \operatorname{Ln} a}, \quad z \mapsto e^{z(\operatorname{Ln} a + 2\pi i)}, \quad e^{z(\operatorname{Ln} a - 2\pi i)}, \dots$$

Фиксируя одну из этих ветвей (т. е. значение  $\operatorname{Ln} a = b$ ), можем рассмотреть функцию, обратную по отношению к этой ветви, которая является логарифмом  $w$  по основанию  $a$ :

$$z = \frac{1}{b} \operatorname{Ln} w = \frac{\operatorname{Ln} w}{\operatorname{Ln} a} = \operatorname{Log}_a w.$$



## § 5. Функция Жуковского

### 5.1. Определение функции Жуковского. Конформность.

Отображение

$$w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad (1)$$

называется *функцией Жуковского*. Она аналитическая в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Ее производная  $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right)$  отлична от нуля везде в этой области, за исключением точек  $z = \pm 1$ . Следовательно, отображение (1) конформное в  $\mathbb{C}$ , за исключением, возможно, точек  $0, 1, -1$ .

Докажем, что в точке  $z = 0$  отображение конформное. Принимая во внимание, что  $w(0) = \infty$ , рассмотрим

$$\frac{1}{w} = \frac{2z}{z^2 + 1}, \quad \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{w} \right) = \frac{2(1 - z^2)}{(z^2 + 1)^2}.$$

Поскольку  $\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{w} \right) \Big|_{z=0} \neq 0$ , то, согласно определению угла между кривыми на бесконечности, имеем конформность в точке  $z = 0$ . Из равенства  $w(z) = w\left(\frac{1}{z}\right)$  следует конформность также в точке  $z = \infty$ .

Чтобы убедиться в том, что в точках  $z = \pm 1$  отображение (1) не конформное, рассмотрим его как композицию отображений

$$w_1 = \frac{z-1}{z+1}, \quad w_2 = w_1^2, \quad w = \frac{w_2+1}{1-w_2}.$$

Первое и последнее отображения дробно-линейные, а значит конформные в  $\bar{\mathbb{C}}$ . Отображение  $w_2$  удваивает углы в точках  $0$  и  $\infty$ , которым отвечают точки  $z = \pm 1$ . Поэтому функция Жуковского удваивает углы в точках  $\pm 1$ , в силу чего не является конформным отображением в этих точках.

Установим условия однолиственности этой функции. Пусть  $z_1$  и  $z_2$  — две разные точки из  $\bar{\mathbb{C}}$ , в которых значения функции Жуковского равны, т. е.

$$z_1 + \frac{1}{z_1} - \left( z_2 + \frac{1}{z_2} \right) = z_1 - z_2 + \left( \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) = (z_1 - z_2) \left( 1 - \frac{1}{z_1 z_2} \right) = 0.$$

При  $z_1 \neq z_2$  имеем  $z_1 z_2 = 1$ . Следовательно, для однолиственности функции Жуковского в какой-нибудь области необходимо и достаточно, чтобы она не содержала никакой пары точек  $z_1, z_2$ , для которых  $z_1 z_2 = 1$ . Примерами таких областей служат множества

$$G_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad G_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}, \quad G_3 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}, \quad G_4 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}.$$

Единичная окружность с центром в начале координат делит плоскость  $z$  на две области однолиственности:  $G_1$  и  $G_2$ . Полагая  $z = re^{i\varphi}$ ,  $w = u + iv$ , запишем функцию Жуковского в виде

$$u = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \quad (2)$$

Из (2) следует, что окружность  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_0 \neq 1\}$  отображается функцией Жуковского в эллипс с полуосями  $a = \frac{1}{2} \left( r_0 + \frac{1}{r_0} \right)$  и  $b = \frac{1}{2} \left| r_0 - \frac{1}{r_0} \right|$  с фокусами в точках  $\pm 1$  ( $c^2 = a^2 - b^2 = 1$ ). Между точками окружности  $\gamma$  и эллипса существует взаимно однозначное соответствие. При  $r_0 > 1$  направления их обхода совпадают, а при  $r_0 < 1$  они противоположны. При  $r_0 \rightarrow 0$  ( $r_0 \rightarrow \infty$ )  $a \rightarrow \infty$ ,  $b \rightarrow \infty$ , а при  $r_0 \rightarrow 1$   $a \rightarrow 1$ ,  $b \rightarrow 0$ .

Отсюда устанавливаем, что образом области  $G_2$ , как и области  $G_1$ , является вся плоскость  $\bar{\mathbb{C}}$  с выброшенным отрезком  $[-1, 1]$ , в который переходит единичная окружность  $\gamma$ . Чтобы установить взаимно однозначное соответствие точек окружности  $\gamma$  и отрезка  $[-1, 1]$ , делаем разрез вдоль

отрезка. Взаимно однозначное соответствие точек окружности и разреза устанавливаем согласно правилу обхода (рис. 34).

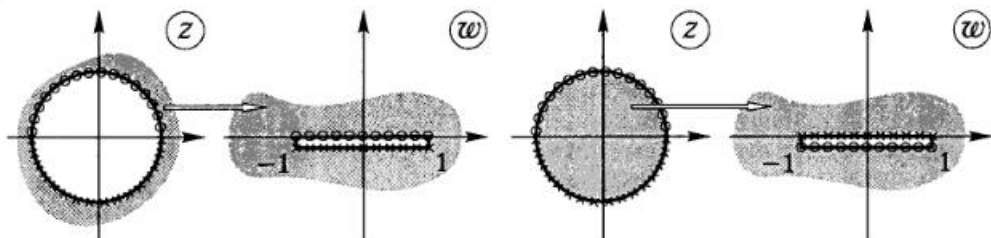


Рис. 34

Функция, обратная к функции Жуковского, имеет вид

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1} \quad (3)$$

и является многозначной с точками разветвления первого порядка  $w = \pm 1$ . Ее поверхность Римана изображена на рис. 35.

Рассмотрим примеры.

**28.** Доказать, что любая окружность, проходящая через точки  $\pm 1$ , делит плоскость  $\mathbb{C}$  на две области однолиственности функции Жуковского.

◀ Пусть  $\gamma$  — любая окружность, проходящая через точки  $\pm 1$  и пусть точки  $z_1, z_2$  не лежат на  $\gamma$ , причем  $z_1 z_2 = 1$ . Докажем, что одна из этих точек лежит внутри круга с границей  $\gamma$ , а другая — вне окружности  $\gamma$ . Рассмотрим отображение

$$w = \frac{z+1}{k(z-1)}, \quad |k|=1,$$

переводящее одну из областей  $z$ -плоскости, ограниченных  $\gamma$ , на верхнюю полуплоскость. Тогда

$$z = \frac{k w + 1}{k w - 1}.$$

Принимая во внимание условие  $z_1 z_2 = 1$ , получим

$$z_1 z_2 = \frac{(k w_1 + 1)(k w_2 + 1)}{(k w_1 - 1)(k w_2 - 1)} = 1,$$

или

$$k^2 w_1 w_2 + k(w_1 + w_2) + 1 = k^2 w_1 w_2 - k(w_1 + w_2) + 1.$$

Отсюда имеем  $w_1 = -w_2$ . По свойству взаимно однозначного отображения прообразы точек  $w_1$  и  $w_2$ , т.е. точки  $z_1$  и  $z_2$ , лежат с разных сторон  $\gamma$ . ▶

**29.** Найти конформное отображение внешней части эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b$ ) на внешнюю часть единичного круга с центром в начале координат.

◀ В плоскости  $w_1 = u_1 + i v_1 = \frac{z}{\sqrt{a^2 - b^2}}$  получаем внешнюю часть эллипса

$$\frac{u_1^2}{\bar{a}^2} + \frac{v_1^2}{\bar{b}^2} = 1, \quad \bar{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \bar{b} = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

а в плоскости  $w_2 = w_1 + \sqrt{w_1^2 - 1}$  ( $w_2(\infty) = \infty$ ) — внешнюю часть круга радиуса  $R$ :

$$G = \{w_2 \in \mathbb{C} : |w_2| > R\}, \quad R = \bar{a} + \sqrt{\bar{a}^2 - 1} = \frac{a+b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

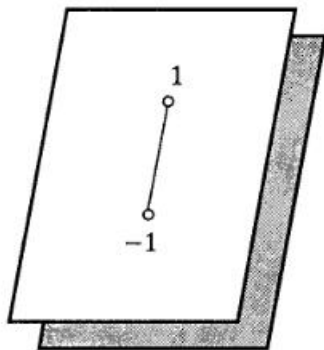


Рис. 35

В плоскости  $w = \frac{w_1}{R}$  получим область  $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\}$ . Таким образом,

$$w = \frac{w_1 + \sqrt{w_1^2 - 1}}{R} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b} \left( \frac{z}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \sqrt{\frac{z^2}{a^2 + b^2} - 1} \right) = \frac{1}{a + b} \left( z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2} \right). \blacktriangleright$$

**30.** Найти функцию, конформно отображающую область, заключенную между ветками гиперболы  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , на верхнюю полуплоскость  $P = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$ .

◀ Рассмотрим преобразование подобия  $w_1 = \frac{z}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , переводящее заданную гиперболу в гиперболу

$$\frac{u_1^2}{a^2} - \frac{v_1^2}{b^2} = 1, \quad \bar{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \bar{b} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

а заданную область — на область, размещенную между ее ветвями. В плоскости

$$w_2 = w_1 + \sqrt{w_1^2 - 1} \quad (w_2(\infty) = \infty)$$

получаем внутренность угла  $\alpha < \arg w_2 < \pi - \alpha$ ,  $\alpha = \arctg \frac{b}{a}$ , в плоскости  $w_3 = e^{-i\alpha} w_2$  — внутренность угла  $0 < \arg w_3 < \pi - 2\alpha$ . Искомое отображение имеет вид

$$\begin{aligned} w = w_3^{\frac{\pi}{\pi - 2\alpha}} &= (e^{-i\alpha} w_2)^{\frac{\pi}{\pi - 2\alpha}} = \left( e^{-i\alpha} \left( w_1 + \sqrt{w_1^2 - 1} \right) \right)^{\frac{\pi}{\pi - 2\alpha}} = \\ &= \left( \frac{e^{-i\alpha}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2} \right) \right)^{\frac{\pi}{\pi - 2\alpha}} = \left( \frac{e^{-i\alpha}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( z + \sqrt{z^2 - a^2 + b^2} \right) \right)^{\frac{\pi}{2 \arctg \frac{b}{a}}}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

## § 6. Тригонометрические и гиперболические функции

Тригонометрические функции  $z \mapsto \sin z$  и  $z \mapsto \cos z$  определим через показательную функцию  $z \mapsto e^z$  по формулам Эйлера

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (1)$$

Из свойств показательной функции следует:

1) при  $z = x$   $\sin z$  и  $\cos z$  совпадают с тригонометрическими функциями  $x \mapsto \sin x$  и  $x \mapsto \cos x$  действительной переменной  $x$ ;

2)  $\sin z$  и  $\cos z$  дифференцируемы в  $\mathbb{C}$  и при этом

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z;$$

3) выполняются основные тригонометрические соотношения, такие, например, как

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin z = \cos \left( z - \frac{\pi}{2} \right),$$

теоремы сложения и др;

4)  $\sin z$  и  $\cos z$  — периодические функции с основным периодом  $2\pi$ ;

5)  $z \mapsto \sin z$  — нечетная функция,  $z \mapsto \cos z$  — четная функция.

С тригонометрическими функциями  $z \mapsto \sin z$ ,  $z \mapsto \cos z$  тесно связаны гиперболические функции  $z \mapsto \operatorname{sh} z$ ,  $z \mapsto \operatorname{ch} z$ , определенные формулами

$$\operatorname{sh} z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \quad (2)$$

Их связь с тригонометрическими функциями выражается равенствами

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= -i \sin iz, & \operatorname{ch} z &= \cos iz, \\ \sin z &= -i \operatorname{sh} iz, & \cos z &= \operatorname{ch} iz. \end{aligned} \quad (3)$$

Из формул (1) следует, что отображения, осуществляемые синусом и косинусом, являются композицией изученных ранее отображений. В частности, отображение  $w = \cos z$  есть композиция поворота на угол  $\frac{\pi}{2}$  и отображений, осуществляемых показательной функцией и функцией Жуковского:

$$1) w_1 = iz; \quad 2) w_2 = e^{w_1}; \quad 3) w = \frac{1}{2} \left( w_2 + \frac{1}{w_2} \right).$$

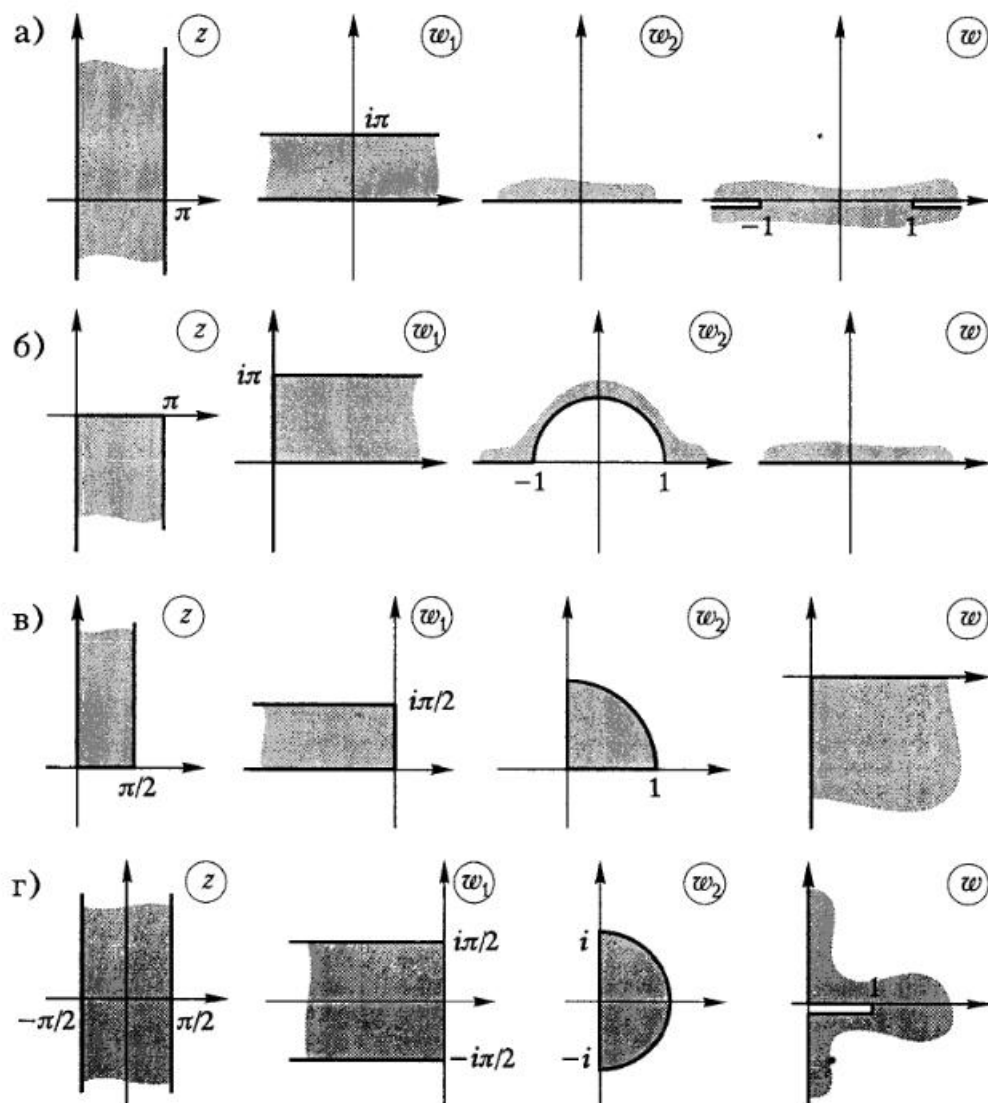


Рис. 36

Используя этот факт, рассмотрим простейшие конформные отображения, осуществляемые функцией  $w = \cos z$  (рис. 36).

Из формулы

$$\sin z = \frac{e^{i(z-\frac{\pi}{2})} + e^{-i(z-\frac{\pi}{2})}}{2}$$

следует, что отображение  $w = \sin z$  является композицией отображений

$$1) w_1 = z - \frac{\pi}{2}; \quad 2) w_2 = iw_1, \quad 3) w_3 = e^{w_2}, \quad 4) w = \frac{1}{2} \left( w_3 + \frac{1}{w_3} \right).$$

В качестве примера найдем образ полосы  $G = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}\}$  (см. рис. 37).

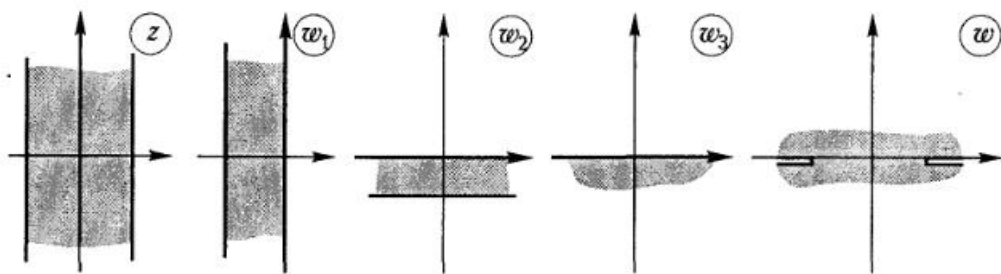


Рис. 37

Из рассмотренных конформных отображений следует, что вертикальные полосы, ширина которых равна  $\pi$ , являются областями однолистности функций  $z \mapsto \sin z$  и  $z \mapsto \cos z$ .

Рассмотрим более детально отображение полосы  $D = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Re} z < 0\}$ , осуществляемое функцией  $w = \cos z$ . С помощью теоремы сложения и формул (1)–(3) находим:

$$w = u + iv = \cos z = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$

или

$$u = \cos x \operatorname{ch} y, \quad v = -\sin x \operatorname{sh} y. \quad (4)$$

Найдем образ прямой  $x = x_0 = \operatorname{const}$  ( $-\pi < x_0 < 0 \wedge x_0 \neq -\pi/2$ ). Имеем

$$u = \cos x_0 \operatorname{ch} y, \quad v = -\sin x_0 \operatorname{sh} y.$$

Отсюда находим:

$$\frac{u^2}{\cos^2 x_0} - \frac{v^2}{\sin^2 x_0} = 1.$$

При  $-\frac{\pi}{2} < x_0 < 0$  прямая  $x = x_0$  переходит в правую ветвь этой гиперболы. При  $-\pi < x_0 < -\frac{\pi}{2}$  она переходит в левую ветвь гиперболы. Прямая  $x = 0$  (мнимая ось) переходит в разрез вдоль действительной оси от точки 1 до  $+\infty$ , а прямая  $x = -\pi$  переходит в разрез вдоль действительной оси от точки  $-1$  до  $-\infty$ , прямая же  $x = \frac{\pi}{2}$  переходит в мнимую ось. Образом полосы  $D$  является вся плоскость  $w$  с выброшенным отрезком действительной оси  $u$  от  $-1$  до 1 через бесконечность.

Разбивая всю плоскость  $z$  прямыми  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  на вертикальные полосы — области однолистности функции  $w = \cos z$  и взяв для каждой из них свой экземпляр  $w$ -плоскости, путем их склеивания можно получить поверхность Римана многозначной функции  $z = \operatorname{Arccos} w$ , которая является обратной к функции  $w = \cos z$  и имеет вид

$$z = \operatorname{Arccos} w = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}(w + \sqrt{w^2 - 1}). \quad (5)$$

Точки разветвления этой функции:  $\pm 1, \infty$ .

Тангенс и котангенс в комплексной плоскости определяются формулами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad (6)$$

или

$$\operatorname{tg} z = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad \operatorname{ctg} z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}. \quad (7)$$

Эти функции дифференцируемы всюду в  $\mathbb{C}$ , за исключением тех точек, в которых знаменатели дробей в (7) обращаются в нуль. Найдем, например, нули знаменателя дроби, определяющей  $\operatorname{ctg} z$ :

$$e^{iz} - e^{-iz} = 0, \quad e^{iz} = e^{-iz}, \quad iz = -iz + 2k\pi i, \quad z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Функции  $z \mapsto \operatorname{tg} z$ ,  $z \mapsto \operatorname{ctg} z$  периодические, с действительным основным периодом  $\pi$ . Для них сохраняются известные из анализа формулы дифференцирования и основные тригонометрические соотношения.

Отображения, осуществляемые этими функциями, являются композицией уже изученных отображений. Так, отображение

$$w = \operatorname{tg} z = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

есть композиция таких отображений:

$$1) w_1 = 2iz; \quad 2) w_2 = e^{w_1}; \quad 3) w_3 = \frac{w_2 - 1}{w_2 + 1}; \quad 4) w = -iw_3.$$

Используя этот факт, рассмотрим простейшие конформные отображения, осуществляемые функцией  $w = \operatorname{tg} z$  (см. рис. 38).

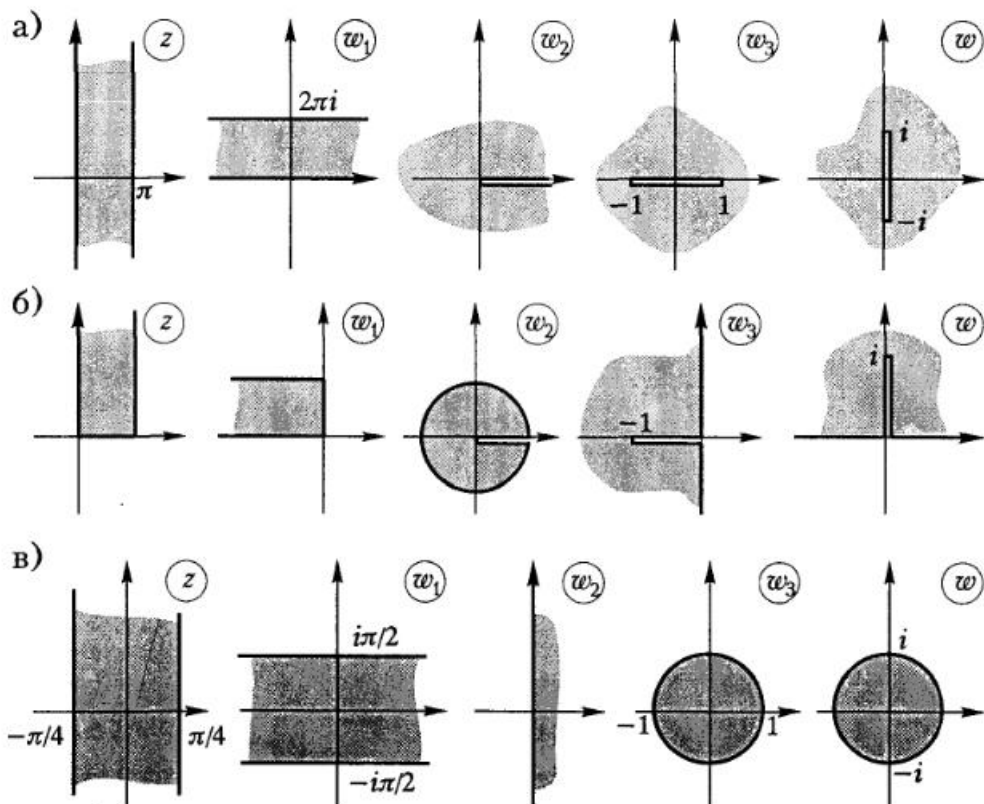


Рис. 38

Изучая отображения  $w = \operatorname{tg} z$  и  $w = \operatorname{ctg} z$ , приходим к выводу, что области однолистности этих функций — вертикальные полосы шириной  $\pi$ . Разбивая всю плоскость  $z$  прямыми  $z = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) на области однолистности тангенса и взяв для каждой из них свой экземпляр

$w$ -плоскости с разрезом по отрезку  $[-i, i]$ , путем склеивания их можно построить поверхность Римана многозначной функции

$$z = \operatorname{Arctg} w = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iw}{1-iw}.$$

Функция  $\operatorname{Arctg} w$  имеет две точки разветвления:  $\pm i$ .

Рассмотрим примеры.

**31.** Найти образ прямоугольника  $P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi, 0 < \operatorname{Im} z < b\}$  при отображении  $w = \cos z$ .

◀ Пусть  $z = x + iy$ , тогда

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{Im} w = -\sin x \operatorname{sh} y \leq 0.$$

Следовательно, образ прямоугольника  $P$  принадлежит нижней полуплоскости плоскости  $w$ . При  $z = x$

$$w = \cos x, \quad 0 < x < \pi;$$

при  $z = \pi + iy$

$$w = -\operatorname{ch} y, \quad 0 < y < b;$$

при  $z = iy$

$$w = \operatorname{ch} y, \quad 0 < y < b;$$

при  $z = x + ib$

$$w = u + iv = \cos x \operatorname{ch} b - i \sin x \operatorname{sh} b, \quad 0 < x < \pi,$$

т. е.

$$u = \cos x \operatorname{ch} b, \quad v = -\sin x \operatorname{sh} b, \quad \frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 b} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 b} = 1.$$

Таким образом, прямоугольник  $P$  отображается на нижнюю половину эллипса с полуосями  $\operatorname{ch} b$  и  $\operatorname{sh} b$ . Заметим, что в угловых точках  $z = 0$ ,  $z = \pi$  нарушается конформность отображения, а именно, прямые углы перешли в углы, равные  $\pi$ , в фокусах эллипса  $\pm 1$ . В этих точках  $(\cos z)' = -\sin z = 0$ . ▶

**32.** Доказать, что функция  $w = \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2}$  отображает полосу  $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}\}$  на круг  $K = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$  с разрезом вдоль отрезка  $[-1, 0]$ .

◀ Заданное отображение является композицией отображений

$$w_1 = e^{iz}, \quad w_2 = \frac{w_1 - 1}{w_1 + 1}, \quad w_3 = -iw_2, \quad w = w_3^2.$$

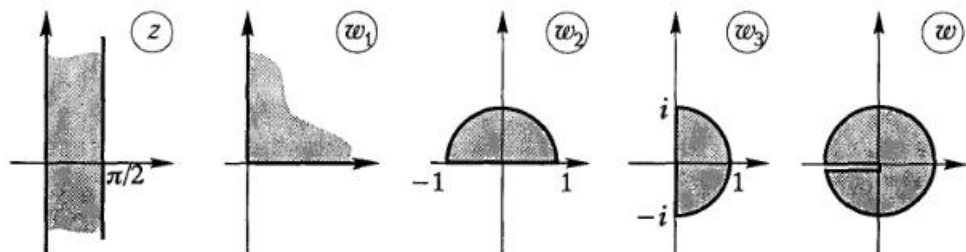


Рис. 39

При последовательном выполнении этих отображений заданная полоса преобразовывается в области, указанные на рис. 39. ▶

**33.** Доказать, что на сторонах квадратов с вершинами в точках  $\pi(n + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_0$ , выполняется неравенство  $|\operatorname{cosec} z| \leq 1$ .



◀ Из определения функции  $z \mapsto \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}$  получаем:

$$|\operatorname{cosec} z| = \frac{1}{|\sin z|} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}}.$$

На горизонтальных сторонах прямоугольников  $z = x \pm i\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$  имеем

$$\operatorname{sh}\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \geq \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} > 1, \quad \left| \operatorname{cosec}\left(x \pm i\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) \right| = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \sin^2 x}} \leq \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}} < 1.$$

На вертикальных сторонах  $z = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + iy$  выполняется равенство

$$\left| \operatorname{cosec}\left(\pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + iy\right) \right| = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1}},$$

из которого следует очевидное неравенство  $\left| \operatorname{cosec}\left(\pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + iy\right) \right| < 1$ . ▶

Рассмотрим теперь разные примеры, относящиеся ко всем разделам этой главы.

**34.** Найти общую форму целого линейного преобразования, переводящего:

- 1) верхнюю полуплоскость на себя;
- 2) верхнюю полуплоскость на нижнюю полуплоскость;
- 3) верхнюю полуплоскость на правую полуплоскость;
- 4) правую полуплоскость на себя.

Показать, что во всех случаях преобразование однозначно определяется заданием одной пары соответственных внутренних точек или двух пар граничных.

◀ 1) Рассмотрим функцию  $w = az + b$ , являющуюся целым линейным отображением. Для того, чтобы она переводила верхнюю полуплоскость на себя, требуется, во-первых, чтобы действительная ось перешла в действительную, т.е.  $w(z) \in \mathbb{R}$ , если  $z \in \mathbb{R}$ . Поэтому  $a$  и  $b$  должны быть действительными числами. Во-вторых, для выполнения поставленного требования должно выполняться также условие  $w'(z) = a > 0$ . Таким образом, функция  $w = az + b$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  и  $a > 0$ , отображает верхнюю полуплоскость на себя.

2) Очевидно, что таким отображением является  $w = -az + b$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ .

3) Для решения поставленной задачи отобразим верхнюю полуплоскость на себя, а затем применим преобразование поворота на угол  $-\frac{\pi}{2}$ . В итоге получаем:  $w = -i(az + b)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ .

4) Здесь чисто мнимым значениям  $z$  должны соответствовать чисто мнимые значения  $w$ , где  $w = az + ib$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Для того чтобы правая полуплоскость переходила в себя, требуется выполнение условия  $w'(z) = a > 0$ . Поставленному требованию удовлетворяет функция  $w = az + ib$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ .

Для однозначного определения преобразования требуется задать соответствие двух пар точек: либо двух пар граничных точек, либо пары внутренних точек, поскольку другая пара определится по свойству симметричных точек. ▶

**35.** Найти общую форму целого линейного преобразования, переводящего:

- 1) полосу  $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$  на себя;
- 2) полосу  $G = \{z \in \mathbb{C} : -2 < \operatorname{Im} z < 1\}$  на себя;
- 3) полосу, ограниченную прямыми  $y = x$  и  $y = x - 1$ , на себя.

Выяснить, какие пары точек могут при этих отображениях соответствовать друг другу и в каком случае это соответствие будет однозначно определять отображение.

◀ 1) Искомое преобразование имеет вид  $w = az + b$ . Поскольку оно должно перевести полосу  $D$  в себя, то прямые  $x = 0$  и  $x = 1$  должны перейти в прямые  $u = 0$  и  $u = 1$ . Возможны два случая: 1')  $x = 0 \rightarrow u = 0$ ,  $x = 1 \rightarrow u = 1$ ; 2')  $x = 0 \rightarrow u = 1$ ,  $x = 1 \rightarrow u = 0$ . Рассмотрим их в отдельности.

1') При  $z = iy$   $w = iv$ ,  $iv = iay + b$ , в частности, при  $y = 0$   $iv = b$ , следовательно,  $b = ib_1$ ,  $b_1 \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . При  $z = 1 + iy$   $w = 1 + iv$ ,  $1 + iv = a(1 + iy) + ib$ . Отсюда находим  $a = 1$ . Таким образом, искомое преобразование имеет вид  $w = z + ib$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

2') При  $z = iy$   $w = 1 + iv$ ,  $1 + iv = ia y + b$ , в частности, при  $y = 0$   $1 + iv = b$ . Следовательно,  $b \in \mathbb{C}$  и  $b = 1 + ib_1$ ,  $b_1 \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . При  $z = 1 + iy$   $w = iv$ ,  $iv = a(1 + iy) + 1 + ib_1$ . Отсюда находим  $a = -1$ . Окончательно получаем  $w = -z + 1 + bi$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

В случае 1') прямые  $w = c$ , параллельные граничным прямым, переходят сами в себя, а в случае 2') соответствуют друг другу параллельные прямые, симметричные относительно средней линии полосы  $x = \frac{1}{2}$ . Отсюда ясно, что для однозначного определения отображения следует задавать соответствие пары точек либо лежащих на одной и той же прямой  $x = \text{const} \neq \frac{1}{2}$ , либо на прямых, симметричных относительно прямой  $x = \frac{1}{2}$ . Отображение не будет определено однозначно, если соответствующие точки будут лежать на средней линии полосы. Таким образом,  $w = z + ib$  или  $w = -z + 1 + ib$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

2) Отображение  $z_1 = -\frac{i}{3}(z + 2i)$  переводит полосу  $G$  в полосу  $D$ . Согласно результатам, полученным при рассмотрении случая 1), отображение  $w_1 = z_1 + bi$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , или  $w_2 = -z_1 + 1 + bi$  переводит полосу  $D$  саму в себя. Пусть  $w$  — искомое отображение полосы  $G$  в себя. Тогда отображение  $w_3 = -\frac{i}{3}(w + 2i)$  переведет полосу  $G$  в  $D$ . Таким образом, отображение  $w$  находим из условий:  $w_3 = w_1$ , или  $w_3 = w_2$ , т. е.

$$-\frac{i}{3}(w + 2i) = -\frac{i}{3}(z + 2i) + bi, \text{ или } -\frac{i}{3}(w + 2i) = \frac{i}{3}(z + 2i) + 1 + bi.$$

В первом случае  $w = z - 3b = z + b_1$ ,  $b_1 \in \mathbb{R}$ , во втором случае имеем

$$w = -z - i - 3b = -z - i + b_2, \quad b_2 \in \mathbb{R}.$$

Относительно соответствия точек для однозначного определения отображения рассуждения аналогичны, поскольку мы свели случай 2) к случаю 1).

3) Ширина полосы равна  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Рассмотрим отображение

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)z = (1 + i)z.$$

Оно переводит заданную полосу в полосу  $D$ . Если  $w$  — искомое преобразование, то, аналогично рассмотренному случаю 2),  $(1 + i)w = (1 + i)z + bi$ , или  $(1 + i)w = -(1 + i)z + 1 + bi$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . В первом случае получаем

$$w = z + \frac{b}{2}(1 + i) = z + b_1(1 + i), \quad b_1 \in \mathbb{R},$$

а во втором случае имеем

$$w = -z + \frac{b+1}{2} + i\frac{b-1}{2} = -z + 1 + \frac{b+1}{2} - 1 + \frac{i(b-1)}{2} = -z + 1 + \frac{b-1}{2}(1+i) = -z + 1 + \bar{b}(1+i), \quad \bar{b} \in \mathbb{R}.$$

Поскольку и случай 3) сводится к случаю 1), то прежние рассуждения о соответствии точек для однозначного определения отображения остаются в силе. ►

**36.** Найти целую линейную функцию  $w = w(z)$ , отображающую полосу, заключенную между данными прямыми, на полосу  $D = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re } w < 1\}$  при указанной нормировке:

- 1)  $x = a$ ,  $x = a + h$ ;  $w(a) = 0$ ;
- 2)  $x = a$ ,  $x = a + h$ ;  $w\left(a + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} + i$ ,  $\text{Im } w\left(a + \frac{h}{2} + i\right) < 1$ ;
- 3)  $y = kx$ ,  $y = kx + b$ ;  $w(0) = 0$ ;
- 4)  $y = kx + b_1$ ,  $y = kx + b_2$ ;  $w(ib_1) = 0$ .

◀ 1) Ширина полосы равна  $h$ . Отображение  $z_1 = (z - a)\frac{1}{h}$  переводит заданную полосу в множество  $D$  из примера 35. Согласно решению этого примера, отображение  $w = z_1 + bi$ ,  $b \in \mathbb{R}$  переводит полосу  $D$  в себя. Из условия нормировки  $w(a) = 0$  получаем, что  $b = 0$ . Таким образом,  $w = \frac{z-a}{h}$ .

2) Функция  $w = \frac{z-a}{h} + bi$ , или функция  $w = -\frac{z-a}{h} + 1 + bi$ ,  $b \in \mathbb{R}$  отображает указанную полосу на множество  $\bar{D}$  (см. пример 35). Здесь первое условие нормировки задано на средней линии полосы, поэтому искомое целое линейное преобразование задается неоднозначно. Второе условие  $\text{Im } w\left(a + \frac{h}{2} + i\right) < 1$  приводит к случаю 2') примера 35, т. е. прямая  $x = a$  переходит в

прямую  $u = 1$  и прямая  $x = a + h$  переходит в прямую  $u = 0$  (обходы прямых в плоскостях  $z$  и  $w$  противоположны). Поэтому

$$w(z) = -\frac{z-a}{h} + 1 + ib, \quad w\left(a + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} + ib = \frac{1}{2} + i,$$

откуда  $b = 1$ . Следовательно,  $w = \frac{a-z+h}{h} + i$  — искомое целое линейное отображение.

3) Найдём ширину полосы в плоскости  $z$ . Поскольку  $\operatorname{tg} \alpha = k$ , то

$$h = b \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{b}{\sqrt{1 + k^2}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{h} = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{b}.$$

Повернув полосу на угол  $-\left(\frac{\pi}{2} + \arctg k\right)$  и умножив результат на  $\frac{1}{h}$ , получим полосу  $D$  из примера 35:

$$w = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{b} z e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \arctg k\right)}.$$

Условие нормировки выполняется.

4) Этот случай сводится к предыдущему. Полагая  $z_1 = z - ib_1$  и принимая во внимание, что  $\operatorname{tg} \alpha = k$ , получим

$$w = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{b_2 - b_1} e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \arctg k\right)} (z - ib_1).$$

Условие нормировки выполняется. ►

**37.** Найти целую линейную функцию, отображающую круг  $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  на круг  $K_R = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < R\}$  так, чтобы центры кругов соответствовали друг другу и горизонтальный диаметр переходил в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол  $\alpha$ .

◀ Полагаем  $w = az + b$ . По условию  $z = 0 \rightarrow w_0$ ,  $1 \rightarrow w_0 + Re^{i\alpha}$ . Из этих данных находим:  $w_0 = b$ ,  $a + w_0 = w_0 + Re^{i\alpha}$ , откуда  $a = Re^{i\alpha}$ . Окончательно имеем

$$w = Re^{i\alpha} z + w_0. \quad \blacktriangleright$$

**38.** Для функции  $w = \frac{1}{z}$  найти образы следующих линий:

- 1) семейства окружностей  $x^2 + y^2 = ax$ ;
- 2) семейства окружностей  $x^2 + y^2 = by$ ;
- 3) пучка параллельных прямых  $y = x + b$ ;
- 4) пучка прямых  $y = kx$ ;
- 5) пучка прямых, проходящих через заданную точку  $z_0 \neq 0$ ;
- 6) параболы  $y = x^2$ .

◀ 1) Пусть  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ , тогда

$$x + iy = \frac{1}{u + iv} = \frac{u}{u^2 + v^2} - i \frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Отсюда имеем

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}, \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{u^2 + v^2}.$$

Поскольку  $ax = \frac{au}{u^2 + v^2}$ , то из уравнения семейства окружностей следует, что

$$\frac{1}{u^2 + v^2} = \frac{au}{u^2 + v^2}$$

— уравнение семейства образов. Искомое семейство образов имеет вид  $u = \frac{1}{a}$ . Это семейство прямых, параллельных мнимой оси в плоскости  $w$ . Сама мнимая ось в это семейство не входит.

2) Очевидно, что искомое семейство — прямые  $v = -\frac{1}{b}$ , параллельные действительной оси в плоскости  $w$ , причем сама действительная ось в это семейство не входит.

3) Уравнение пучка образов имеет вид

$$-\frac{v}{u^2 + v^2} = \frac{u}{u^2 + v^2} + b.$$

Его можно записать в виде  $b(u^2 + v^2) + u + v = 0$ , или

$$\left(u + \frac{1}{2b}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2b}\right)^2 = \frac{1}{2b^2}.$$

Получили семейство окружностей радиуса  $\frac{1}{\sqrt{2|b|}}$ , с центром в точке  $(-\frac{1}{2b}, -\frac{1}{2b})$ . Окружности этого семейства касаются в начале координат прямой  $v = -u$ . Сама эта прямая также входит в семейство, что соответствует значению параметра  $b = 0$ .

4) Запишем уравнение пучка образов данного семейства. Оно имеет вид

$$-\frac{v}{u^2 + v^2} = \frac{ku}{u^2 + v^2}, \quad \text{т. е.} \quad ku + v = 0.$$

Получили пучок прямых  $v = -ku$ .

5) Уравнение пучка прямых, проходящих через заданную точку  $z_0 = (x_0, y_0)$ , имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Уравнение семейства образов этого пучка

$$-\frac{v}{u^2 + v^2} - y_0 = k \left( \frac{u}{u^2 + v^2} - x_0 \right)$$

после очевидных преобразований запишем в виде

$$(kx_0 - y_0)(u^2 + v^2) = ku + v.$$

Получили пучок окружностей, в который входит также прямая, проходящая через точки  $w = 0$  и  $w = \frac{1}{z_0}$  (образ прямой, проходящей через начало координат).

6) Поскольку

$$-\frac{v}{u^2 + v^2} = \frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2}$$

является образом параболы  $y = x^2$  при отображении  $w$ , то остается лишь упростить полученное уравнение. Имеем

$$u^2 = -v(u^2 + v^2), \quad u^2(1 + v) = -v^3, \quad u^2 = -\frac{v^3}{1 + v}.$$

Кривая, заданная полученным уравнением, называется *циссоидой*. ►

**39.** Выяснить, во что функция  $w = \frac{1}{z - z_0} + h$  переводит:

1) прямоугольную сетку  $x = C, y = C$ ;

2) полярную сетку  $|z - z_0| = R, \arg(z - z_0) = \alpha$ .

◀ 1) Пусть  $z = x + iy, w = u + iv, h = h_1 + ih_2$ . Тогда

$$w(z - z_0) = 1 + h(z - z_0), \quad z_0 = x_0 + iy_0, \quad z(w - h) = 1 + z_0(w - h), \quad z' = \frac{1}{w - h} + z_0,$$

$$x + iy = x_0 + iy_0 + \frac{1}{(u - h_1) + i(v - h_2)} = x_0 + iy_0 + \frac{(u - h_1) - i(v - h_2)}{(u - h_1)^2 + (v - h_2)^2},$$

$$x = x_0 + \frac{u - h_1}{(u - h_1)^2 + (v - h_2)^2}, \quad y = y_0 - \frac{v - h_2}{(u - h_1)^2 + (v - h_2)^2}.$$

Подставляя вместо  $x$  и  $y$   $C$ , получим два семейства окружностей

$$(C - x_0)((u - h_1)^2 + (v - h_2)^2) - (u - h_1) = 0, \quad (C - y_0)((u - h_1)^2 + (v - h_2)^2) + (v - h_2) = 0.$$

Первое семейство проходит через точку  $w = h$  и касается в ней прямой, параллельной мнимой оси, причем эта прямая входит в семейство. Второе семейство касается в точке  $w = h$  прямой, параллельной действительной оси. Прямая также принадлежит этому семейству.

2) Поскольку  $z - z_0 = Re^{i\alpha}$  и  $w = \frac{1}{z - z_0} + h$ , то  $w - h = \frac{1}{R}e^{-i\alpha}$ . Получено семейство окружностей радиуса  $\frac{1}{R}$  с центром в точке  $w = h$ . Очевидно, что  $\arg(w - h) = -\alpha$  — семейство лучей, выходящих из точки  $w = h$ . ►

**40.** Во что преобразуется квадрант  $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$  при отображении с помощью функции  $w = \frac{z-i}{z+i}$ ?

◀ При  $z = x$  и  $0 < x < +\infty$

$$w = u + iv = \frac{x-i}{x+i} = \frac{x^2-1}{x^2+1} - i \frac{2x}{x^2+1}.$$

Функция  $x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$  неубывающая,

$$\inf_{0 < x < +\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2-1}{x^2+1} = -1, \quad \sup_{0 < x < +\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1.$$

Поэтому в рассматриваемом случае  $-1 < u < 1$ ,  $v < 0$ . Поскольку  $|w| = 1$ , то часть границы квадранта  $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < +\infty, \operatorname{Im} z = 0\}$  переходит в нижнюю полуокружность радиуса 1 с центром в точке  $w = 0$ . Пусть  $z = iy$ ,  $0 < y < +\infty$ . Тогда

$$w(z) = u + iv = \frac{iy-i}{iy+i} = \frac{y-1}{y+1}, \quad u = \frac{y-1}{y+1}, \quad -1 < u < 1, \quad v = 0.$$

Луч  $y > 0$  перешел в интервал  $-1 < u < 1$ . Таким образом, функция  $w$  отображает множество  $G$  на множество  $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1 \wedge \operatorname{Im} w < 0\}$ . ▶

**41.** Во что преобразуется полуокруг  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \wedge \operatorname{Im} z > 0\}$  при отображении с помощью функции  $w = \frac{2z-i}{2+iz}$ ?

◀ Дробно-линейная функция  $w = \frac{z-\frac{i}{2}}{1+\frac{i}{2}z}$  отображает единичный круг  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  на себя. Выясним, во что отобразится верхняя полуокружность  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \wedge \operatorname{Im} z > 0\}$ . Возьмем три точки:  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = i$ ,  $z_3 = 1$ . Они отобразятся в точки  $w_1 = -\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}$ ,  $w_2 = i$ ,  $w_3 = \frac{3}{5} - i\frac{4}{5}$ . Следовательно, полуокружность  $\gamma$  отображается в верхнюю часть дуги окружности с концами в точках  $\pm\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}$ . Найдем теперь образ интервала  $-1 < x < 1$  при отображении  $w$ . По свойству дробно-линейного отображения это будет дуга некоторой окружности. Найдем ее по трем точкам:  $z_1 = -1$ ,  $z = 0$ ,  $z_3 = 1$ . Раньше мы определили, что точки  $z_1$  и  $z_3$  переходят в точки  $w_1 = -\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}$ ,  $w_3 = \frac{3}{5} - i\frac{4}{5}$ . Точка  $z$  переходит в точку  $w = -\frac{i}{2}$ . Ясно, что центр искомой окружности лежит на мнимой оси. Пусть  $w_0 = (0, b)$  — центр этой окружности,  $R$  — ее радиус. Ее уравнение имеет вид  $u^2 + (v-b)^2 = R^2$ . Воспользуемся тем, что точки  $w_1$  и  $w_3$  принадлежат ей:  $\frac{9}{25} + (\frac{4}{5} + b)^2 = R^2$ . Поскольку точка  $-\frac{i}{2}$  также принадлежит дуге искомой окружности, то  $(\frac{1}{2} + b)^2 = R^2$ . Получили систему двух уравнений для определения  $b$  и  $R$ . Решив ее, находим:  $b = -\frac{5}{4}$ ,  $R = \frac{3}{4}$ . Итак, образом интервала  $(-1, 1)$  является дуга окружности  $\Gamma = \{w \in \mathbb{C} : |w + i\frac{5}{4}| = \frac{3}{4}\}$ , а весь полуокруг  $D$  отображается на луночку, содержащую точку  $w = 0$  и ограниченную дугами окружностей  $\Gamma_1 = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$  и  $\Gamma$  (см. рис. 40). ▶

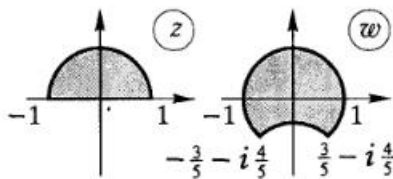


Рис. 40

**42.** Во что отображается внутренность угла  $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$  дробно-линейной функцией  $w = \frac{z}{z-1}$ ?

◀ Сначала найдем образ луча  $z = x$  ( $x \geq 0$ ). Точка  $x = 0$  перейдет в точку  $w = 0$ . Из предельных соотношений  $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{x-1} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{x-1} = +\infty$  становится ясным, что промежутку  $[0, 1)$  в плоскости  $w$  соответствует промежуток  $(-\infty, 0]$ . Если принять во внимание, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$ , то приходим к выводу, что промежутку  $(1, +\infty)$  в плоскости  $w$  соответствует промежуток  $(1, +\infty)$ . Следовательно, при отображении  $w$  луч  $z = x$  ( $x \geq 0$ ) переходит в действительную ось плоскости  $w$  с выброшенным интервалом  $0 < u < 1$ . Луч  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  по свойству

дробно-линейных отображений перейдет в дугу некоторой окружности, уравнение которой в общем случае имеет вид  $(u-a)^2 + (v-b)^2 = R^2$ . Для того, чтобы найти  $a$ ,  $b$  и  $R$ , определим образы трех точек, лежащих на луче  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Эти образы будут принадлежать упомянутой окружности и однозначно определять ее. Ищем образы точек  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ,  $z_3 = \infty$ . После несложных вычислений находим:  $w_1 = 0$ ,  $w_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2(\sqrt{2}-1)}$ ,  $w_3 = 1$ . Поскольку все эти точки лежат на искомой окружности, то для определения  $a$ ,  $b$  и  $R$  получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = R^2, \\ \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)} + b\right)^2 = R^2, \\ (1-a)^2 + b^2 = R^2. \end{cases}$$

Ее решением являются  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = -\frac{1}{2}$ ,  $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Получаем искомую окружность:

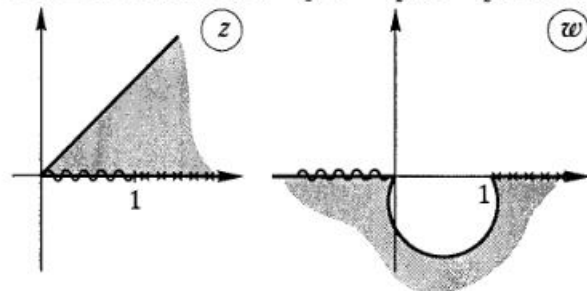


Рис. 41

$$\gamma = \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| w - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Таким образом, дробно-линейная функция  $w = \frac{z}{z-1}$  отображает внутренность угла  $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$  на область, полученную из нижней полуплоскости плоскости  $w$  удалением находящейся в этой полуплоскости части круга

$$K = \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| w - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right| < \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

(см. рис. 41). ►

**43.** Во что преобразуется полоса  $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$  при отображении с помощью функций: 1)  $w = \frac{z-1}{z}$ ; 2)  $w = \frac{z-1}{z-2}$ ?

◀ 1) Найдем образ мнимой оси при отображении  $w$ :

$$w = \frac{iy-1}{iy} = 1 + \frac{i}{y}.$$

Прямая  $x = 0$  перешла в прямую  $u = 1$ . Найдем образ прямой  $x = 1$ . Он ортогонален к действительной оси, так как заданное отображение переводит действительную ось в действительную ось. Следовательно, этим образом является окружность с центром на действительной оси, уравнение которой имеет вид  $(u-a)^2 + v^2 = R^2$ . Точка  $z = 1$  переходит в точку  $w = 0$ , а точка  $z = \infty$  — в точку  $w = 1$ . Для определения  $a$  и  $R$  получаем систему уравнений  $a^2 = R^2$ ,  $(1-a)^2 = R^2$ , решениями которой являются  $a = \frac{1}{2}$ ,  $R = \frac{1}{2}$ . Уравнение искомой окружности имеет вид  $\left| w - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$ . Таким образом, полоса  $D$  в рассматриваемом случае отображается на область, ограниченную прямой, уравнение которой  $\operatorname{Re} w = 1$ , и касающейся ее окружностью  $\Gamma = \{w \in \mathbb{C} : \left| w - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}\}$  (рис. 42).

2) Образы прямых  $x = 0$  и  $x = 1$  — окружности с центрами на действительной оси, так как действительная ось переходит в действительную ось, а углы сохраняются. На прямой  $x = 0$  возьмем две точки:  $z_1 = 0$  и  $z_2 = \infty$ .

Их образами являются точки  $w = \frac{1}{2}$  и  $w = 1$ . Пусть уравнение образа прямой  $x = 0$  имеет вид  $(u-a)^2 + v^2 = R^2$  (поскольку этот образ — окружность). Константы  $a$  и  $R$  находим из системы

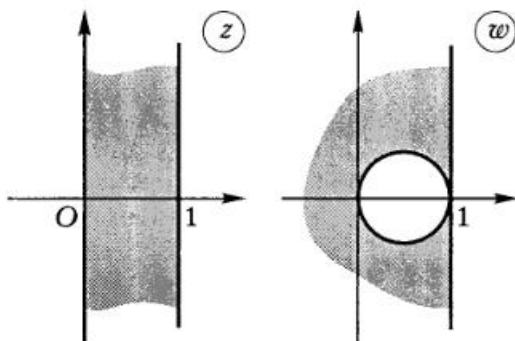


Рис. 42

уравнений  $(\frac{1}{2} - a)^2 = R^2$ ,  $(1 - a)^2 = R^2$ . Решив ее, находим:  $a = \frac{3}{4}$ ,  $R = \frac{1}{4}$ . Прямая  $x = 0$  переходит в окружность, уравнение которой  $|w - \frac{3}{4}| = \frac{1}{4}$ .

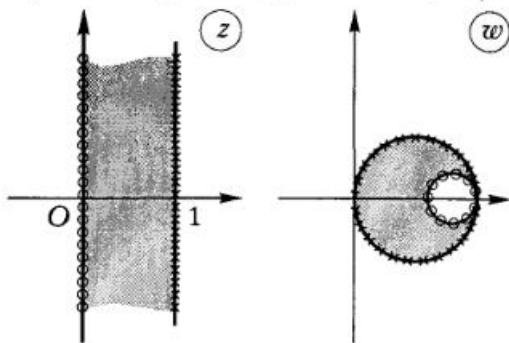


Рис. 43

Найдем теперь образ прямой  $x = 1$ . Образами точек  $\xi_1 = 1$ ,  $\xi_2 = \infty$  являются точки  $w_1 = 0$  и  $w_2 = 1$ . Поскольку указанная прямая отображается на окружность, то точки  $w_1$  и  $w_2$  принадлежат ей. Так как ее центр лежит на действительной оси, то уравнение окружности имеет вид  $(u - a_1)^2 + v^2 = R_1^2$ . Для нахождения чисел  $a_1$  и  $R_1$  получаем систему уравнений  $a_1^2 = R_1^2$ ,  $(1 - a_1)^2 = R_1^2$ . Решив эту систему, имеем  $a_1 = R_1 = \frac{1}{2}$ . Уравнение данной окружности записывается в виде  $|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ . Следовательно, полоса  $D$  отображается функцией  $w = \frac{z-1}{z}$  на область, ограниченную касавшимися друг друга окружностями, уравнения которых  $|w - \frac{3}{4}| = \frac{1}{4}$  и  $|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$  (рис. 43).

44. Во что отображается кольцо  $K = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$  функцией  $w = \frac{z}{z-1}$ ?

◀ Точке  $z = 1$  соответствует точка  $w = \infty$ , следовательно, окружность

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

переходит в прямую, ортогональную действительной оси (при данном отображении действительная ось переходит в действительную ось). Точке  $z = -1$  соответствует точка  $w = \frac{1}{2}$ . Таким образом, окружность  $\gamma_1$  отображается на прямую, уравнение которой  $u = \frac{1}{2}$ .

Образом окружности

$$\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$$

будет некоторая окружность в плоскости  $w$  с центром на действительной оси. Ее уравнение записывается в виде

$$(u - a)^2 + v^2 = R^2.$$

Рис. 44

Образы точек  $z_1 = -2$  и  $z_2 = 2$  принадлежат ей. Точкам  $z_1$  и  $z_2$  отвечают точки  $w_1 = \frac{2}{3}$  и  $w_2 = 2$ . Для определения  $a$  и  $R$  получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными  $(\frac{2}{3} - a)^2 = R^2$  и  $(2 - a)^2 = R^2$ . Решив ее, имеем  $a = \frac{4}{3}$ ,  $R = \frac{2}{3}$ . Окружность  $\gamma_2$  отображается на окружность  $\Gamma = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - \frac{4}{3}| = \frac{2}{3}\}$ . Кольцо  $K$  отображается на двусвязную область, граница которой состоит из прямой, уравнение которой  $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$ , и окружности  $\Gamma$  (рис. 44).

45. Отобразить на вертикальную полосу  $D = \{w \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} w < 1\}$ :

- 1) полуплоскость  $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$  с выкинутым кругом  $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{d}{2}| \leq \frac{d}{2}\}$ ;
- 2) двуугольник, заключенный между окружностями

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{d_1}{2}| = \frac{d_1}{2}\}, \quad \gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{d_2}{2}| = \frac{d_2}{2}\} \quad (d_1 < d_2);$$

- 3) внешность кругов  $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + \frac{d_1}{2}| \leq \frac{d_1}{2}\}$ ,  $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{d_2}{2}| \leq \frac{d_2}{2}\}$  так, чтобы  $w(d_2) = 0$ .

◀ 1) Функция  $w_1 = \frac{1}{z}$  отображает множество  $P \setminus K$  на полосу  $G = \{w_1 \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} w_1 < \frac{1}{d}\}$ , а отображение  $w_2 = dw_1 = \frac{d}{z}$  переведет полосу  $G$  в полосу  $G' = \{w_2 \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} w_2 < 1\}$ . Согласно решению примера 35, 1), общий вид искомого преобразования определяется функцией  $w = w_2 + ih = \frac{d}{z} + ih$ , или  $w = -w_1 + 1 + ih = -\frac{d}{z} + 1 + ih$ , где  $h$  — любое действительное число.



2) Функция  $w_1 = \frac{1}{z}$  отображает треугольник на полосу  $D_1 = \{w_1 \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{d_2} < \operatorname{Re} w_1 < \frac{1}{d_1}\}$ . Ширина полосы равна  $\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} = \frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2}$ . Функция  $w_2 = \frac{d_1 d_2}{d_2 - d_1} (w_1 - \frac{1}{d_2})$  отображает полосу  $D_1$  на полосу  $D_2 = \{w_2 \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} w_2 < 1\}$ , а отображение  $w = w_2 + ih$  или отображение  $w = -w_2 + 1 + ih$ ,  $h \in \mathbb{R}$ , переводит полосу  $D_2$  в себя, т. е. в полосу  $D$  (см. пример 35, 1)). Окончательно получаем, что  $w = \frac{d_1}{d_2 - d_1} (\frac{d_2}{z} - 1) + ih$ , или  $w = \frac{d_1}{d_1 - d_2} (\frac{d_2}{z} - 1) + 1 + ih$ ,  $h \in \mathbb{R}$  — произвольное (см. рис. 45).

3) Композиция цепочки отображений  $w_1 = \frac{1}{z}$ ,  $w_2 = w_1 - \frac{1}{d_2}$ ,

$$w_3 = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} w_2, \quad w = -w_3 = -\frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{d_2} \right) = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \left( 1 - \frac{d_2}{z} \right) = \frac{d_1}{z} \left( \frac{z - d_2}{d_1 + d_2} \right)$$

приводит к требуемому результату (см. рис. 46). ►

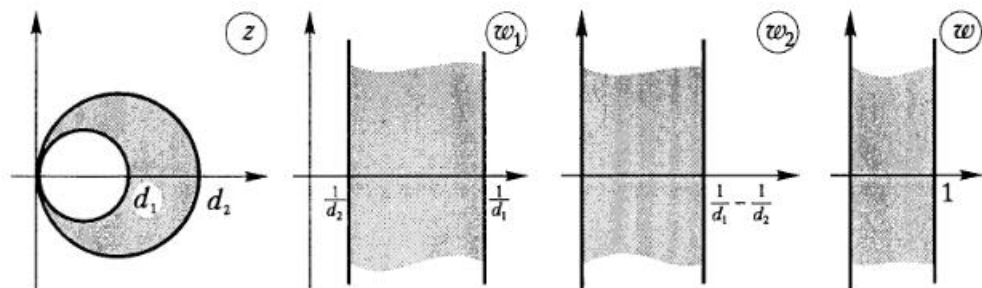


Рис. 45

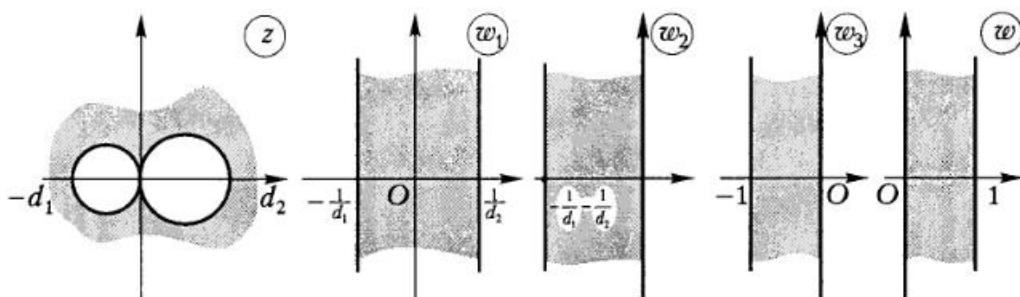


Рис. 46

**46.** Найти дробно-линейные функции, переводящие точки  $-1, i, 1+i$  соответственно в точки 1)  $0, 2i, 1-i$ ; 2)  $i, \infty, 1$ .

◀ 1) Для наглядности запишем условие в виде таблицы

$z$	$-1$	$i$	$1+i$
$w$	$0$	$2i$	$1-i$

Искомая функция имеет вид  $w = k \frac{z+1}{z-b}$ . Точка  $-1$  переводится в точку  $w = 0$ . Для определения  $k$  и  $b$  получаем в соответствии с таблицей систему уравнений

$$\begin{cases} 2i = k \frac{1+i}{i-b}, \\ 1-i = k \frac{2+i}{1+i-b}. \end{cases}$$

Разделив друг на друга левые и правые части уравнений системы, получаем уравнение относительно  $b$ :

$$\frac{2i}{1-i} = \frac{(1+i)(1-b+i)}{(i-b)(2+i)}.$$

После несложных преобразований находим:

$$b = -\frac{3+2i}{2(i-1)}.$$

Подставив найденное значение в первое уравнение системы, получим:

$$k = -\frac{i}{2}.$$

Окончательно имеем

$$w = -\frac{2i(z+1)}{4z-1-5i}.$$

2) При виде таблицы

$z$	$-1$	$i$	$1+i$
$w$	$i$	$\infty$	$1$

становится ясным, что искомое дробно-линейное отображение следует искать в виде

$$w = k \frac{z-a}{z-i}.$$

Условие  $i \mapsto \infty$  выполнено. Неизвестные  $k$  и  $a$  определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} i = k \frac{-1-a}{-1-i} = k \frac{1+a}{1+i}, \\ 1 = k \frac{1+i-a}{1+i-i} = k(1+i-a). \end{cases}$$

Решив ее, находим:

$$a = 3i, \quad k = \frac{1}{1-2i}, \quad w = \frac{(1+2i)z + 6 - 3i}{5(z-i)}. \blacktriangleright$$

**47.** Найти дробно-линейные функции, переводящие точки  $-1, \infty, i$  соответственно в точки:

1)  $i, 1, 1+i$ ; 2)  $\infty, i, 1$ ; 3)  $0, \infty, 1$ .

◀ Способ решения примера тот же, который применяли при решении примера 46: с помощью таблицы определяем общий вид дробно-линейной функции, а затем находим два неизвестных числа из системы уравнений.

1) Поскольку

$z$	$-1$	$\infty$	$i$
$w$	$i$	$1$	$1+i$

то  $w = \frac{z-a}{z-b}$ . При этом  $\infty \mapsto 1$ . Из системы уравнений

$$\begin{cases} i = \frac{-1-a}{-1-b} = \frac{1+a}{1+b}, \\ 1+i = \frac{i-a}{i-b}, \end{cases}$$

находим:  $a = -i - 2, b = i - 2$ . Таким образом,

$$w = \frac{z+i+2}{z-i+2}.$$

2) С помощью таблицы

$z$	$-1$	$\infty$	$i$
$w$	$\infty$	$i$	$1$

определяем, что искомое дробно-линейное отображение имеет вид  $w = i \frac{z-a}{z+1}$ . Тогда  $-1 \mapsto \infty$ ,  $\infty \mapsto i$ . Осталось найти  $a$ . Для этого воспользуемся условием, что  $i \mapsto 1$ . Из уравнения относительно неизвестного  $a$

$$1 = i \frac{i-a}{i+1}$$

находим:  $a = -1 + 2i$ . Следовательно,

$$w = \frac{2 + i(z+1)}{z+1}.$$

3) Судя по таблице

$z$	$-1$	$\infty$	$i$
$w$	$\infty$	$\infty$	$1$

искомая функция имеет вид  $w = az + b$ . Из условий  $0 = -a + b$ ,  $1 = ia + b$ , получаем:  $a = b$ ,  $a = \frac{1-i}{2}$ . Таким образом,

$$w = \frac{1-i}{2}(z+1). \blacktriangleright$$

Заметим, что составлять таблицы соответствия точек полезно, но не обязательно.

**48.** Найти дробно-линейные функции по следующим условиям:

- 1) точки  $1$  и  $i$  неподвижны, а точка  $0$  переходит в точку  $-1$ ;
- 2) точки  $\frac{1}{2}$  и  $2$  неподвижны, а точка  $\frac{5}{4} + i\frac{3}{4}$  переходит в  $\infty$ ;
- 3) точка  $i$  является двойной неподвижной точкой, а точка  $1$  переходит в  $\infty$ .

◀ 1) Ищем дробно-линейную функцию  $w$  в виде  $\frac{w-1}{w-i} = k \frac{z-1}{z-i}$ . Поскольку  $0 \mapsto -1$ , то  $\frac{-1-1}{-1-i} = \frac{2}{1+i} = \frac{k}{i}$ , откуда  $k = \frac{2i}{1+i}$ . Следовательно,

$$\frac{w-1}{w-i} = \frac{2i}{1+i} \frac{z-1}{z-i}, \quad w((1+i)(z-i) + 2i(1-z)) = 2(z-1) + (1+i)(z-i),$$

$$w(z(1-i) + i + 1) = z(3+i) - 1 - i, \quad w = \frac{(3+i)z - 1 - i}{(1-i)z + i + 1}.$$

2) Определяем функцию  $w$  из условий  $\frac{w-1}{w-2} = k \frac{z-1}{z-2}$ . Тогда

$$\frac{2w-1}{w-2} = k \frac{2z-1}{z-2}, \quad (2w-1)(z-2) = k(2z-1)(w-2), \quad w = \frac{z(1-4k) + 2k-2}{2z(1-k) + k-4}.$$

При  $z = \frac{5}{4} + i\frac{3}{4}$  знаменатель последней дроби обращается в нуль, поскольку  $\frac{5}{4} + i\frac{3}{4} \mapsto \infty$ . Из этого условия определяем  $k$ :

$$\left(\frac{5}{2} + \frac{3i}{2}\right)(1-k) + k - 4 = 0.$$

Решив это уравнение, получим  $k = i$ . Окончательно имеем

$$w = \frac{z(1-4i) + 2(-1+i)}{2z(1-i) + i-4}.$$

3) Определим функцию  $w$  условиями  $\frac{1}{w-i} = \frac{1}{z-i} + h = \frac{1+h(z-i)}{z-i}$ . Тогда  $z-i = (w-i)(1+h(z-i))$ ,  $w = \frac{z(1+i) + h}{hz + 1 - ih}$ . Так как  $1 \mapsto \infty$ , то  $h + 1 - ih = 0$ ,  $h = \frac{1}{-1+i} = -\frac{(1+i)}{2}$ . Окончательно находим

$$w = \frac{z(3-i) - (1+i)}{(1+i)(1-z)}. \blacktriangleright$$

**49.** Найти дробно-линейную функцию, переводящую точки  $-1, 0, 1$  соответственно в точки  $1, i, -1$  и выяснить, во что при этом отображении переходит верхняя полуплоскость.

◀ Для наглядности воспользуемся таблицей

$z$	$-1$	$0$	$1$
$w$	$1$	$i$	$-1$

Согласно теореме 1, п. 1.3, какими бы ни были три разные точки  $z_1 \in \overline{\mathbb{C}}, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$  и три разные точки  $w_1 \in \overline{\mathbb{C}}, w_2 \in \overline{\mathbb{C}}, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ , существует, и притом единственное, такое дробно-линейное отображение  $L$ , что  $L(z_k) = w_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Его можно найти из соотношения

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}. \quad (1)$$

Поскольку  $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{w_1 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{1+i}{2}$ , то соотношение (1) принимает вид  $\frac{z+i}{z} = (1+i) \frac{(w-1)}{w-i}$ , откуда

$$w = \frac{z-i}{iz-1}.$$

Функция  $w$  отображает верхнюю полуплоскость  $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  на единичный круг  $K = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ . При этом точка  $i$  переводится в точку  $w = 0$  — центр круга  $K$ . ▶

**50.** Найти общий вид дробно-линейного преобразования, переводящего:

- 1) верхнюю полуплоскость на себя;
- 2) верхнюю полуплоскость на нижнюю полуплоскость;
- 3) верхнюю полуплоскость на правую полуплоскость.

◀ Согласно теореме 1, п. 1.1, любая дробно-линейная функция  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  осуществляет гомеоморфное отображение  $\overline{\mathbb{C}}$  на  $\overline{\mathbb{C}}$ . Поскольку  $w' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ , то в случае 1) должно выполняться условие  $ad-bc > 0$ , в случае 2) — условие  $ad-bc < 0$ . В случае 3) дробно-линейное преобразование имеет вид  $w = i \frac{az+b}{cz+d}$   $\wedge$   $ad-bc < 0$  (умножением на  $i$  нижняя полуплоскость поворачивается в положительном направлении на угол  $\frac{\pi}{2}$ , т.е. переходит в правую полуплоскость). Согласно общему определению дробно-линейной функции, числа  $a, b, c, d$  — действительные. ▶

**51.** Найти отображение верхней полуплоскости на себя при указанной нормировке:

$$1) w(0) = 1, w(1) = 2, w(2) = \infty; \quad 2) w(0) = 1, w(i) = 2i.$$

◀ 1) По теореме 1, п. 1.3, имеем

$$\frac{z}{2(z-1)} = \frac{w-1}{w-2}, \quad w = \frac{2}{2-z}.$$

2) Составляем таблицу

$z$	$0$	$i$	$-i$
$w$	$1$	$2i$	$-2i$

Точка  $-i$  переходит в точку  $-2i$ , так как  $i$  переходит в  $2i$  (симметричные точки переходят в симметричные). Снова применяем теорему 1, п. 1.3:

$$\frac{2z}{z-i} = \frac{4i}{2i+1} \cdot \frac{w-1}{w-2i}, \quad w = -2 \cdot \frac{2z+1}{z-2}. \quad \blacktriangleright$$

**52.** Найти функцию  $w = w(z)$ , отображающую круг  $K_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$  на правую полуплоскость  $P = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w > 0\}$  так, что  $w(R) = 0$ ,  $w(-R) = \infty$ ,  $w(0) = 1$ . Каков при этом отображении образ верхнего полукруга?

◀ Функция  $w$  имеет вид  $w = k \frac{z-R}{z+R}$ , поскольку  $w = 0$  при  $z = R$  и  $w \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow -R$ . Из условия  $w(0) = 1$  получаем, что  $k = -1$ . Таким образом,  $w = \frac{R-z}{R+z}$ .

Функция  $w$  отображает действительную ось  $Ox$  на действительную ось  $O'u$ . Следовательно, интервал  $-R < x < R$  переходит в луч — положительную действительную полуось, а полуокружность  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R \wedge \operatorname{Im} z > 0\}$  отображается в луч, выходящий из начала координат под углом  $-\frac{\pi}{2}$ . Пользуясь правилом обхода и свойством сохранения углов по величине и направлению при конформном отображении, приходим к выводу, что образом верхнего полукруга является четвертый квадрант  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v < 0\}$ . ►

**53.** Найти точки, симметричные с точкой  $2 + i$  относительно окружностей:

$$1) \gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}; \quad 2) \gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 3\}.$$

◀ Согласно формуле (3), п. 1.2, имеем

$$z^* = z_0 + \frac{R^2}{z - z_0}, \quad (1)$$

где  $z_0$  — центр окружности,  $R$  — ее радиус.

В случае 1)  $z_0 = 0$ ,  $R = 1$ , следовательно,  $z^* = \frac{1}{z} = \frac{1}{2+i} = \frac{1}{2-i} = \frac{1}{5}(2+i)$ .

В случае 2)  $z_0 = i$ ,  $R = 3$ ,  $z^* = i + \frac{9}{2+i-i} = \frac{9}{2} + i$ . ►

**54.** Найти симметричный образ относительно единичной окружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  следующих линий:

$$1) \gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{2}\}; \quad 2) \gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}; \quad 3) y = 2.$$

◀ Воспользуемся формулой (1) из примера 53.

1) Очевидно, что  $z = \frac{e^{i\theta}}{2}$ . Тогда  $z^* = \frac{1}{z} = 2e^{i\theta}$  — точки окружности радиуса 2, с центром в начале координат.

2) Поскольку  $z = 1 + e^{i\theta}$ , то  $z^* = \frac{1}{1+e^{-i\theta}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ . Симметричным образом является прямая, уравнение которой  $x = \frac{1}{2}$ .

3) Прямую, заданную на плоскости уравнением  $y = 2$ , представим в виде  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : -\infty < \operatorname{Re} z < +\infty, \operatorname{Im} z = 2\}$ , т. е.  $z = x + i2$ .

Тогда

$$z^* = x^* + iy^* = \frac{1}{x - i2} = \frac{x + i2}{x^2 + 4} = \frac{x}{x^2 + 4} + i \frac{2}{x^2 + 4}, \quad x^* = \frac{x}{x^2 + 4}, \quad y^* = \frac{2}{x^2 + 4}.$$

Поскольку  $x = \frac{2x^*}{y^*}$ , то, подставив это значение в правую часть равенства  $x^* = \frac{x}{x^2 + 4}$ , после несложных преобразований получим:

$$(x^*)^2 + \left(y^* - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, \quad \text{т. е.} \quad \left|z - \frac{i}{4}\right|^2 = \frac{1}{16}.$$

В данном случае симметричным образом является окружность радиуса  $\frac{1}{4}$  с центром в точке  $z = \frac{i}{4}$ . ►

**55.** Функция  $w = e^{i\alpha} \frac{z - \beta}{z - \bar{\beta}}$  ( $\beta = a + ib$ ,  $b > 0$ ) отображает верхнюю полуплоскость на единичный круг.

1) Найти  $\arg w(x) = \theta(x)$ ; 2) найти  $w'(\beta)$ ; 3) выяснить, какая часть верхней полуплоскости при этом отображении сжимается и какая растягивается.

◀ 1) Очевидно, что  $\arg w(x) = \alpha + 2 \arg(x - \beta)$ , так как  $\arg(x - \bar{\beta}) = -\arg(x - \beta)$ ;

2) Дифференцируя  $w(x)$ , получим:

$$w'(z) = e^{i\alpha} \frac{z - \bar{\beta} - z + \beta}{(z - \bar{\beta})^2} = e^{i\alpha} \frac{\beta - \bar{\beta}}{(z - \bar{\beta})^2} = e^{i\alpha} \frac{i2b}{(z - \bar{\beta})^2}.$$

Подставив в полученную формулу  $z = \beta$ , имеем

$$w'(\beta) = e^{i\alpha} \frac{i2b}{(i2b)^2} = \frac{e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2})}}{2b}.$$

3) Поскольку  $|w'(z)| = \frac{2b}{|z-\bar{\beta}|^2}$ , то при  $\sqrt{2b} < |z-\bar{\beta}|$  происходит сжатие, а при  $\sqrt{2b} > |z-\bar{\beta}|$  — растяжение. Из равенства  $|z-\bar{\beta}| = |(x-a) + i(y-b)|$  следует, что

$$\inf_{x \in \mathbb{R}, y > 0} |z-\bar{\beta}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2} \Big|_{\substack{x=a \\ y=0}} = b.$$

Из неравенства  $\sqrt{2b} < b$  получаем, что при  $b \geq 2$  вся полуплоскость сжимается. Если  $b < 2$ , то область, лежащая внутри круга  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z-\bar{\beta}| < \sqrt{2b}\}$ , растягивается. ►

**56.** Отобразить верхнюю полуплоскость  $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  на единичный круг  $K = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$  так, чтобы:

$$1) w(i) = 0, \arg w'(i) = -\frac{\pi}{2}; \quad 2) w(2i) = 0, \arg w'(2i) = 0;$$

$$3) w(a+ib) = 0, \arg w'(a+ib) = \theta \ (b > 0).$$

◀ 1) Согласно формуле (4), п. 1.3, отображение верхней полуплоскости на единичный круг осуществляется функцией  $w = e^{i\theta \frac{z-a}{z-\bar{a}}}$ . Из условия  $w(i) = 0$  следует, что  $a = i$ . Таким образом,  $w = e^{i\theta \frac{z-i}{z+i}}$ . Дифференцируя функцию  $w$ , получаем

$$w'(z) = 2i \frac{e^{i\theta}}{(z+i)^2}, \quad w'(i) = -\frac{i}{2} e^{i\theta} = \frac{1}{2} e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}.$$

Из условия  $\arg w'(i) = -\frac{\pi}{2} = \theta - \frac{\pi}{2}$  следует, что  $\theta = 0$ . Окончательно имеем

$$w = \frac{z-i}{z+i}.$$

2) В общей формуле  $w = e^{i\theta \frac{z-a}{z+\bar{a}}}$  полагаем  $a = 2i$ , тогда  $w = e^{i\theta \frac{z-2i}{z+2i}}$ . Поскольку

$$w'(z) = e^{i\theta} \frac{4i}{(z+2i)^2}, \quad w'(2i) = \frac{e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}}{4}, \quad \arg w'(2i) = \theta - \frac{\pi}{2} = 0,$$

то  $\theta = \frac{\pi}{2}$  и

$$w = i \frac{z-2i}{z+2i}.$$

3) По аналогии с 1) и 2) записываем функцию  $w$  в виде  $w = e^{i\theta_1 \frac{z-(a+bi)}{z-(a-bi)}}$ . Тогда

$$w'(z) = e^{i\theta_1} \frac{2bi}{(z-(a-bi))^2}, \quad w'(a+bi) = -\frac{i}{2b} e^{i\theta_1} = \frac{e^{i(\theta_1-\frac{\pi}{2})}}{2b}, \quad \arg w'(a+bi) = \theta_1 - \frac{\pi}{2} = \theta,$$

откуда  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \theta$ . Окончательно получаем

$$w = e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)} \cdot \frac{z-(a+bi)}{z-(a-bi)}. \blacktriangleright$$

**57.** Отобразить верхнюю полуплоскость  $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  на круг  $K = \{w \in \mathbb{C} : |w-w_0| < R\}$  так, чтобы точка  $i$  перешла в центр круга, а производная в этой точке была положительной.

◀ Сначала отобразим полуплоскость  $P$  на единичный круг  $K_1 = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$  так, чтобы точка  $i$  перешла в его центр  $w = 0$ . Согласно решению примера 56, 1),  $w_1 = e^{i\theta \frac{z-i}{z+i}}$ , причем  $w'(i) = \frac{1}{2} e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$ . При  $\theta = \frac{\pi}{2}$   $w'(i) = \frac{1}{2} > 0$ . Следовательно,  $w_1 = e^{i\frac{\pi}{2} \frac{z-i}{z+i}} = i \frac{z-i}{z+i}$ . Теперь совершаем преобразование подобия и переноса  $w = R w_1 + w_0$ . Окончательно получаем:

$$w = R i \frac{z-i}{z+i} + w_0. \blacktriangleright$$

**58.** Отобразить круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$  на полуплоскость  $P = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$  так, чтобы  $w(0) = 1$ ,  $\arg w'(0) = \frac{\pi}{2}$ .

◀ Поскольку при дробно-линейном отображении симметричные точки переходят в симметричные и  $0 \mapsto 1$ , то  $\infty \mapsto -1$ . Из таблицы

$z$	0	$\infty$
$w$	1	-1

видно, что дробно-линейная функция, отображающая  $K$  на  $P$ , имеет вид

$$w = k \frac{z - a}{z - b}.$$

Из условий нормировки находим:  $k = -1$ ,  $b = -a$ . Поэтому

$$w = -\frac{z - a}{z + a}.$$

Дифференцируя, получаем

$$w'(z) = -\frac{2a}{(z+a)^2}, \quad w'(0) = -\frac{2}{a}, \quad \arg w'(0) = \arg \left(-\frac{2}{a}\right) = \pi - \arg a = \frac{\pi}{2},$$

откуда  $\arg a = \frac{\pi}{2}$ . Следовательно,  $a = ia_1$  ( $a_1 > 0$ ) и  $w = -\frac{z - ia_1}{z + ia_1}$ . Пусть  $w = u + iv$ . Граница круга  $K$  переходит в мнимую ось плоскости  $w$ , т.е.  $2e^{i\theta} \mapsto iv$ ,  $iv = -\frac{2e^{i\theta} - ia_1}{2e^{i\theta} + ia_1}$ . В частности, при  $v = 0$  имеем  $2e^{i\theta} - ia_1 = 0$ . Это равенство выполняется при условии, что  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $a_1 = 2$ . Окончательно находим:

$$w(z) = -\frac{z - 2i}{z + 2i}.$$

**59.** Отобразить круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4i| < 2\}$  на полуплоскость  $P = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\}$  так, чтобы центр круга перешел в точку  $-4$ , а точка окружности  $2i$  — в начало координат.

◀ Сначала отобразим круг  $K$  на единичный круг  $K_1 = \{w_1 \in \mathbb{C} : |w_1| < 1\}$  с помощью функции  $w_1 = \frac{z}{2} - 2i$ . Тогда  $w_1 = 0 \mapsto w = -4$ ,  $w_1 = -i \mapsto 0$ . Так как точка  $w = -4i$  симметрична относительно прямой  $v = u$  точке  $-4$ , то  $w_1 = \infty \mapsto -4i$ . Составляем таблицу

$w_1$	0	$-i$	$\infty$
$w$	-4	0	$-4i$

и определяем искомое отображение общей формулой дробно-линейного преобразования

$$w = k \frac{w_1 - a}{w_1 - b}.$$

Согласно условиям нормировки имеем

$$-4 = \frac{ka}{b}, \quad k \frac{a+i}{b+i} = 0, \quad -4i = k,$$

откуда

$$a = -i, \quad b = 1, \quad k = -4i.$$

Таким образом,

$$w = -4i \frac{\frac{z}{2} - 2i + i}{\frac{z}{2} - 2i - 1} = -4 \frac{iz + 2}{z - 2 - 4i}.$$

**60.** Найти функцию, отображающую верхнюю полуплоскость на себя так, что  $w(a) = b$ ,  $\arg w'(a) = \alpha$  ( $\operatorname{Im} a > 0$ ,  $\operatorname{Im} b > 0$ ).

◀ Пусть  $w = w(z)$  — искомое отображение. Тогда функция

$$w \mapsto \frac{w - b}{w - \bar{b}} e^{i\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ — произвольное,}$$



отображает верхнюю полуплоскость плоскости  $w$  на единичный круг с центром в начале координат. На этот же круг функция

$$z \mapsto \frac{z-a}{z-\bar{a}} e^{i\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R} \text{ — произвольное,}$$

отображает верхнюю полуплоскость плоскости  $z$ . Таким образом,

$$\frac{w-b}{w-\bar{b}} = e^{i\theta_1} \frac{z-a}{z-\bar{a}}, \quad \theta_1 = \varphi - \theta \text{ — произвольное.}$$

Дифференцируя обе части этого равенства, получаем:

$$\frac{\operatorname{Im} b}{(w(z)-\bar{b})^2} w'(z) = e^{i\theta_1} \frac{\operatorname{Im} a}{(z-\bar{a})^2}.$$

Полагая здесь  $z=a$  и принимая во внимание, что  $w(a)=b$ , имеем

$$w'(a) = \frac{\operatorname{Im} b}{\operatorname{Im} a} e^{i\theta_1}.$$

Так как  $\frac{\operatorname{Im} b}{\operatorname{Im} a} > 0$ , то  $\arg w'(a) = \theta_1$ . Полагая  $\theta_1 = \alpha$ , получим:

$$\frac{w(z)-b}{w(z)-\bar{b}} = e^{i\alpha} \frac{z-a}{z-\bar{a}}; \quad \arg w'(a) = \alpha. \blacktriangleright$$

**61.** Отобразить верхнюю полуплоскость на нижнюю так, чтобы  $w(a) = \bar{a}$  и  $\arg w'(a) = -\frac{\pi}{2}$ .

◀ Пусть  $w = w(z)$  — искомое отображение. Полагая  $w_1 = e^{i\pi} w = -w$ , получим верхнюю полуплоскость. При этом  $a \mapsto -\bar{a}$ . Согласно предыдущему примеру

$$\frac{w_1 + \bar{a}}{w_1 + a} = e^{i\theta} \frac{z-a}{z-\bar{a}}, \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ — произвольное.}$$

Заменив  $w_1$  на  $-w$ , получим:

$$\frac{w - \bar{a}}{w - a} = e^{i\theta} \frac{z-a}{z-\bar{a}}.$$

Дифференцируя это равенство, имеем

$$-\frac{w'(z)}{(w(z)-a)^2} = \frac{e^{i\theta}}{(z-\bar{a})^2}.$$

Подставив сюда  $z=a$ , находим (приняв во внимание, что  $w(a) = \bar{a}$ ):

$$w'(a) = -e^{i\theta}.$$

Следовательно,  $\arg w'(a) = \theta \pm \pi = -\frac{\pi}{2}$  (по условию задачи). Из двух значений  $\theta_1 = -\frac{3}{2}\pi$ ,  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ , подходит значение  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , поскольку  $-\pi < \arg w'(a) \leq \pi$ . Окончательно имеем

$$\frac{w - \bar{a}}{w - a} = i \frac{z-a}{z-\bar{a}}. \blacktriangleright$$

**62.** Для функции  $w = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$  ( $|a| < 1$ ) отображающей единичный круг на себя:

- 1) найти  $\arg w(e^{i\varphi}) = \theta(\varphi)$ ;
- 2) найти  $w'(0)$  и  $w'(a)$ ;
- 3) выяснить, какая часть единичного круга при этом отображении сжимается и какая растягивается;
- 4) найти  $\max \left| \frac{dw}{dz} \right|$  и  $\min \left| \frac{dw}{dz} \right|$  для  $|z| \leq 1$ .

◀ 1) При  $z = e^{i\varphi}$  получаем

$$w = e^{i\alpha} \frac{e^{i\varphi} - a}{1 - \bar{a}e^{i\varphi}} = e^{i\alpha} \frac{e^{i\varphi} - a}{e^{i\varphi}(e^{-i\varphi} - \bar{a})} = e^{i(\alpha-\varphi)} \cdot \frac{e^{i\varphi} - a}{e^{-i\varphi} - \bar{a}}.$$

Пусть  $a = \lambda e^{i\theta_1}$ . Тогда

$$\theta(\varphi) = \alpha - \varphi + 2 \operatorname{arctg}(e^{i\varphi} - a) = \alpha - \varphi + 2 \operatorname{arctg} \frac{\sin \varphi - \lambda \sin \theta_1}{\cos \varphi - \lambda \cos \theta_1}.$$

2) Дифференцируя, находим:

$$w'(z) = e^{i\alpha} \frac{1 - \bar{a}z + \bar{a}(z - a)}{(1 - \bar{a}z)^2} = e^{i\alpha} \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2}, \quad w'(0) = e^{i\alpha} (1 - |a|^2), \quad w'(a) = \frac{e^{i\alpha}}{1 - |a|^2}.$$

3) Если  $\left| \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2} \right| > 1$ , то соответствующая часть круга растягивается; если  $\left| \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2} \right| < 1$ , то соответствующая часть круга сжимается. Решив эти элементарные неравенства, получим, что

множество внутренних точек круга  $G = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{\bar{a}} \right| < \sqrt{\frac{1}{|a|^2} - 1} \right\}$  растягивается, а множество внешних точек круга  $D = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{\bar{a}} \right| > \sqrt{\frac{1}{|a|^2} - 1} \right\}$  сжимается. Окружность  $\gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{\bar{a}} \right| = \sqrt{\frac{1}{|a|^2} - 1} \right\}$  — изометрическая. Если  $a = 0$ , то  $|w'(z)| = 1$ .

4) Из оценок  $|1 - \bar{a}z| \geq 1 - |a||z| \geq 1 - |\bar{a}|$ ,  $|1 - \bar{a}z| \leq 1 + |a||z| \leq 1 + |a|$ , для производной  $w'(z)$  находим  $\max_{|z| \leq 1} |w'(z)|$  и  $\min_{|z| \leq 1} |w'(z)|$ :

$$\max_{|z| \leq 1} |w'(z)| = \frac{1 + |a|}{1 - |a|}, \quad \min_{|z| \leq 1} |w'(z)| = \frac{1 - |a|}{1 + |a|}. \blacktriangleright$$

**63.** Отобразить круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  на круг  $K_1 = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$  так, чтобы:

$$1) w\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = 0; \quad 2) w\left(\frac{i}{2}\right) = 0, \quad \arg w'\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2};$$

$$3) w(0) = 0, \quad \arg w'(0) = -\frac{\pi}{2}; \quad 4) w(a) = a, \quad \arg w'(a) = \alpha.$$

◀ 1) Воспользуемся решением задачи 62, полагая в 2)  $a = \frac{1}{2}$ . Получим:

$$\arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = \arg \frac{e^{i\alpha}}{1 - \frac{1}{4}} = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Тогда

$$w = \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{2z - 1}{2 - z}.$$

2) По аналогии с предыдущим полагаем  $a = \frac{i}{2}$ . Тогда

$$w'\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{e^{i\alpha}}{1 - \frac{1}{4}}, \quad \arg w'\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$w = e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{z - \frac{i}{2}}{1 - \frac{iz}{2}} = i \frac{2z - i}{2 + iz} = \frac{2iz + 1}{2 + iz}.$$

3) В задаче 62, 2) показано, что  $w'(a) = \frac{e^{i\alpha}}{1 - \bar{a}a}$ . Полагая здесь  $a = 0$ , получим  $w'(0) = e^{i\alpha}$ . Из условия  $\arg w'(0) = -\frac{\pi}{2}$  следует, что  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ . Тогда

$$w = e^{-i\frac{\pi}{2}} \frac{z}{2} = -iz$$

(в общую формулу  $w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$  подставляем  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ,  $a = 0$ ).

4) Пусть  $w = w(z)$  — искомое отображение  $K$  на  $K_1$ . Функции  $z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$  и  $w \mapsto e^{i\varphi} \frac{w - a}{1 - \bar{a}w}$  отображают соответственно круги  $K$  и  $K_1$  на себя ( $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$  — произвольные). Поскольку  $\arg w'(a) = \alpha$ , то, по аналогии с решением задачи 60, имеем

$$\frac{w - a}{1 - \bar{a}w} = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}. \blacktriangleright$$

**64.** Отобразить круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R_1\}$  на круг  $K_1 = \{w \in \mathbb{C} : |w| < R_2\}$  так, чтобы  $w(a) = b$ ,  $\arg w'(a) = \alpha$  ( $|a| < R_1$ ,  $|b| < R_2$ ).

◀ Функция

$$w_1(z) = \frac{z}{R_1}$$

отображает  $K$  на единичный круг, а функция

$$w_2 = e^{i\theta} \frac{w_1 - w_1(a)}{1 - \overline{w_1(a)}w_1} = e^{i\theta} \frac{\frac{z}{R_1} - \frac{a}{R_1}}{1 - \frac{\bar{a}z}{R_1^2}} = e^{i\theta} R_1 \frac{z - a}{R_1^2 - \bar{a}z}$$

отображает этот единичный круг на себя. Пусть  $w = w(z)$  — отображение круга  $K$  на круг  $K_1$ . Тогда функция

$$w_3 = e^{i\varphi} R_2 \frac{w - b}{R_2^2 - \bar{b}w}$$

также отображает единичный круг на себя. В полученных формулах  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$  — произвольные. Таким образом,

$$R_2 \frac{w - b}{R_2^2 - \bar{b}w} = e^{i(\theta - \varphi)} R_1 \frac{z - a}{R_1^2 - \bar{a}z}.$$

Продифференцировав это равенство, получим:

$$R_2 \cdot \frac{w'(z)(R_2^2 - |\bar{b}|^2)}{(R_2^2 - \bar{b}w(z))^2} = R_1 \cdot \frac{R_1^2 - |a|^2}{(R_1^2 - \bar{a}z)^2} e^{i(\theta - \varphi)}.$$

Полагая  $z = a$  и принимая во внимание, что  $w(a) = b$ , находим:

$$\frac{R_2}{R_2^2 - |b|^2} w'(a) = \frac{R_1}{R_1^2 - |a|^2} \cdot e^{i(\theta - \varphi)}, \quad w'(a) = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_2^2 - |b|^2}{R_1^2 - |a|^2} e^{i(\theta - \varphi)}.$$

Поскольку  $\frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_2^2 - |b|^2}{R_1^2 - |a|^2} > 0$ , то взяв  $\theta - \varphi = \alpha$ , получим, что  $\arg w'(a) = \alpha$ . Окончательно имеем

$$R_2 \frac{w - b}{R_2^2 - \bar{b}w} = e^{i\alpha} R_1 \frac{z - a}{R_1^2 - \bar{a}z}. \blacktriangleright$$

**65.** Отобразить круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  на круг  $K_1 = \{w \in \mathbb{C} : |w - 1| < 1\}$  так, чтобы  $w(0) = \frac{1}{2}$  и  $w(1) = 0$ .

◀ Полагаем  $w_1 = w - 1$ . Тогда  $|w_1| = |w - 1| \leq 1$ . Отображение единичного круга  $K$  на единичный круг  $K_2 = \{w_1 \in \mathbb{C} : |w_1| < 1\}$  в общем случае имеет вид

$$w_1 = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим таблицу нормировки

$z$	0	1
$w$	$\frac{1}{2}$	0
$w_1$	$-\frac{1}{2}$	-1

Для определения неизвестных параметров получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -ae^{i\theta} = -\frac{1}{2} \\ \frac{1-a}{1-\bar{a}} e^{i\theta} = -1. \end{cases}$$

Подставив во второе уравнение системы  $e^{i\theta} = \frac{1}{2a}$ , получим:

$$1 - a = -2a + 2|a|^2 \quad \text{или} \quad a = 2|a|^2 - 1.$$

Поскольку  $(2|a|^2 - 1) \in \mathbb{R}$ , то  $a$  — действительное число и  $\bar{a} = a$ . Для определения  $a$  получаем квадратное уравнение  $a^2 - \frac{a}{2} - \frac{1}{2} = 0$ , корни которого  $a_1 = 1$  и  $a_2 = -\frac{1}{2}$ . Так как  $|-ae^{i\theta}| = |a| = \frac{1}{2}$

(см. первое уравнение системы), то  $a = -\frac{1}{2}$ . Таким образом,  $\bar{a} = -\frac{1}{2}$ ,  $e^{i\theta} = -1$ . Подставив эти значения в формулу для  $w_1$ , получим:

$$w_1 = -\frac{z + \frac{1}{2}}{1 + \frac{z}{2}} = -\frac{2z + 1}{2 + z}.$$

Окончательно имеем

$$w = w_1 + 1 = \frac{1 - z}{2 + z}. \blacktriangleright$$

**66.** Отобразить круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| < 1\}$  на круг  $K_1 = \{w \in \mathbb{C} : |w - 2i| < 2\}$  так, чтобы  $w(2) = i$  и  $\arg w'(2) = 0$ .

◀ Полагаем  $w_1 = z - 2$  и  $w_2 = \frac{w - 2i}{2}$ . Задача свелась к отображению круга  $K_2 = \{w_1 \in \mathbb{C} : |w_1| < 1\}$  на круг  $K_3 = \{w_2 \in \mathbb{C} : |w_2| < 1\}$  при условиях  $w_2(0) = -\frac{i}{2}$ ,  $w_2'(0) = 0$ . Воспользуемся решением задачи 64, полагая там  $R_1 = R_2 = 1$ ,  $\alpha = 0$ . Получим:

$$\frac{w_2 + \frac{i}{2}}{1 - \frac{i}{2}w_2} = w_1, \quad w_2 = \frac{w_1 - \frac{i}{2}}{1 + \frac{i}{2}w_1} = \frac{z - 2 - \frac{i}{2}}{1 + \frac{i}{2}(z - 2)} = \frac{2z - 4 - i}{2 + i(z - 2)}.$$

Принимая во внимание связь между  $w_2$  и  $w$ , имеем

$$w = 2(w_2 + i) = 2 \left( \frac{2z - 4 - i}{2 + i(z - 2)} + i \right) = 2 \frac{z - 2 + i}{iz + 2 - 2i}. \blacktriangleright$$

**67.** 1) Отобразить кольцо  $K = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 5\}$  на кольцо  $K_1 = \{w \in \mathbb{C} : 4 < |w| < 10\}$  так, чтобы  $w(5) = -4$ .

2) Отобразить кольцо  $\bar{K} = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 2i| < 2\}$  на кольцо  $\bar{K}_1 = \{w \in \mathbb{C} : 2 < |w - 3 + 2i| < 4\}$  так, чтобы  $w(0) = -1 - 2i$ .

◀ Воспользуемся теоремой: для того чтобы существовало конформное отображение кольца  $K' = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$  на кольцо  $K'' = \{w \in \mathbb{C} : R_1 < |w| < R_2\}$ , необходимо и достаточно выполнения условия  $\frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2}{r_1}$ . При этом отображающая функция может быть только двух видов:

$$w = az \quad \text{или} \quad w = \frac{a}{z}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Отображение однозначно определяется заданием одной пары соответствующих друг другу граничных точек.

1) Очевидно, что в данном случае отображающая функция имеет вид  $w = \frac{a}{z}$ , так как по условию внутренняя окружность кольца  $K$  должна перейти во внешнюю окружность кольца  $K_1$ . Из соответствия точек находим:  $-4 = \frac{a}{5}$ ,  $a = -20$ . Следовательно,

$$w = -\frac{20}{z}.$$

2) Полагаем  $w_1 = z - 2i$ ,  $w_2 = w - 3 + 2i$ . Тогда  $1 < |w_1| < 2$  и  $2 < |w_2| < 4$ . Задача свелась к отображению одного концентрического кольца на другое, причем  $\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ . При этом  $w_1 = -2i \mapsto -4$ . Здесь внешняя окружность одного кольца переходит во внешнюю окружность другого кольца, поэтому  $w_2 = aw_1$ , т. е.  $w - 3 + 2i = a(z - 2i)$ . Постоянную  $a$  находим из условия  $-4 = -2ia$ , откуда  $a = -2i$ . Окончательно получаем:

$$w = 3 - 2i - 2i(z - 2i) = 3 - 2i - 2iz - 4 = -2iz - 1 - 2i = -(2iz + 1 + 2i). \blacktriangleright$$

**68.** Полуплоскость  $P = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$  с выкинутым кругом  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - h| < R\}$  ( $h > R$ ) отобразить на кольцо  $K' = \{w \in \mathbb{C} : \rho < |w| < 1\}$  так, чтобы мнимая ось перешла в окружность  $\gamma = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ . Найти  $\rho$ .

◀ Найдем точки  $\pm\alpha$ , симметричные одновременно относительно окружности  $\partial K = \{z \in \mathbb{C} : |z - h| = R\}$  и мнимой оси. Они удовлетворяют условию  $(h - \alpha)(h + \alpha) = R^2$ , т. е.  $h^2 - \alpha^2 = R^2$ ,  $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{h^2 - R^2}$ . Отображение  $w$  ищем в виде

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \sqrt{h^2 - R^2}}{z + \sqrt{h^2 - R^2}}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

При  $z = iy$  имеем

$$w = e^{i\theta} \frac{iy - \sqrt{h^2 - R^2}}{iy + \sqrt{h^2 - R^2}}, \quad |w| = |e^{i\theta}| \left| \frac{iy - \sqrt{h^2 - R^2}}{iy + \sqrt{h^2 - R^2}} \right| = 1.$$

Следовательно, мнимая ось отображается в окружность  $\gamma$ . Поскольку точка  $h + R$  лежит на окружности  $\partial K$  (см. рис. 47), и эта окружность переходит в окружность радиуса  $\rho$  с центром в точке  $w = 0$ , то

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{h + R - \sqrt{h^2 - R^2}}{h + R + \sqrt{h^2 - R^2}} = \frac{\sqrt{h + R} - \sqrt{h - R}}{\sqrt{h + R} + \sqrt{h - R}} = \\ &= \frac{h - \sqrt{h^2 - R^2}}{R} = \frac{h}{R} - \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2 - 1}. \end{aligned}$$

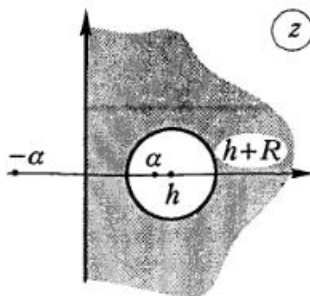


Рис. 47

**69.** Полуплоскость  $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$  с выкинутым кругом  $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - h| < 1\}$  ( $h > 1$ ) отобразить на кольцо  $K' = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < 2\}$ . Найти  $h$ .

◀ Воспользуемся решением предыдущего примера. Поскольку должно выполняться условие  $|w| = 2$ , то

$$w = e^{i\theta} 2 \frac{z - \sqrt{h^2 - 1}}{z + \sqrt{h^2 - 1}}, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Полагая в формуле для определения  $\rho$  в предыдущем примере  $\rho = 1$ ,  $R = 1$ , находим:

$$1 = 2 \left( h - \sqrt{h^2 - 1} \right), \quad h = \frac{5}{4}$$

(предварительно умножив правую часть формулы на 2, принимая во внимание (1)). Подставив в (1)  $h = \frac{5}{4}$ , окончательно получим:

$$w = e^{i\theta} 2 \frac{4z - 3}{4z + 3}. \blacktriangleright$$

**70.** Эксцентрическое кольцо, ограниченное окружностями  $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3| = 9\}$ ,  $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 8| = 16\}$  отобразить на кольцо  $K' = \{w \in \mathbb{C} \mid \rho < |w| < 1\}$ . Найти  $\rho$ .

◀ Находим точки  $a$  и  $a^*$ , симметричные относительно  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ :

$$(3 - a)(3 - a^*) = 81,$$

$$(8 - a)(8 - a^*) = 256.$$

Решив эту систему, получаем  $a = 0$ ,  $a^* = -24$ . Дальше можно решать задачу двумя способами.

1) Отображаем  $a = 0 \mapsto w = 0$ ,  $a^* = -24 \mapsto w = \infty$ . Тогда окружность  $\gamma_2$  перейдет в окружность  $\gamma'_2 = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$ . Следовательно,

$$w = k \frac{z}{z + 24}.$$

Поскольку точка  $z = 24 \in \gamma_2$  отображается на окружность  $\gamma'_2$ , то  $1 = |k| \frac{24}{48}$ ,  $|k| = 2$ ,  $k = 2e^{i\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . Функция  $w = w(z)$  принимает вид

$$w = e^{i\theta} \frac{2z}{z + 24}$$

Так как точка  $z = 12 \in \gamma_1$  отображается на окружность радиуса  $\rho$ , то

$$\rho = \left| e^{i\theta} \frac{2 \cdot 12}{12 + 24} \right| = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}.$$

2) Точку  $a = 0$  отображаем в  $w = \infty$ , а точку  $a^* = -24$  — в  $w = 0$ . Тогда окружность  $\gamma_1$  перейдет в окружность  $\gamma'_1$ . Имеем

$$w = k \frac{z + 24}{z}, \quad 1 = |k| \frac{36}{12}, \quad k = \frac{e^{i\theta}}{3}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Окончательно имеем

$$w = e^{i\theta} \frac{z + 24}{3z}, \quad \rho = \frac{24 + 24}{3 \cdot 24} = \frac{2}{3}$$

(точка  $z = 24 \in \gamma_2$  отображается на окружность радиуса  $\rho$  с центром  $w = 0$ ). ►

При решении некоторых задач, связанных с применением дробно-линейных функций, целесообразно пользоваться так называемой нормальной формой дробно-линейного отображения с двумя неподвижными точками.

Всякая дробно-линейная функция  $L: z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ , отличная от тождественного отображения  $w = z$ , имеет не более двух неподвижных точек, т. е. точек, которые при отображении  $L$  переходят сами в себя. Действительно, уравнение

$$z = \frac{az+b}{cz+d}$$

имеет корни

$$z_{1,2} = \frac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Они совпадают между собой, если  $(a-d)^2 + 4bc = 0$ , а в противном случае имеем две неподвижные точки.

Если неподвижной точкой будет  $\infty$ , то это возможно лишь в случае, когда  $c = 0$ , т. е. когда  $L$  — целая линейная функция. Если же обе неподвижные точки сливаются с бесконечно удаленной точкой, то  $c = 0$  и  $d = a$ , что соответствует параллельному переносу.

Пусть  $L$  — дробно-линейная функция с двумя различными неподвижными точками  $z_1$  и  $z_2$ . Для удобства будем изображать  $z$  и  $w = L(z)$  точками в одной плоскости. Рассмотрим также вспомогательную плоскость, в которой будем изображать переменные  $v$  и  $\zeta$ . Полагаем

$$v = \frac{w - z_1}{w - z_2} = S(w), \quad \zeta = \frac{z - z_1}{z - z_2} = S(z).$$

В случае  $z_2 = \infty$   $v = w - z_1 = S(w)$ ,  $\zeta = z - z_1 = S(z)$ .

Из формул  $v = S(w)$ ,  $w = L(z)$ ,  $z = S^{-1}(\zeta)$  получаем:

$$v = (S \circ L \circ S^{-1})(\zeta).$$

Для дробно-линейной функции  $S \circ L \circ S^{-1}$ , устанавливающей зависимость между  $v$  и  $\zeta$ , неподвижными точками являются 0 и  $\infty$ , в силу чего эта зависимость имеет вид  $v = k\zeta$ , где  $k$  — некоторая комплексная постоянная. Следовательно, данное линейное преобразование  $L$  можно задать в виде

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad (1)$$

или, в случае  $z_2 = \infty$ ,  $w - z_1 = k(z - z_1)$ .

Формулу (1) называют *нормальной формой* дробно-линейного отображения с двумя неподвижными точками. Поскольку

$$k = \frac{w - z_1}{w - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_1} \quad (2)$$

не зависит от  $z$ , то, полагая  $z = 0$ ,  $w = \frac{a}{d}$ , получим:

$$k = \frac{a + d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{a + d + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}. \quad (3)$$

Если  $z = \infty$ , то  $k = \frac{a}{d}$ .

Различают три случая: 1)  $k > 0$ ; 2)  $k = e^{i\theta}$  ( $\theta \neq 0$ ); 3)  $k = re^{i\theta}$  ( $\theta \neq 0$ ,  $r \neq 1$ ). В случае 1) отображение (1) называется *гиперболическим*, в случае 2) — *эллиптическим*, в случае 3) — *локсотропическим*.

**71.** 1) Отобразить внутренность угла  $0 < \arg z < \pi \cdot \alpha$  ( $0 < \alpha \leq 2$ ) на верхнюю полуплоскость.

2) Отобразить угол  $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$  на верхнюю полуплоскость так, чтобы  $w(1-i) = 2$ ,  $w(i) = -1$ ,  $w(0) = 0$ .

◀ 1) Очевидно, что  $w = z^{\frac{1}{\alpha}}$

2) Отображение  $w_1 = \left(ze^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} = z^{\frac{4}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}$  переводит внутренность угла на верхнюю полуплоскость. Рассмотрим условия нормировки, которые удобно записать в виде таблицы

$z$	$1-i$	$i$	$0$
$w_1$	$\sqrt[3]{4}$	$-1$	$0$
$w$	$2$	$-1$	$0$

Отображение  $w = w(w_1)$  имеет две неподвижные точки:  $-1$  и  $0$ . Применим формулу (1), полученную выше:

$$\frac{w+1}{w} = k \frac{w_1+1}{w_1}, \quad \text{откуда} \quad w = \frac{w_1}{(k-1)w_1+k}.$$

Осталось найти  $k$ . Воспользуемся тем, что  $w_1 = \sqrt[3]{4} \mapsto w = 2$ . Имеем

$$\frac{2+1}{2} = k \frac{\sqrt[3]{4}+1}{\sqrt[3]{4}}, \quad \text{т.е.} \quad k = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2(\sqrt[3]{4}+1)}, \quad k-1 = \frac{3\sqrt[3]{4}-2}{2(\sqrt[3]{4}+1)}.$$

Подставив  $w_1 = z^{\frac{4}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}}$  в формулу для  $w$ , получим:

$$w = \frac{2(\sqrt[3]{4}+1)e^{i\frac{\pi}{3}}z^{\frac{4}{3}}}{(\sqrt[3]{4}-2)e^{i\frac{\pi}{3}}z^{\frac{4}{3}}+3\sqrt[3]{4}}. \quad \blacktriangleright$$

**72.** Найти функцию  $w$ , отображающую полукруг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \wedge \operatorname{Im} z > 0\}$  на верхнюю полуплоскость при условиях:

$$1) w(-1) = 0, w(0) = 1, w(1) = \infty; \quad 2) w(\pm 1) = \mp 1, w(0) = \infty; \quad 3) w\left(\frac{i}{2}\right) = i, \arg w'\left(\frac{i}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

◀ Из свойств функции Жуковского следует, что функция  $w_1 = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$  отображает полукруг  $K$  на верхнюю полуплоскость. В каждом случае будем находить требуемое отображение  $w$  по условиям нормировки.

1) Запишем условия нормировки в виде таблицы

$z$	$-1$	$0$	$1$
$w_1$	$1$	$\infty$	$-1$
$w$	$0$	$1$	$\infty$

Ясно, что функция  $w = w(z)$  имеет вид

$$w = \frac{w_1 - 1}{w_1 + 1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$

2) Условия нормировки имеют вид

$z$	$1$	$-1$	$0$
$w_1$	$-1$	$1$	$\infty$
$w$	$-1$	$1$	$\infty$

Отображение  $w = w(w_1)$  имеет две неподвижные точки:  $w_1 = 1$  и  $w_2 = \infty$ . Как показано выше, в этом случае

$$w = 1 + k(w_1 - 1).$$

Коэффициент  $k$  находим из условия  $-1 = 1 + k(-1 - 1)$ , откуда  $k = 1$ . Окончательно имеем

$$w = 1 - \left(1 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = -\frac{z^2 + 1}{2z}.$$

3) Поскольку  $z = \frac{i}{2} \mapsto w_1 = \frac{3}{4}i \mapsto w = i$ , то, согласно решению задачи 60,

$$\frac{w-i}{w+i} = e^{i\alpha} \frac{w_1 - \frac{3}{4}i}{w_1 + \frac{3}{4}i}, \quad \alpha = \arg \frac{dw\left(\frac{3}{4}i\right)}{dw_1}.$$



Дифференцируя  $w$  как сложную функцию, получим:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dw_1} \frac{dw_1}{dz}, \quad \frac{dw\left(\frac{i}{2}\right)}{dz} = \frac{dw\left(\frac{3}{4}i\right)}{dw_1} \cdot \frac{dw_1\left(\frac{i}{2}\right)}{dz},$$

откуда

$$\arg \frac{dw\left(\frac{3}{4}i\right)}{dw_1} = \arg w'\left(\frac{i}{2}\right) - \arg w_1'\left(\frac{i}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \pm \pi = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{w-i}{w+i} = i \frac{w_1 - \frac{3}{4}i}{w_1 + \frac{3}{4}i}, \quad w = -\frac{4w_1+3}{4w_1-3} = \frac{-2z^2+3z-2}{2z^2+3z+2}. \blacktriangleright$$

**73.** Найти функцию  $w(z)$ , отображающую полукруг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \wedge \operatorname{Im} z > 0\}$  на круг  $K' = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$  при условиях:

$$1) w(\pm 1) = \pm 1, \quad w(0) = -i; \quad 2) w\left(\frac{i}{2}\right) = 0, \quad \arg w'\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

◀ Сначала отобразим полукруг  $K$  посредством функции  $w_1 = -\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$  на верхнюю полуплоскость плоскости  $w_1$ , а затем построим отображение верхней полуплоскости на единичный круг при выполнении условий нормировки.

1) Составим таблицу нормировки. Она имеет вид

$z$	1	-1	0
$w_1$	-1	1	$\infty$
$w$	1	-1	$-i$

Искомая функция  $w$  имеет стандартный вид:

$$w = e^{i\theta} \frac{w_1 - a}{w_1 - \bar{a}}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Из условий нормировки получаем:

$$1 = e^{i\theta} \cdot \frac{1+a}{1+\bar{a}}, \quad -1 = e^{i\theta} \frac{1-a}{1-\bar{a}}, \quad -i = e^{i\theta}.$$

Постоянную  $a$  находим из системы уравнений

$$1 = -i \frac{1+a}{1+\bar{a}}, \quad -1 = -i \frac{1-a}{1-\bar{a}},$$

или

$$\begin{cases} 1 + \bar{a} = -i(1+a) \\ 1 - \bar{a} = i(1-a) \end{cases}$$

Ее решения:  $a = i$ ,  $\bar{a} = -i$ . Искомая функция  $w$  имеет вид

$$w = -i \frac{-\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - i}{-\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + i} = i \frac{z + \frac{1}{z} + 2i}{-z - \frac{1}{z} + 2i} = i \frac{z^2 + 2iz + 1}{-z^2 + 2iz - 1} = \frac{z^2 + 2iz + 1}{iz^2 + 2z + i}.$$

2) Поскольку  $z = \frac{i}{2} \mapsto w_1 = \frac{3}{4}i \mapsto w = 0$ , то

$$w = e^{i\theta} \frac{w_1 - \frac{3}{4}i}{w_1 + \frac{3}{4}i} = e^{i\theta} \frac{4w_1 - 3i}{4w_1 + 3i}.$$

Дифференцируя функцию  $w$  по переменной  $w_1$ , получим:

$$\frac{dw}{dw_1} = \frac{24ie^{i\theta}}{(4w_1 + 3i)^2}, \quad \frac{dw\left(\frac{3}{4}i\right)}{dw_1} = \frac{24ie^{i\theta}}{-36} = -\frac{2}{3}ie^{i\theta}, \quad \arg \frac{dw\left(\frac{3}{4}i\right)}{dw_1} = -\frac{\pi}{2} + \theta.$$

С другой стороны, как показано в предыдущей задаче,

$$\arg \frac{dw \left( \frac{3}{4}i \right)}{dw_1} = \arg w' \left( \frac{1}{2} \right) - \arg w'_1 \left( \frac{1}{2} \right).$$

Подставив в это равенство

$$\arg \frac{dw \left( \frac{3}{4}i \right)}{dw_1} = -\frac{\pi}{2} + \theta, \quad \arg w' \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2}, \quad \arg w'_1 \left( \frac{1}{2} \right) = \pm \pi,$$

и выбирая  $\arg w'_1 \left( \frac{1}{2} \right) = -\pi$  (так как  $-\pi < \arg w' \left( \frac{1}{2} \right) - \arg w'_1 \left( \frac{1}{2} \right) \leq \pi$ ), имеем

$$-\frac{\pi}{2} + \theta = -\frac{\pi}{2}, \quad \theta = 0.$$

Таким образом,

$$w = \frac{4w_1 - 3i}{4w_1 + 3i} = \frac{-2 \left( z + \frac{1}{z} \right) - 3i}{-2 \left( z + \frac{1}{z} \right) + 3i} = \frac{2z^2 + 3iz + 2}{2z^2 - 3iz + 2}. \blacktriangleright$$

**74.** Найти функцию  $w(z)$ , отображающую область  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1 \wedge \operatorname{Im} z > 0\}$  на верхнюю полуплоскость.

◀ Такое отображение осуществляет функция Жуковского  $w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ . Можно также воспользоваться дробно-линейной функцией, отображающей область  $G$  на первый квадрант, а затем возвести в квадрат полученное. Полагаем  $w_1 = \frac{z-1}{z+1}$ . Тогда  $z = 1 \mapsto w_1 = 0$ ,  $z = -1 \mapsto w = \infty$ . При  $z = i$  получаем  $w_1(z) = \frac{i-1}{i+1} = \frac{-(i-1)^2}{2} = i$ . Убедились в том, что функция  $w_1$  отображает  $G$  на первый квадрант. Следовательно,

$$w = w_1^2 = \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^2. \blacktriangleright$$

**75.** Отобразить на верхнюю полуплоскость:

1) сектор  $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, 0 < \arg z < \pi\alpha\}$  ( $0 < \alpha \leq 2$ );

2) область  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R, 0 < \arg z < \pi\alpha\}$  ( $0 < \alpha \leq 2$ ).

◀ 1) Функция  $w_1 = z^{1/\alpha}$  отображает, очевидно, сектор  $S$  на верхний полукруг радиуса  $R^{1/\alpha}$  с центром в точке  $w_1 = 0$ . Рассмотрим функцию

$$w_2 = -\frac{w_1 + R^{1/\alpha}}{w_1 - R^{1/\alpha}}.$$

Тогда  $w_1 = -R^{1/\alpha} \mapsto w_2 = 0$ ,  $w_1 = R^{1/\alpha} \mapsto w_2 = \infty$ ,  $w_2 \left( R^{1/\alpha} i \right) = \frac{1}{2}(1+i)^2 = i$ . Следовательно, функция  $w_2$  отображает указанный полукруг на первый квадрант плоскости  $w_2$ . Поэтому искомое отображение имеет вид

$$w = w_2^2 = \left( \frac{z^{1/\alpha} + R^{1/\alpha}}{z^{1/\alpha} - R^{1/\alpha}} \right)^2.$$

2) Функция  $w_1 = \frac{z^{1/\alpha} - R^{1/\alpha}}{z^{1/\alpha} + R^{1/\alpha}}$  отображает область  $D$  на область  $D' = \{w_1 \in \mathbb{C} : |w_1| > R^{1/\alpha} \wedge \operatorname{Im} w_1 > 0\}$ . Согласно решению задачи 74, имеем

$$w = \left( \frac{z^{1/\alpha} - R^{1/\alpha}}{z^{1/\alpha} + R^{1/\alpha}} \right)^2. \blacktriangleright$$

**76.** Отобразить на верхнюю полуплоскость следующие круговые луночки (двуугольники):

1)  $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1\}$ ;

2)  $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z - i| > 1\}$ ;

3)  $D_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1\}$ ;

4)  $D_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z - i| > 1\}$ ;

5)  $D_5 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}\}$ .

◀ 1) Находим граничные угловые точки, являющиеся точками пересечения окружностей, заданных уравнениями  $|z| = 1$  и  $|z-i| = 1$ . Полагая  $z = e^{i\theta}$ , получим:  $1 = |e^{i\theta} - i|$ , или

$$1 = |\cos \theta + i(\sin \theta - 1)| = \sqrt{2(1 - \sin \theta)}.$$

Отсюда находим:  $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ,  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ,  $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$  (рис. 48). Строим дробно-линейное отображение, переводящее точку  $z_2$  в нуль, а точку  $z_1$  — в  $\infty$ :

$$w_1 = \frac{z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}}{z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}} = \frac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i}.$$

Принимая во внимание, что  $w_1(0) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$ ,  $w_1(i) = -\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ , строим образ луночки  $D_1$  в плоскости  $w_1$  (рис. 49). Дальнейшие преобразования очевидны:  $w_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} w_1$  — поворот на угол  $-\frac{2\pi}{3}$  и  $w = w_2^{\frac{3}{2}}$ . Окончательно получаем:

$$w = - \left( \frac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

2) Граничные угловые точки луночки  $D_2$  те же, что и у луночки  $D_1$ :  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ,  $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ . Взяв функцию  $w_1 = \frac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i}$ , снова получим на плоскости  $w_1$  внутренность угла, образованного лучами, выходящими из начала координат, с углом при вершине  $\frac{\pi}{3}$  (рис. 50).

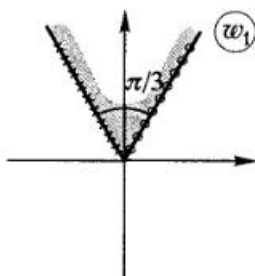


Рис. 50

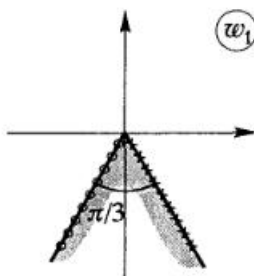


Рис. 51

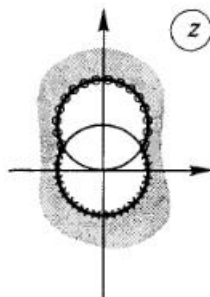


Рис. 52

Полагаем далее  $w_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}} w_1$ ,

$$w = w_2^3 = - \left( \frac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i} \right)^3.$$

3) Функция  $w_1 = \frac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i}$  отображает луночку  $D_3$  на внутренность угла (рис. 51). Очевидно, что искомая функция  $w$  имеет вид

$$w = \left( e^{i\frac{2\pi}{3}} w_1 \right)^3 = \left( \frac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i} \right)^3.$$

4) Как и в предыдущих случаях, граничными угловыми точками луночки  $D_4$  (см. рис. 52) являются

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

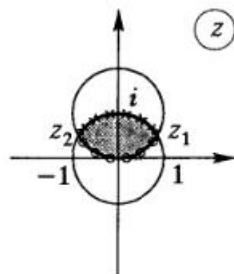


Рис. 48

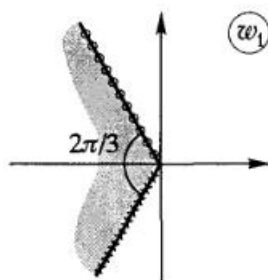


Рис. 49

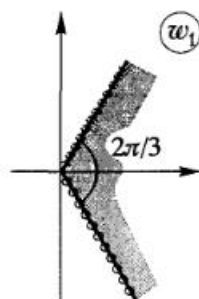


Рис. 53

Вспомогательная функция  $w_1$  — прежняя. Поскольку

$$w_1(2i) = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad w_1(-i) = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2},$$

то функция  $w_1$  отображает луночку  $D_4$  на внутренность угла, изображенного на рис. 53. Применяв преобразование поворота на угол  $\frac{\pi}{3}$   $w_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} w_1$ , окончательно получим:

$$w = w_2^{\frac{3}{2}} = i \left( \frac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

5) Найдём граничные угловые точки луночки  $D_5$  (рис. 54). Для этого полагаем  $z = 2e^{i\theta}$  и рассматриваем уравнение относительно  $\theta$

$$|2e^{i\theta} - \sqrt{2}|^2 = 2,$$

откуда после несложных выкладок получаем:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2}(1+i).$$

Очевидно,  $z_2 = \bar{z}_1 = \sqrt{2}(1-i)$ . Полагаем по аналогии с предыдущим

$$w_1 = \frac{z - z_2}{z - z_1} = \frac{z - \sqrt{2}(1-i)}{z - \sqrt{2}(1+i)}.$$

Установим образы точек  $z = 2$  и  $z = 2\sqrt{2}$  на плоскости  $w_1$ . Имеем

$$\begin{aligned} w_1(2) &= \frac{2 - \sqrt{2}(1-i)}{2 - \sqrt{2}(1+i)} = \frac{\sqrt{2} - 1 + i}{\sqrt{2} - 1 - i} = \frac{(\sqrt{2} - 1 + i)^2}{(\sqrt{2} - 1)^2 + 1} = \\ &= \frac{2 - 2\sqrt{2} + 2i(\sqrt{2} - 1)}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{i - 1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Точка  $z = 2$  переводится в точку, лежащую на биссектрисе второго координатного угла. Далее,

$$w_1(2\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}(1-i)}{2\sqrt{2} - \sqrt{2}(1+i)} = \frac{2 - (1-i)}{2 - (1+i)} = \frac{1+i}{1-i} = i,$$

т. е. образ точки  $z = 2\sqrt{2}$  принадлежит мнимой оси плоскости  $w_1$ . Луночка  $D_5$  отображается на внутренность угла, образованного положительной полуосью и биссектрисой второго координатного угла (рис. 55).

Функция  $w_2 = w_1 e^{-i\frac{\pi}{2}}$  отображает указанное множество на внутренность угла, образованного положительной действительной полуосью и биссектрисой первого координатного угла в плоскости  $w_2$ . Очевидно, что искомая функция имеет вид

$$w = w_2^4 = \left( -i \frac{z - \sqrt{2}(1-i)}{z - \sqrt{2}(1+i)} \right)^4 = \left( \frac{z - \sqrt{2}(1-i)}{z - \sqrt{2}(1+i)} \right)^4. \blacktriangleright$$

77. Отобразить на верхнюю полуплоскость плоскость с разрезом по отрезку  $[-1, 1]$ .

Рассмотрим функцию  $w_1 = \frac{z+1}{z-1}$ . Тогда  $z = -1 \mapsto w_1 = 0$ ,  $z = 1 \mapsto w_1 = \infty$ . Поскольку  $w_1(0) = -1$ , то становится ясным, что функция  $w_1$  отображает плоскость с разрезом по отрезку  $[-1, 1]$  на плоскость с разрезом по отрицательной действительной полуоси. Функция  $w_2 = -w_1$  отображает плоскость с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси на плоскость с разрезом вдоль положительной действительной полуоси. Искомое отображение имеет вид:

$$w = \sqrt{w_2} = \sqrt{\frac{z+1}{1-z}}. \blacktriangleright$$

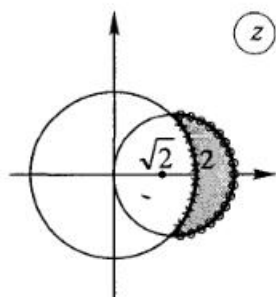


Рис. 54

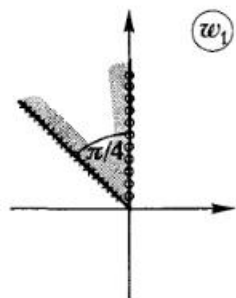


Рис. 55

**78.** Отобразить на верхнюю полуплоскость плоскость с разрезом по отрезку  $[-i, i]$ .

◀ Полагая  $w_1 = -iz$ , получим плоскость с разрезом по отрезку  $[-1, 1]$ , т. е. сведем задачу к предыдущей. Таким образом,

$$w = \sqrt{\frac{w_1 + 1}{1 - w_1}} = \sqrt{\frac{-iz + 1}{1 + iz}} = \sqrt{\frac{z + i}{i - z}}. \blacktriangleright$$

**79.** Отобразить на верхнюю полуплоскость плоскость с разрезом по отрезку  $[z_1, z_2]$ .

◀ Рассмотрим целую линейную функцию  $w_1 = az + b$  и потребуем, чтобы  $z_1 \mapsto -1$ ,  $z_2 \mapsto 1$ . Для определения  $a$  и  $b$  получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} -1 = az_1 + b \\ 1 = az_2 + b. \end{cases}$$

Ее решения:  $a = \frac{2}{z_2 - z_1}$ ,  $b = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ . Задача свелась к отображению плоскости  $w_1$  с разрезом вдоль отрезка  $[-1, 1]$  на верхнюю полуплоскость. (см. задачу 77). Следовательно,

$$w = \sqrt{\frac{w_1 + 1}{1 - w_1}} = \sqrt{\frac{az + b + 1}{1 - az - b}} = \sqrt{\frac{\frac{2z}{z_2 - z_1} - \frac{z_1 + z_2}{z_2 - z_1} + 1}{1 - \frac{2z}{z_2 - z_1} + \frac{z_1 + z_2}{z_2 - z_1}}} = \sqrt{\frac{z - z_1}{z_2 - z}}. \blacktriangleright$$

**80.** Отобразить на верхнюю полуплоскость плоскость с разрезами по лучам  $(-\infty, -R]$ ,  $[R, +\infty)$  ( $R > 0$ ).

◀ Функция  $w_1 = \frac{z+R}{z-R}$  отображает указанную плоскость с разрезами на плоскость с разрезом вдоль положительной действительной полуоси. Следовательно,

$$w = \sqrt{w_1} = \sqrt{\frac{z+R}{z-R}}$$

— искомое отображение. ▶

**81.** Отобразить на верхнюю полуплоскость плоскость с разрезом по расположенному в первом квадранте лучу, выходящему из точки  $i$  параллельно прямой  $y = x$ .

◀ Функция  $w_1 = z - i$  отображает указанную плоскость с разрезом на плоскость с разрезом вдоль биссектрисы первого координатного угла с вершиной разреза в начале координат, т. е. в точке  $w_1 = 0$ . Функция  $w_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}} w_1$  отображает плоскость  $w_1$  с разрезом вдоль биссектрисы первого координатного угла на плоскость с разрезом вдоль положительной действительной полуоси. Искомое отображение, очевидно, имеет вид

$$w = \sqrt{w_2} = e^{-i\frac{\pi}{8}} \sqrt{z - i}. \blacktriangleright$$

**82.** Отобразить на верхнюю полуплоскость плоскости  $w$  полуплоскость

$$P = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$$

с разрезом по отрезку  $[0, ih]$  ( $h > 0$ ).

◀ Функция  $w_1 = z^2$  отображает указанную полуплоскость с разрезом на плоскость с разрезом вдоль отрезка  $[-h^2, 0]$ . Полагая  $w_2 = w_1 + h^2$ , получим отображение плоскости  $w_1$  с разрезом вдоль отрезка  $[-h^2, 0]$  на плоскость с разрезом вдоль отрезка  $[0, h^2]$ . Следовательно,

$$w = \sqrt{w_2} = \sqrt{z^2 + h^2}$$

— искомое отображение. ▶

**83.** Отобразить на верхнюю полуплоскость плоскости  $w$  полуплоскость

$$P = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$$

с разрезом от  $ih$  до  $\infty$  вдоль положительной мнимой полуоси.

◀ В плоскости  $w_1 = z^2$  образом заданной области будет плоскость с разрезами на действительной оси по лучам  $(-\infty, -h_2)$  и  $(0, +\infty)$ . Дробно-линейное отображение  $w_2 = \frac{w_1 + h^2}{w_1}$  переводит ее в плоскость с разрезом по положительной действительной полуоси. Окончательно получаем

$$w = \sqrt{w_2} = \frac{\sqrt{z^2 + h^2}}{z}. \blacktriangleright$$

**84.** Отобразить на верхнюю полуплоскость:

- 1) круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  с разрезом по радиусу  $[0, 1]$ ;
- 2) внешность единичного круга с разрезом по лучу  $[1, +\infty)$ .

◀ 1) Функция  $w_1 = \sqrt{z}$  отображает заданную область на верхний полукруг (при соответствующем выборе ветви  $\sqrt{z}$ ). Тогда

$$w = \left( \frac{w_1 + 1}{w_1 - 1} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{z} + 1}{\sqrt{z} - 1} \right)^2$$

— искомое отображение.

2) Функция  $w_1 = \sqrt{z}$  (при соответствующем выборе ветви  $\sqrt{z}$ ) отображает заданную область на верхнюю полуплоскость с выброшенным верхним полукругом радиуса 1 с центром  $w_1 = 0$ . Тогда функция

$$w = \left( \frac{\sqrt{z} + 1}{\sqrt{z} - 1} \right)^2$$

— искомая. Внешние функции  $w$  в 1) и 2) одинаковы, а выбор ветвей  $\sqrt{z}$  в них разный. ▶

**85.** Найти отображение круга  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  на  $w$ -плоскость с разрезом по лучу  $(-\infty, -\frac{1}{4}]$  при условии, что  $w(0) = 0$ ,  $w'(0) > 0$ .

◀ Пусть  $z = z(w_1)$  — отображение верхней полуплоскости плоскости  $w_1$  на круг  $K$ . Тогда  $z = k \frac{w_1 - \beta}{w_1 - \bar{\beta}}$ ,  $k = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . Отсюда находим:

$$w_1 = \frac{z\bar{\beta} - k\beta}{z - k}.$$

Искомое отображение имеет, очевидно, вид

$$w = -w_1^2 - \frac{1}{4} = -\left( \frac{z\bar{\beta} - k\beta}{z - k} \right)^2 - \frac{1}{4}. \quad (1)$$

Поскольку  $w(0) = 0 = -\beta^2 - \frac{1}{4}$  и  $\text{Im } \beta > 0$ , то  $\beta = \frac{i}{2}$ . Подставив это значение в формулу (1), получим после несложных преобразований:

$$w = \frac{1}{4} \left( \left( \frac{z+k}{z-k} \right)^2 - 1 \right) = \frac{kz}{(z-k)^2}.$$

Дифференцируя  $w$ , имеем

$$w'(z) = -k \frac{(z+k)}{(z-k)^3}.$$

Из условия  $w'(0) > 0$  следует, что  $\frac{1}{k} > 0$ . Так как  $|k| = 1$ , то  $k = e^{i\theta} > 0$  при  $\theta = 0$ , т. е.  $k = 1$ . Окончательно получаем:

$$w = \frac{z}{(1-z)^2}. \blacktriangleright$$

**86.** Найти преобразование полярной сетки  $|z| = R$ ,  $\arg z = \alpha$  с помощью функции Жуковского  $w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ .

◀ Подставив в формулу для  $w$  значение  $z = Re^{i\alpha}$ , получим:

$$w = u + iv = \frac{1}{2} \left( Re^{i\alpha} + \frac{1}{R} e^{-i\alpha} \right) = \frac{1}{2} \left( \left( R + \frac{1}{R} \right) \cos \alpha + i \left( R - \frac{1}{R} \right) \sin \alpha \right).$$

Таким образом,

$$u = \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{R} \right) \cos \alpha, \quad v = \frac{1}{2} \left( R - \frac{1}{R} \right) \sin \alpha. \quad (1)$$

Из равенств (1) находим:

$$\cos \alpha = \frac{2u}{R + \frac{1}{R}}, \quad \sin \alpha = \frac{2v}{R - \frac{1}{R}}, \quad \frac{4u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1. \quad (2)$$

Из (2) следует, что окружностям  $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$  соответствуют софокусные эллипсы. В частности, окружности  $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  соответствует отрезок  $\gamma = \{w \in \mathbb{C} : -1 \leq \operatorname{Re} w \leq 1, \operatorname{Im} w = 0\}$  (см. § 5).

Записав первые два уравнения в (2) в виде

$$\frac{u}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{R} \right), \quad \frac{v}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} \left( R - \frac{1}{R} \right)$$

и возведя левые и правые части полученных равенств в квадрат, а затем складывая соответственно квадраты левых и правых частей, получим

$$\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1. \quad (3)$$

Равенство (3) показывает, что лучам  $\arg z = \alpha$  соответствуют ветви софокусных гипербол. В частности, лучу  $\arg z = 0$  соответствует луч  $\varphi_0 = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \geq 1, \operatorname{Im} w = 0\}$ . Действительно, при  $\alpha = 0$  из (2) получаем, что  $v = 0$ ,  $u = \frac{R+1/R}{2} \geq \sqrt{R \cdot \frac{1}{R}} = 1$ . Аналогично устанавливаем, что лучу  $\arg z = \pi$  соответствует луч  $\varphi_\pi = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \leq -1, \operatorname{Im} w = 0\}$ , а лучам  $\arg z = \pm \frac{\pi}{2}$  — ось  $\operatorname{Re} w = 0$ . ▶

**87.** Пользуясь функцией Жуковского, отобразить:

1) внешность отрезка  $[-c, c]$  ( $c > 0$ ) на внешность единичного круга при условии, что  $w(\infty) = \infty$ ,  $\arg w'(\infty) = \alpha$ ;

2) внешность эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  на внешность единичного круга так, чтобы  $w(\infty) = \infty$ ,  $\arg w'(\infty) = 0$ ;

3) верхнюю полуплоскость с выкинутым полуэллипсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ,  $y > 0$ , на верхнюю полуплоскость.

◀ 1) Полагаем  $w_1 = \frac{z}{c}$ . При этом отрезок  $[-c, c]$  перейдет в отрезок  $[-1, 1]$ . Теперь применим к функции  $w_1$  отображение, обратное функции Жуковского:

$$w_2 = w_1 + \sqrt{w_1^2 - 1}.$$

Дифференцируя функцию  $w_2$ , находим:

$$\frac{dw_2}{dw_1} = 1 + \frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 - 1}}.$$

Поскольку  $w_1(\infty) = \infty$ , то

$$\arg \frac{dw_2(\infty)}{dw_1} = \arg 2 = 0.$$

Взяв  $w = w_2 e^{i\alpha}$ , получим

$$\frac{dw(\infty)}{dz} = \frac{e^{i\alpha}}{c} \left( 1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} \right) \Big|_{z=\infty} = \frac{2}{c} e^{i\alpha}, \quad \arg \frac{dw(\infty)}{dz} = \alpha.$$



Таким образом,

$$w = \frac{e^{i\alpha}}{c} \left( z + \sqrt{z^2 - c^2} \right)$$

— искомое отображение.

2) Проведем преобразование подобия точек так, чтобы фокусами эллипса были точки  $(-1, 0)$  и  $(1, 0)$ :

$$w_1 = \frac{z}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Определим радиус  $r$  окружности, в которую функция Жуковского преобразует данный эллипс

$$\frac{u_1^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2} + \frac{v_1^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2} = 1.$$

Обозначим  $\tilde{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ . Тогда находим  $r$  из уравнения  $\tilde{a} = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right)$  или  $r^2 - 2\tilde{a}r + 1 = 0$ , откуда  $r = \tilde{a} + \sqrt{\tilde{a}^2 - 1}$  (берем перед радикалом знак "+", поскольку должно быть  $r > 1$ ). Имеем

$$r = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2 - b^2}} = \frac{a + b}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Далее применяем функцию, обратную функции Жуковского, полагая  $w_2 = w_1 + \sqrt{w_1^2 - 1}$ . Тогда искомая функция  $w$  определяется равенством

$$w = \frac{w_2}{r} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b} \left( \frac{z}{\sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{\frac{z^2}{a^2 - b^2} - 1} \right) = \frac{1}{a + b} \left( z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)} \right).$$

3) Воспользуемся решением предыдущей задачи. Отобразим данную область на верхнюю полуплоскость с выброшенным единичным полукругом:

$$w_1 = \frac{1}{a + b} (z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}).$$

Теперь связь между функциями  $w_1$  и  $w$  устанавливается функцией Жуковского

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left( w_1 + \frac{1}{w_1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}}{a + b} + \frac{a + b}{z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}}{a + b} + \frac{(a + b)(z - \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)})}{a^2 - b^2} \right) = \frac{az - b\sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

**88.** Отобразить двусвязную область, ограниченную софокусными эллипсами

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2 + k^2} + \frac{y^2}{b^2 + k^2} = 1 \quad (a > b),$$

на концентрическое круговое кольцо с центром в начале координат и найти модуль данной двусвязной области (каждая двусвязная область, границы которой не вырождаются в точки, может быть конформно отображена на концентрическое кольцо с вполне определенным отношением  $\mu$  радиусов внешней и внутренней окружностей. Число  $\mu$  называется модулем двусвязной области).

◀ Преобразование подобия  $w_1 = \frac{z}{\sqrt{a^2 - b^2}}$  преобразует заданный эллипс в эллипс с фокусами в точках  $\pm 1$  и осями  $\tilde{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ ,  $\tilde{b} = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ .

Теперь с помощью функции, обратной функции Жуковского, отображаем эллиптическое кольцо на круговое:

$$w_2 = w_1 + \sqrt{w_1^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left( z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)} \right).$$

Если совершить преобразование поворота и подобия, то снова получим концентрическое кольцо. Таким образом, в общем случае искомое отображение  $w$  имеет вид

$$w = \kappa \left( z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)} \right), \quad \kappa \in \mathbb{C} \text{ — произвольное.}$$

Модуль области равен отношению радиусов окружностей концентрического кольца. В плоскости  $w_1$  большими полуосями эллипсов являются

$$\tilde{a}_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \tilde{a}_2 = \sqrt{\frac{a^2 + k^2}{a^2 - b^2}}, \quad \text{т. к. } \tilde{a} = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right), \quad r = \tilde{a} \pm \sqrt{\tilde{a}^2 - 1}.$$

Следовательно,

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \pm \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2} - 1}}{\sqrt{\frac{a^2 + k^2}{a^2 - b^2}} \pm \sqrt{\frac{a^2 + k^2}{a^2 - b^2} - 1}} = \frac{a \pm b}{\sqrt{a^2 + k^2} \pm \sqrt{b^2 + k^2}}, \quad \mu = \frac{a - b}{\sqrt{a^2 + k^2} - \sqrt{b^2 + k^2}}. \blacktriangleright$$

**89.** Найти область, на которую функция Жуковского отображает круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  с разрезом по отрезку  $[a, 1]$  ( $-1 < a < 1$ ). Рассмотреть случаи  $a > 0$  и  $a < 0$ .

◀ Пусть  $a > 0$ . Поскольку функция Жуковского отображает единичный круг на всю плоскость с разрезом по отрезку  $[-1, 1]$ , в который переходит граница круга, то она отображает заданную область на всю плоскость  $w$  с разрезом по отрезку  $[-1, \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})]$ .

Пусть  $a < 0$ . Функция Жуковского  $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  переводит точку  $a$  в  $\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}) < -1$ , точку  $-1$  в  $-1$ . Пусть  $z = x$ . При  $x \rightarrow -0$   $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) \rightarrow -\infty$ , а при  $x \rightarrow +0$   $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) \rightarrow +\infty$ . Таким образом, в рассматриваемом случае функция Жуковского отображает заданную область на всю плоскость  $w$  с разрезами по лучам  $(-\infty, \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})]$  и  $[-1, +\infty)$ . ▶

**90.** Отобразить на верхнюю полуплоскость круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  с разрезом по отрезку  $[\frac{1}{2}, 1]$ .

◀ Функция Жуковского  $w_1 = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  отображает заданную область на всю плоскость  $w_1$  с разрезом по отрезку  $[-1, \frac{5}{4}]$ . Получили задачу 79, в которой  $z_1 = w_1^{(1)} = -1$ ,  $z_2 = w_1^{(2)} = \frac{5}{4}$ . Следовательно, искомое отображение — функция

$$w = \sqrt{\frac{w_1 - w_1^{(1)}}{w_1^{(2)} - w_1}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}}. \blacktriangleright$$

**91.** Отобразить на верхнюю полуплоскость круг  $k = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  с разрезами по радиусу  $[-1, 0]$  и отрезку  $[a, 1]$  ( $0 < a < 1$ ).

◀ Функция Жуковского  $w_1 = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  отображает заданное множество на всю плоскость  $w_1$  с разрезом по лучу  $(-\infty, \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}))$ . Действительно,  $\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}) \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1$ ,  $z = x \rightarrow -\infty$  при  $x \rightarrow -0$ , а окружность  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  переходит в разрез по отрезку  $[-1, 1]$ . В итоге получаем плоскость с разрезом по лучу  $\gamma' = (-\infty, \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}))$ . Функция  $w_2 = w_1 - \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$  отображает плоскость  $w_1$  с разрезом по лучу  $\gamma'$  на всю плоскость  $w_2$  с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси. Функция  $w_3 = -w_2$  отображает плоскость  $w_2$  с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси на всю плоскость  $w_3$  с разрезом вдоль положительной действительной полуоси. Следовательно, требуемая функция —

$$w = \sqrt{w_3} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \left( a + \frac{1}{a} \right) - \left( z + \frac{1}{z} \right) \right)}. \blacktriangleright$$

**92.** Отобразить на верхнюю полуплоскость верхнюю половину круга  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  с разрезом по отрезку  $[0, i\alpha]$  ( $0 < \alpha < 1$ ).

◀ Функция  $w_1 = z^2$  отображает заданное множество на единичный круг с разрезом вдоль отрезка  $[-\alpha^2, 1]$ . Функция Жуковского  $w_2 = \frac{1}{2} \left( w_1 + \frac{1}{w_1} \right)$  отображает этот круг с разрезом на всю плоскость  $w_2$  с разрезами вдоль лучей  $(-\infty, -\frac{1}{2}(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}))$  и  $[0, +\infty)$ , а функция

$$w_3 = \frac{w_2 + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2})}{w_2}$$

отображает эту плоскость с двумя разрезами на всю плоскость с разрезом вдоль положительной действительной полуоси. Следовательно,  $w = \sqrt{w_3}$  — искомое отображение. Таким образом,

$$w = \sqrt{\frac{(z^2 + \frac{1}{z^2}) + (\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2})}{z^2 + \frac{1}{z^2}}}. \blacktriangleright$$

**93.** Отобразить на верхнюю полуплоскость верхнюю половину круга  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  с разрезом по отрезку  $[\alpha i, i]$  ( $0 < \alpha < 1$ ).

◀ Функция  $w_1 = z^2$  отображает заданное множество на единичный круг с разрезами по отрезкам  $[-1, -\alpha^2]$  и  $[0, 1]$ . Функция Жуковского  $w_2 = \frac{1}{2} \left( w_1 + \frac{1}{w_1} \right)$  отображает этот круг с двумя разрезами на всю плоскость  $w_2$  с разрезом вдоль луча  $[-\frac{1}{2}(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}), +\infty)$ . Функция

$$w_3 = w_2 + \frac{1}{2} \left( \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \right)$$

отображает плоскость  $w_2$  с указанным разрезом на всю плоскость  $w_3$  с разрезом вдоль положительной действительной полуоси. Следовательно,

$$w = \sqrt{w_3} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \left( \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \right) + \left( z^2 + \frac{1}{z^2} \right) \right)}$$

— требуемое отображение. ▶

**94.** Отобразить круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  с выкинутым отрезком  $[(1-h)e^{i\alpha}, e^{i\alpha}]$  на единичный круг плоскости  $w$ .

◀ Функция  $w_1 = \frac{z}{e^{i\alpha}}$  отображает заданную область на единичный круг с разрезом по отрезку  $[(1-h)e^{i\alpha}, e^{i\alpha}]$ , а функция  $w_2 = \frac{1}{2} \left( w_1 + \frac{1}{w_1} \right)$  отображает этот круг на всю плоскость  $w_2$  с разрезом по отрезку  $[-1, h_1]$ , где  $h_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - h + \frac{1}{1-h} \right) = \frac{(1-h)^2 + 1}{2(1-h)}$ . Длина этого отрезка равна  $\frac{(1-h)^2 + 1}{2(1-h)} + 1 = \frac{(2-h)^2}{2(1-h)}$ . Возьмем половину длины этого отрезка и рассмотрим число  $h_1 - \frac{(2-h)^2}{4(1-h)} = \frac{h^2}{4(1-h)}$ . Осуществим преобразование переноса так, чтобы разрез  $[-1, h_1]$  стал симметричным относительно начала координат, полагая

$$w_3 = w_2 - \frac{h^2}{4(1-h)}.$$

Функция  $w_3$  отображает плоскость  $w_2$  с разрезом по отрезку  $[-1, h_1]$  на всю плоскость  $w_3$  с разрезом по отрезку  $\left[ -\frac{(2-h)^2}{4(1-h)}, \frac{(2-h)^2}{4(1-h)} \right]$ . Рассмотрим в плоскости  $w$  единичный круг  $K_1 = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ , на который отображается круг  $K$ . Функция  $\omega = \frac{1}{2} \left( w + \frac{1}{w} \right)$  отображает круг  $K_1$  на всю плоскость  $\omega$  с разрезом по отрезку  $[-1, 1]$ . Полагая

$$w_3 = \frac{(2-h)^2}{4(1-h)} \omega = \left( 1 + \frac{h^2}{4(1-h)} \right) \omega = \left( 1 + \frac{h^2}{4(1-h)} \right) \frac{1}{2} \left( w + \frac{1}{w} \right)$$

и подставив в это равенство

$$w_3 = w_2 - \frac{h^2}{4(1-h)} = \frac{1}{2} \left( \left( w_1 + \frac{1}{w_1} \right) - \frac{h^2}{2(1-h)} \right) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{z}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{z} \right) - \frac{h^2}{2(1-h)} \right),$$

получим после сокращения на  $\frac{1}{2}$ :

$$\left( 1 + \frac{h^2}{4(1-h)} \right) \left( w + \frac{1}{w} \right) = \left( \frac{z}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{z} \right) - \frac{h^2}{2(1-h)}. \blacktriangleright$$

**95.** Отобразить на внешность единичного круга: 1) всю плоскость с разрезами по отрезкам  $[-1, 1]$  и  $[-i, i]$  (внешность креста); 2) всю плоскость с разрезами по лучам  $(-\infty, -1]$ ,  $[1, +\infty)$ ,  $(-i\infty, -i]$ ,  $[i, +i\infty)$ .

◀ Для решения задачи сформулируем, не вникая в подробности, принцип симметрии Римана—Шварца, который рассмотрим подробно в главе 7. Суть его состоит в следующем: пусть область  $G \subset \bar{\mathbb{C}}$  ограничена замкнутой жордановой кривой  $\Gamma$ , в состав которой входит дуга  $l$  окружности  $L$  расширенной комплексной плоскости. Пусть функция  $f$  определена и непрерывна на  $G \cup l$ , аналитическая в  $G$ , а на  $l$  принимает значения, принадлежащие некоторой окружности  $C \subset \bar{\mathbb{C}}$ . Тогда  $f$  продолжается через дугу  $l$  в область  $G^*$ , симметричную  $G$  относительно  $L$  до функции, аналитической в  $G \cup l \cup G^*$ . Такое продолжение (через  $l$ ) единственно и определяется следующим свойством продолженной функции  $f$ : если точки  $z \in G$  и  $z^* \in G^*$  симметричны относительно  $L$ , то точки  $w = f(z)$  и  $w^* = f(z^*)$  симметричны относительно  $C$ . В частности, если  $L$  и  $C$  совпадают с действительной осью плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$ , то  $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$  при  $z \in G \cup l \cup G^*$ .

1) Внешность креста изображена на рис. 56.

Применим принцип симметрии Римана—Шварца: отображаем верхнюю полуплоскость с разрезом  $[0, i]$  на верхнюю полуплоскость, полагая

$$w_1 = \sqrt{z^2 + 1}.$$

Функция  $w_1$  вместе с ее аналитическим продолжением, которое также обозначим  $w_1$ , осуществляет отображение внешности креста на всю плоскость  $w_1$  с разрезом вдоль отрезка  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ . Функция

$$w_2 = \frac{w_1}{\sqrt{2}}$$

отображает плоскость  $w_1$  с указанным разрезом на всю плоскость  $w_2$  с разрезом по отрезку  $[-1, 1]$ . Функция

$$w = w_2 + \sqrt{w_2^2 - 1},$$

обратная функции Жуковского, осуществляет отображение плоскости  $w_2$  с разрезом по отрезку  $[-1, 1]$  на внешность единичного круга. Окончательно получаем:

$$w = \frac{w_1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{w_1^2}{2} - 1} = \frac{\sqrt{z^2 + 1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{z^2 + 1 - 2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{z^2 - 1} \right).$$

2) Функция  $w_1 = \frac{1}{z}$  осуществляет отображение заданного множества на внешность креста из предыдущей задачи. Поэтому искомое отображение  $w$  определяется формулой

$$w = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{w_1^2 + 1} - \sqrt{w_1^2 - 1} \right) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot z} \left( \sqrt{1 + z^2} + \sqrt{1 - z^2} \right). \blacktriangleright$$

**96.** Отобразить верхнюю полуплоскость с разрезом по отрезку  $l = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = a > 0, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq h\}$  на верхнюю полуплоскость.

◀ Искомая функция  $w$  является композицией элементарных преобразований:

$$w_1 = z - a, \quad w_2 = w_1^2, \quad w_3 = w_2 + h^2, \quad w = \sqrt{w_3} = \sqrt{(z - a)^2 + h^2}.$$

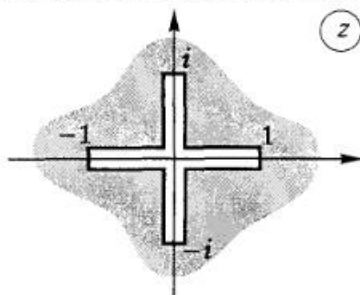


Рис. 56

Легко видеть, что аналитическая ветвь  $w$ , осуществляющая заданное отображение, определяется условием  $w(0) < 0$  (см. рис. 57). ►

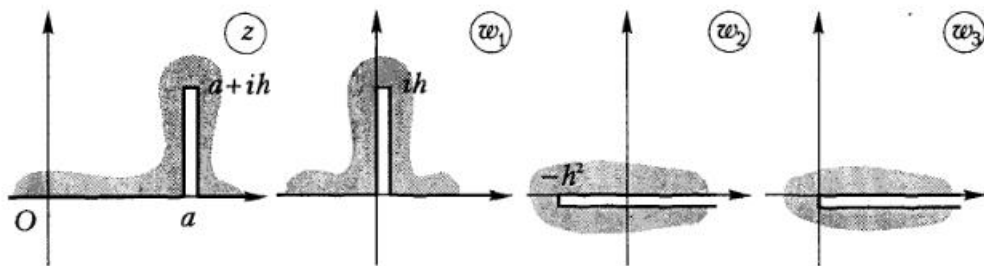


Рис. 57

**97.** Отобразить на верхнюю полуплоскость и на внешность единичного круга внешность креста, состоящего из отрезка  $[-a, b]$  действительной оси и отрезка  $[-ci, ci]$  мнимой оси ( $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $c \geq 0$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ) (рис. 58).

◀ Согласно решению задачи 96, функция  $w_1 = \sqrt{z^2 + c^2}$  конформно отображает верхнюю полуплоскость с разрезом по отрезку  $[0, ci]$  на верхнюю полуплоскость, причем рассматривается та ее ветвь, которая характеризуется условием  $w_1(0) < 0$ . При этом прямолинейный отрезок границы

$$L = \{z \in \mathbb{C} : -\infty \leq \operatorname{Re} z \leq -a, \operatorname{Im} z = 0\} \cup \\ \cup \{z \in \mathbb{C} : b \leq \operatorname{Re} z \leq +\infty, \operatorname{Im} z = 0\}$$

отображается на отрезок

$$L' = \{w_1 \in \mathbb{C} : -\infty \leq \operatorname{Re} w_1 \leq -\sqrt{a^2 + c^2}, \operatorname{Im} w_1 = 0\} \cup \\ \cup \{w_1 \in \mathbb{C} : 0 < \sqrt{b^2 + c^2} \leq \operatorname{Re} w_1 \leq +\infty, \operatorname{Im} w_1 = 0\}.$$

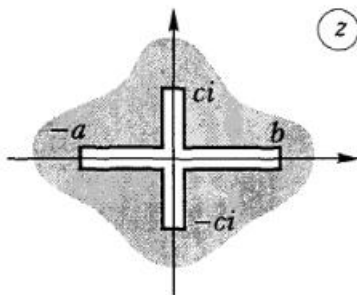


Рис. 58

Согласно принципу симметрии Римана—Шварца, функция  $w_1$  допускает аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость через отрезок  $L$ . При этом образом внешности креста в  $w_1$ -плоскости является внешность отрезка

$$l = \{w_1 \in \mathbb{C} : -\sqrt{a^2 + c^2} \leq \operatorname{Re} w_1 \leq \sqrt{b^2 + c^2}, \operatorname{Im} w_1 = 0\}.$$

Согласно решению задачи 79, функция

$$w = \sqrt{\frac{w_1 + \sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{b^2 + c^2} - w_1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{z^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{z^2 + c^2}}}. \quad (1)$$

отображает внешность отрезка  $l$ , следовательно, и внешность креста, на верхнюю полуплоскость.

Решим вторую часть задачи. Обозначим длину отрезка  $[-\sqrt{a^2 + c^2}, \sqrt{b^2 + c^2}]$  через  $2\beta$  и подберем такое  $\alpha \in \mathbb{R}$ , чтобы выполнялись условия

$$\frac{-\sqrt{a^2 + c^2} + \alpha}{\frac{\beta}{2}} = -1, \quad \frac{\sqrt{b^2 + c^2} + \alpha}{\frac{\beta}{2}} = 1,$$

что равносильно уравнениям

$$\frac{2(\sqrt{b^2 + c^2} + \alpha)}{\sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2}} = 1, \quad \frac{2(-\sqrt{a^2 + c^2} + \alpha)}{\sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2}} = -1.$$

Решением этих уравнений является  $\alpha = \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{b^2 + c^2}}{2}$ .

Функция  $w_2 = \frac{1}{\beta}(w_1 + \alpha)$  отображает плоскость  $w_1$  с разрезом по отрезку  $[-\sqrt{a^2 + c^2}, \sqrt{b^2 + c^2}]$  на всю  $w_2$  — плоскость с разрезом по отрезку  $[-1, 1]$ . Для получения требуемого отображения плоскости  $w_2$  с указанным разрезом применим функцию, обратную функции Жуковского:

$$w = w_2 + \sqrt{w_2^2 - 1} = \frac{1}{\beta} \left( \sqrt{z^2 + c^2} + \alpha + \sqrt{(\sqrt{z^2 + c^2} + \alpha)^2 - \beta^2} \right),$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{b^2 + c^2}}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2}}{2}. \blacktriangleright$$

**98.** Плоскость с разрезами по лучу  $[-a, +\infty)$  ( $a \geq 0$ ) и отрезку  $[-ci, ci]$  ( $c > 0$ ) отобразить на верхнюю полуплоскость.

◀ Функция  $w_1 = \sqrt{z^2 + c^2}$  отображает заданную область на всю  $w_1$ -плоскость с разрезом по лучу  $[-\sqrt{a^2 + c^2}, +\infty)$ . Требуемое отображение  $w$  получим после применения операции сдвига вправо на  $\sqrt{a^2 + c^2}$  и извлечения затем квадратного корня:

$$w = \sqrt{\sqrt{z^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2}}. \blacktriangleright$$

**99.** Отобразить на верхнюю полуплоскость внешность единичного круга с разрезами по отрезкам  $[i, bi]$ ,  $[-bi, -i]$ ,  $[1, a]$ ,  $[-a, -1]$  ( $a > 1, b > 1$ ).

◀ Функция Жуковского  $w_1 = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  отображает внешность единичного круга с указанными разрезами на внешность креста, состоящего из отрезка  $[-\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}), \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})]$  действительной оси и отрезка  $[-(b - \frac{1}{b})i, (b - \frac{1}{b})i]$  мнимой оси. Получили частный случай задачи 97, где  $a$  заменено на  $\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ ,  $b$  — на  $\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ ,  $c$  — на  $\frac{1}{2}(b - \frac{1}{b})$ . Следовательно, можно воспользоваться формулой (1) задачи 97, заменив в ней  $a, b$  и  $c$  выражениями, указанными выше. Тогда получим искомое отображение  $w$ :

$$\begin{aligned} w &= \frac{\sqrt{(z + \frac{1}{z})^2 + (b - \frac{1}{b})^2} + \sqrt{(a + \frac{1}{a})^2 + (b - \frac{1}{b})^2}}{\sqrt{(a + \frac{1}{a})^2 + (b - \frac{1}{b})^2} - \sqrt{(z + \frac{1}{z})^2 + (b - \frac{1}{b})^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{(z + \frac{1}{z})^2 + (b^2 + \frac{1}{b^2})} + \sqrt{(a^2 + \frac{1}{a^2}) + (b^2 + \frac{1}{b^2})}}{\sqrt{(a^2 + \frac{1}{a^2}) + (b^2 + \frac{1}{b^2})} - \sqrt{(z^2 + \frac{1}{z^2}) + (b^2 + \frac{1}{b^2})}} = \\ &= \frac{\sqrt{(z^2 + \frac{1}{z^2}) + (b^2 + \frac{1}{b^2})} + \sqrt{(a^2 + \frac{1}{a^2}) + (b^2 + \frac{1}{b^2})}}{\sqrt{(a^2 + \frac{1}{a^2}) - (z^2 + \frac{1}{z^2})}}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

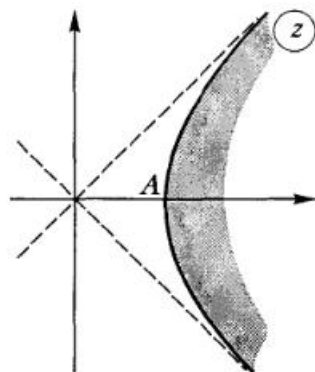


Рис. 59

**100.** Отобразить на верхнюю полуплоскость внутренность правой ветви гиперболы

$$\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1.$$

◀ Пусть  $A$  — вершина правой ветви гиперболы,  $F$  — ее фокус (рис. 59).

Проведем разрез по лучу  $[A, +\infty)$ . При решении задачи 86 было показано, что функция Жуковского  $w = u + iv = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  отображает лучи  $\arg z = \alpha$  на софокусные гиперболы

$$\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1.$$

Поэтому функция  $w_1 = z + \sqrt{z^2 - 1}$ ,  $w_1(\infty) = \infty$ , обратная функции Жуковского, осуществляет конформное отображение верхней половины области на сектор  $0 < \arg w_1 < \alpha$ ,  $|w_1| > 1$  (рис. 60).

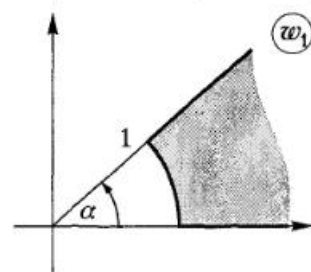


Рис. 60

Функция  $w_2 = w_1^{\frac{\pi}{\alpha}}$  отображает этот сектор на верхнюю полуплоскость с выброшенным верхним полукругом радиуса 1, а функция  $w_3 = \frac{1}{2} \left( w_2 + \frac{1}{w_2} \right)$  отображает полученную область на верхнюю полуплоскость, причем лучу  $[A, +\infty)$  соответствует луч  $(-\infty, -1]$ . Применив принцип симметрии Римана—Шварца и затем дополнительное отображение  $w = i\sqrt{1 + w_3^2}$ , получим, что  $w$  — искомая функция. Возвращаясь по цепочке от  $w_3$  до  $z$ , окончательно получим:

$$w = \frac{i}{\sqrt{2}} \left( \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}} + \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right)^{-\frac{\pi}{\alpha}} + 2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

### 101. Отобразить на верхнюю полуплоскость внешность правой ветви гиперболы

$$\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1.$$

◀ Пусть  $A$  — вершина правой ветви гиперболы (рис. 59). Проведем разрез по лучу  $(-\infty, A]$ . Функция  $w_1 = z + \sqrt{z^2 - 1}$ ,  $w_1(\infty) = \infty$ , отображает верхнюю половину заданной области на область, изображенную на рис. 61. Функция  $w_2 = (e^{-i\alpha} w_1)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}$  отображает указанную область плоскости  $w_1$  на верхнюю полуплоскость с выброшенным верхним полукругом радиуса 1, а функция Жуковского  $w_3 = \frac{1}{2} \left( w_2 + \frac{1}{w_2} \right)$  отображает эту область на верхнюю полуплоскость плоскости  $w_3$ , причем лучу  $(-\infty, A]$  соответствует луч  $[1, +\infty)$ . Применив принцип симметрии, получим, что функция  $w_3$  отображает внешность правой ветви гиперболы на всю плоскость с разрезом по лучу  $[1, +\infty)$ . Следовательно,  $w = \sqrt{w_3 - 1}$  — требуемое отображение. После несложных преобразований получим:

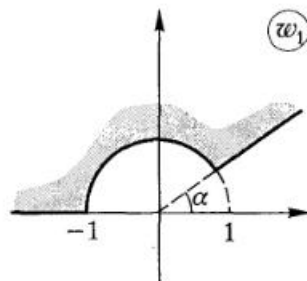


Рис. 61

$$w = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left( e^{-i\alpha} \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \right)^{\frac{\pi}{2(\pi-\alpha)}} - \left( e^{-i\alpha} \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \right)^{-\frac{\pi}{2(\pi-\alpha)}} \right).$$

### 102. Отобразить область, заключенную между ветвями гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

на верхнюю полуплоскость.

◀ Проведем разрез по отрезку  $[A_1, A_2]$  (рис. 62) и заметим, что функция  $w_1 = \frac{1}{c} (z + \sqrt{z^2 - c^2})$ , где  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  отображает верхнюю половину заданной области на сектор  $\alpha < \arg w_1 < \pi - \alpha$ ,  $|w_1| > 1$ , где  $\alpha = \arctg \frac{b}{a}$ .

По принципу симметрии Римана—Шварца эта же функция конформно отображает всю заданную область на весь сектор  $\alpha < \arg w_1 < \pi - \alpha$ . Следовательно, функ-

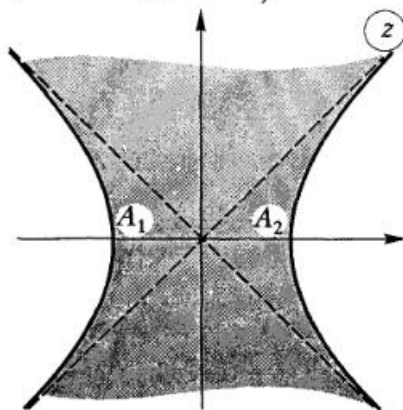


Рис. 62

$$w = (e^{-i\alpha} w_1)^{\frac{\pi}{\pi-2\alpha}} = \left( e^{-i\alpha} \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{c} \right)^{\frac{\pi}{\pi-2\alpha}}$$



осуществляет отображение заданной области на верхнюю полуплоскость. Поскольку

$$\pi - 2\alpha = 2 \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right) = 2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = 2 \operatorname{arctg} \frac{a}{b},$$

то полученную формулу можно записать в виде

$$w = \left( e^{-i\alpha} \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{c} \right)^p, \quad \text{где } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, \quad p = \frac{\pi}{2 \operatorname{arctg} \frac{a}{b}}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Для приведения уравнения гиперболы к виду  $\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1$  взяли  $\cos \alpha = \frac{a}{c}$ ,  $\sin \alpha = \frac{b}{c}$ ,  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Тогда  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ . ►

**103.** Выяснить, во что преобразуются при отображении  $w = \operatorname{ch} z$ :

- 1) прямоугольная сетка  $x = C$ ,  $y = C$ ;
- 2) полоса  $G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ ;
- 3) полуполоса  $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ .

◀ 1) Пусть

$$w = u + iv = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+iy} + e^{-x-iy}}{2} = \frac{1}{2} (e^x (\cos y + i \sin y) + e^{-x} (\cos y - i \sin y)) = \cos y \operatorname{ch} x + i \sin y \operatorname{sh} x.$$

Тогда  $u = \cos y \operatorname{ch} x$ ,  $v = \sin y \operatorname{sh} x$ . Если  $x = C$ , то

$$u = \cos y \operatorname{ch} C, \quad v = \sin y \operatorname{sh} C, \quad \frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 C} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 C} = 1.$$

Получили семейство софокусных эллипсов с фокусами в точках  $\operatorname{Re} z = \pm 1$ . Если  $y = C$ , то

$$u = \cos C \operatorname{ch} x, \quad v = \sin C \operatorname{sh} x, \quad \frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 C} - \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 C} = 1.$$

Прямые  $y = C$  преобразуются в семейство софокусных гипербол с фокусами в точках  $\operatorname{Re} z = \pm 1$ .

2) При  $y = 0$   $u = \operatorname{ch} x$ ,  $v = 0$ , а при  $y = \pi$   $u = -\operatorname{ch} x$ ,  $v = 0$ . Функция  $w = \operatorname{ch} z$  отображает полосу  $G$  на всю плоскость с разрезами по лучам  $(-\infty, -1]$ ,  $[1, +\infty)$ .

3) Поскольку  $w(0) = 1$ ,  $w(i\pi) = -1$ , то отрезок  $[0, i\pi]$  переходит в отрезок  $[-1, 1]$  и направлению движения от точки 0 к точке  $i\pi$  соответствует движение по направлению от точки 1 к точке  $-1$ . При этом точки плоскости  $w$  по правилу обхода находятся слева, т. е. принадлежат нижней полуплоскости. При  $z = x$ ,  $x \rightarrow -\infty$  луч  $(-\infty, 0]$  переходит в луч  $[1, +\infty)$ , а при  $z = x + i\pi$ ,  $x \rightarrow -\infty$  функция  $w(z) = -\operatorname{ch} x$  имеет предел  $-\infty$  и луч  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = i\pi\}$  перейдет в луч  $(-\infty, -1]$ . В соответствии с правилом обхода полуполоса  $D$  отображается функцией  $w = \operatorname{ch} z$  на нижнюю полуплоскость. ►

**104.** Отобразить на верхнюю полуплоскость полуполосу

$$G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < h\}.$$

◀ Композиция отображений  $w_1 = z - 1$ ,  $w_2 = \frac{\pi}{h} w_1$  переводит полосу  $G$  на полосу  $D$  из примера 103, 3). Поэтому функция  $w_3 = \operatorname{ch} w_2$  отображает заданную область на нижнюю полуплоскость. Следовательно,

$$w = -w_3 = -\operatorname{ch} \frac{(z-1)\pi}{h}. \quad \blacktriangleright$$

**105.** Отобразить на верхнюю полуплоскость полосу, ограниченную прямыми  $y = x$  и  $y = x + \frac{\pi}{2}$ .

◀ Пусть  $d$  — ширина полосы. Тогда, очевидно,  $d = \frac{h}{\sqrt{2}}$  (см. рис. 63). Композиция отображений

$$w_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} z, \quad w_2 = \frac{\pi}{d} w_1, \quad w = e^{w_2} = e^{\frac{\pi(1-i)z}{h}}$$

решает поставленную задачу. ►

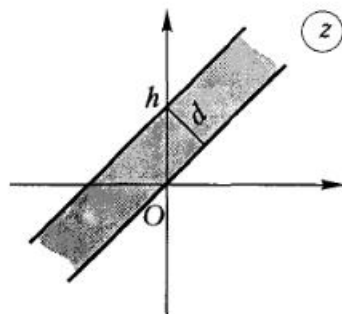


Рис. 63

**106.** Отобразить на верхнюю полуплоскость круговую луночку, ограниченную окружностями  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$  и  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$ .

◀ Функция  $w_1 = \frac{z}{z-2}$  отображает круговую луночку на вертикальную полосу  $G = \{w_1 \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} w_1 < \frac{1}{2}\}$ , а функция  $w_2 = 2\pi i w_1$  отображает полосу  $G$  на горизонтальную полосу  $D = \{w_2 \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} w_2 < \pi\}$  (см. рис. 64)

Тогда функция  $w = e^{w_2} = e^{2\pi i w_1} = e^{\frac{2\pi i z}{z-2}}$  отображает луночку на верхнюю полуплоскость (см. свойства показательной функции). ▶

**107.** Отобразить на верхнюю полуплоскость область, ограниченную окружностями  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| = 1\}$  (плоскость с выброшенными кругами).

◀ Искомое отображение  $w$  является композицией  $w = e^{i w_2}$ , где  $w_2 = \frac{\pi}{3} w_1$ ,  $w_1 = \frac{z+2}{z-2}$  (см. рис. 65).

Таким образом,

$$w = e^{i \frac{\pi}{3} \cdot \frac{z+2}{z-2}}. \blacktriangleright$$

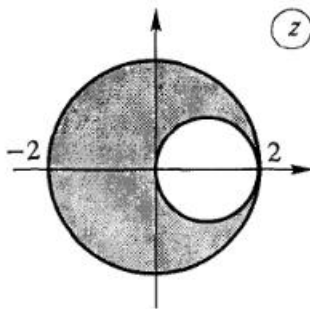


Рис. 64

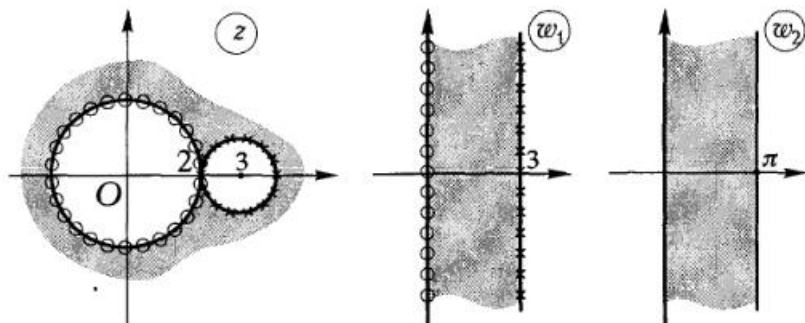


Рис. 65

**108.** Отобразить на верхнюю полуплоскость область, определенную неравенствами

$$|z - 1| > 1, \quad |z + 1| > 1, \quad \operatorname{Im} z > 0$$

(верхняя полуплоскость с выкинутыми полукругами).

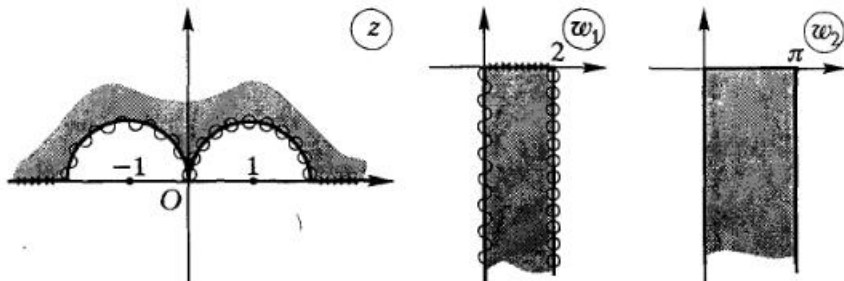


Рис. 66

◀ Функция  $w_1 = \frac{z+2}{z-2}$  отображает заданную область на полуполосу  $G = \{w_1 \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} w_1 < 2, \operatorname{Im} w_1 < 0\}$ , а функция  $w_2 = \frac{\pi}{2} w_1$  переводит  $G$  в полуполосу  $D = \{w_2 \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} w_2 < \pi,$

$\text{Im } w_2 < 0$ ). Из свойств функции  $\zeta \mapsto \cos \zeta$  следует, что функция  $w = \cos w_2 = \cos \frac{\pi(z+2)}{2z}$  — искомая. (см. рис. 66) ►

**109.** Отобразить на верхнюю полуплоскость полуполосу  $G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re } z < +\infty, -1 < \text{Im } z < 1\}$  с разрезами по отрезку  $[0, 1]$  и лучу  $[2, +\infty)$ .

◄ Требуемое отображение  $w$  определим с помощью композиции элементарных преобразований:  $w_1 = \pi z$ ,  $w_2 = e^{w_1}$ ,  $w_3 = \frac{1}{2} \left( w_2 + \frac{1}{w_2} \right)$ ,  $w_4 = \frac{w_3 - \text{ch } \pi}{w_3 - \text{ch } 2\pi}$ ,  $w = \sqrt{w_4}$ . Последовательные преобразования отражены на рис. 67. ►

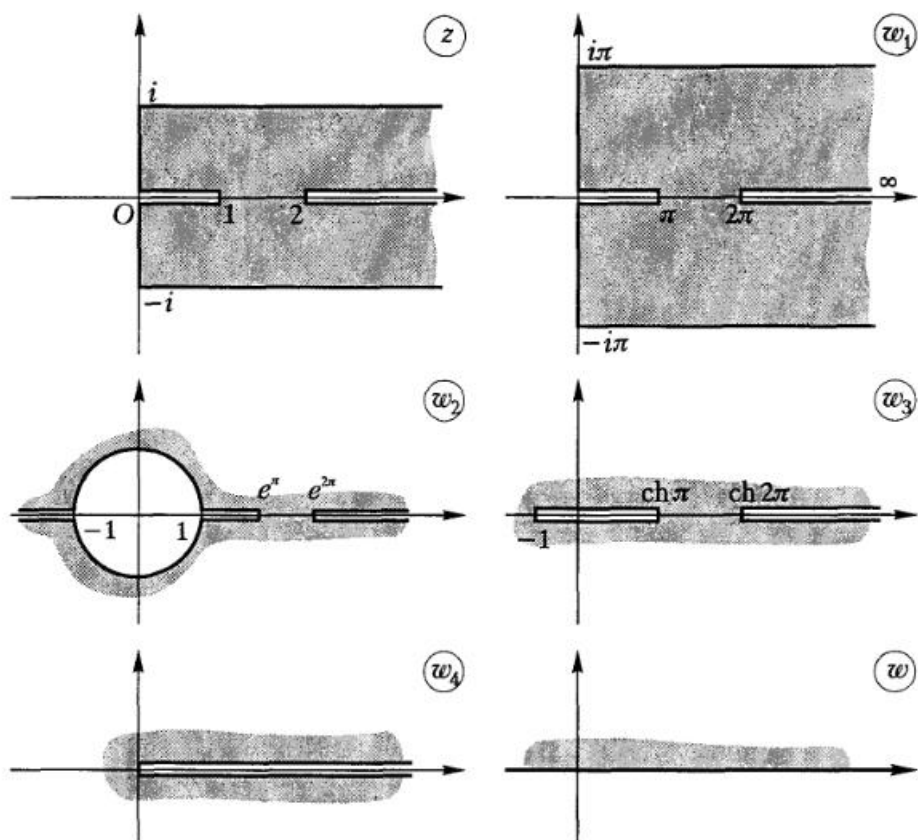


Рис. 67

**110.** Найти функцию  $w(z)$ , отображающую область, ограниченную окружностью  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  и прямой  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = 1\}$  (полуплоскость  $G = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z < 1\}$  с выброшенным кругом  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ) на круг  $K = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$  с нормировкой  $w(-3i) = 0$ ,  $\arg w'(-3i) = \frac{\pi}{3}$ .

◄ Функция  $w_1 = \frac{z+i}{z-i}$  отображает множество  $G$  на вертикальную полосу

$$D = \{w_1 \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re } w_1 < 1\},$$

а функция  $w_2 = \frac{\pi}{2} w_1 - \frac{\pi}{4}$  переводит  $D$  на полосу

$$D' = \{w_2 \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} < \text{Re } w_2 < \frac{\pi}{4}\}.$$

Полагая

$$w_3 = \operatorname{tg} w_2 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \left( \frac{z+i}{z-i} \right) - \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \pi \frac{z+3i}{4(z-i)},$$

получим отображение полосы  $D'$  на единичный круг с центром в начале координат (см. рис. 68).

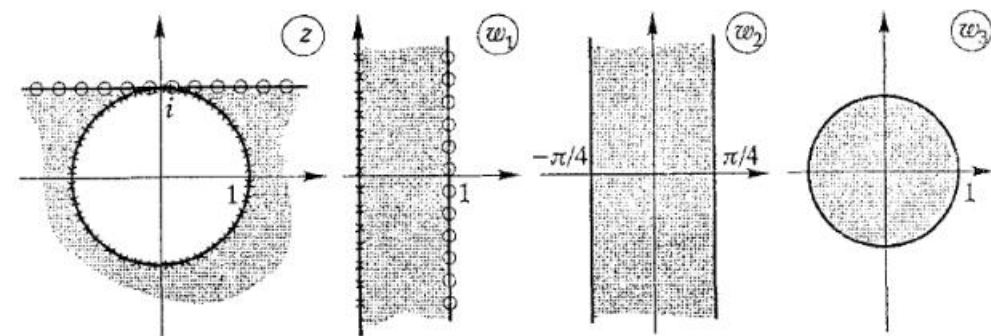


Рис. 68

Подставив в  $w_3$   $z = -3i$ , получим  $w_3(-3i) = 0$ . Дифференцируя  $w_3(z)$ , находим:

$$w'_3(z) = -\frac{i\pi}{(z-i)^2 \cos^2 \frac{\pi}{4} \left( \frac{z+3i}{z-i} \right)}, \quad w'_3(-3i) = i \frac{\pi}{16}, \quad \arg w'_3(-3i) = \frac{\pi}{2}.$$

Далее полагаем  $w = w(w_3)$  и требуем выполнения условия нормировки  $\arg w'(-3i) = \frac{\pi}{3}$ . Дифференцируя  $w$  по переменной  $z$ , имеем

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dw_3} \cdot \frac{dw_3}{dz}, \quad \arg \frac{dw(z)}{dz} \Big|_{z=-3i} = \arg \frac{dw(w_3)}{dw_3} \Big|_{w_3=0} + \arg \frac{dw_3(z)}{dz} \Big|_{z=-3i},$$

или

$$\frac{\pi}{3} = \arg w'(0) + \frac{\pi}{2}, \quad \text{откуда} \quad \arg w'(0) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6}.$$

Функция  $w = w(w_3)$  должна удовлетворять условиям  $w(0) = 0$ ,  $\arg w'(0) = -\frac{\pi}{6}$ . Следовательно,

$$w = e^{-i\frac{\pi}{6} w_3} = e^{-i\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \left( \frac{z+3i}{z-i} \right) = \frac{\sqrt{3}-i}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \left( \frac{z+3i}{z-i} \right).$$

Принимая во внимание равенство  $\operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz$ , можно представить  $w(z)$  в виде

$$w = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \operatorname{th} \frac{\pi i(z+3i)}{4(z-i)}. \blacktriangleright$$

**111.** Отобразить на верхнюю полуплоскость полосу  $G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$  с разрезом вдоль отрезка  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < h, \operatorname{Im} z = 0\}$  ( $h < 1$ ).

◀ Функция  $w_1 = \pi z$  отображает полосу  $G$  на полосу  $D = \{w_1 \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} w_1 < \pi\}$ , а функция  $w_2 = \cos w_1$  отображает полосу  $D$  на всю плоскость с разрезами по лучам  $(-\infty, -1]$  и  $[\cos \pi h, +\infty)$ . Тогда

$$w = \sqrt{\frac{w_2 - \cos \pi h}{w_2 + 1}} = \sqrt{\frac{\cos \pi z - \cos \pi h}{1 + \cos \pi z}}$$

— требуемое отображение. ▶

**112.** Отобразить на верхнюю полуплоскость полуполосу  $G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$  с разрезом вдоль луча  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{2}, h \leq \operatorname{Im} z < +\infty\}$  ( $h > 0$ ).

◀ Полагая  $w_1 = \cos 2z$ , получим отображение множества  $G$  на всю плоскость с разрезами по лучам  $(-\infty, -\operatorname{ch} 2h]$  и  $[-1, +\infty)$ . Функция  $w_2 = \frac{w_1 + \operatorname{ch} 2h}{w_1 + 1}$  отображает плоскость с указанными

разрезами на всю плоскость с разрезом по лучу  $[0, +\infty)$ . Следовательно,

$$w = \sqrt{w_2} = \sqrt{\frac{\cos 2z + \operatorname{ch} 2h}{\cos 2z + 1}}$$

— искомое отображение. ►

**113.** Отобразить на верхнюю полуплоскость область, ограниченную мнимой осью и окружностью  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$ , с разрезами вдоль отрезка  $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq \operatorname{Re} z \leq a, \operatorname{Im} z = 0\}$  и вдоль луча  $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : b \leq \operatorname{Re} z < +\infty, \operatorname{Im} z = 0\}$  ( $a < b$ ).

◀ Пологая  $w_1 = \frac{1}{z}$ , получим отображение указанной области на вертикальную полосу  $G = \{w_1 \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} w_1 < \frac{1}{2}\}$  с разрезами по отрезкам  $[0, \frac{1}{b}]$  и  $[\frac{1}{a}, \frac{1}{2}]$ . Функция  $w_2 = 2\pi w_1$  отображает множество  $G$  на вертикальную полосу  $D = \{w_2 \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} w_2 < \pi\}$  с разрезами по отрезкам  $[0, \frac{2\pi}{b}]$  и  $[\frac{2\pi}{a}, \pi]$ , а функция  $w_3 = \cos w_2$  отобразит полосу  $D$  на всю плоскость с разрезами по лучам  $(-\infty, \cos \frac{2\pi}{a}]$  и  $[\cos \frac{2\pi}{b}, +\infty)$ . Пологая

$$w_4 = \frac{\cos w_2 - \cos \frac{2\pi}{b}}{\cos w_2 - \cos \frac{2\pi}{a}},$$

получим всю плоскость с разрезом по положительной действительной полуоси. Таким образом,

$$w = \sqrt{w_4} = \sqrt{\frac{\cos \frac{2\pi}{z} - \cos \frac{2\pi}{b}}{\cos \frac{2\pi}{z} - \cos \frac{2\pi}{a}}}$$

— требуемое отображение. ►

### Упражнения для самостоятельной работы

1. С помощью отображения  $w = z^2$  найти образ круга  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 2\}$ .
2. Доказать, что если точка  $z$  описывает окружность  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ , то точка

$$w = z - 2i + \frac{1}{z}$$

описывает эллипс с главными осями, равными 5 и 3.

3. Найти образ первого квадранта  $z$ -плоскости при отображении

$$w = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2.$$

4. Доказать, что функция  $w = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$  взаимно однозначно и конформно отображает область  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$  на область  $D = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$ .

5. Найти образ области  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}\}$  при отображении

$$w = \left(\frac{1-4z}{1-z}\right)^2.$$

6. Найти образ области  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$  при отображении

$$w = \left(\frac{z^4 + 16}{z^4 - 16}\right)^2.$$

7. Найти образ множества  $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$  при отображении

$$w = \frac{z^2 - i}{z^2 + i}.$$

8. Множество  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$  отобразить с помощью функции

$$w = -i \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - 2z - 1}.$$

9. Доказать, что функция

$$w = \frac{(1+z^3)^2 - i(1-z^3)^2}{(1+z^3)^2 + i(1-z^3)^2}$$

однолистно и конформно отображает область  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\}$  на область  $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ .

10. Найти образы указанных областей при заданных отображениях:

$$a) G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, \operatorname{Im} z > 1\}, w = -\left(\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}\right)^3;$$

$$b) G = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z - \sqrt{2}| < \sqrt{2}\}, w = \left(\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}\right)^4;$$

$$в) G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z + i| > 1\}, w = -\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}+i}\right)^3.$$

11. Найти степенную функцию, отображающую взаимно однозначно и конформно внутренность угла  $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$  на всю комплексную плоскость  $w$  с разрезом по лучу  $\arg w = \frac{\pi}{4}$ .

12. Найти функцию, отображающую однолистно и конформно внутренность угла

$$0 < \arg(z - i - 1) < \frac{\pi}{2}$$

на область

$$G = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}.$$

13. Найти функцию, отображающую взаимно однозначно и конформно внутренность угла  $-\frac{\pi}{4} < \arg(z - i) < \frac{\pi}{4}$  на верхнюю полуплоскость.

14. Найти функцию, осуществляющую взаимно однозначное и конформное отображение внутренности угла  $-\frac{\pi}{6} < \arg(z - a) < \frac{\pi}{3}$  на область  $G = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$ .

15. Найти функцию, отображающую однолистно и конформно область  $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$  на область  $D = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 1\}$ .

16. Найти целую линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках 0, 1,  $i$  на подобный ему треугольник с вершинами 0, 2,  $1 + i$ .

17. Найти целое линейное преобразование с неподвижной точкой  $1 + 2i$ , переводящее точку  $i$  в точку  $-i$ .

18. Для указанных преобразований найти конечную неподвижную точку  $z_0$  (если она существует), угол поворота вокруг нее  $\theta$  и коэффициент растяжения  $\kappa$ . Привести эти преобразования к каноническому виду  $w - z_0 = \lambda(z - z_0)$ .

$$1) w = 2z + 1 - 3i;$$

$$2) w = iz + 4;$$

$$3) w = z + 1 - 2i;$$

$$4) w - w_1 = a(z - z_1) \ (a \neq 0);$$

$$5) w = az + b \ (a \neq 0).$$

$$19. \text{ Дана функция } w = \frac{z-z_1}{z-z_2}.$$

1) Доказать, что прообразом семейства  $\sigma = \{w \in \mathbb{C} : |w| = \lambda \ (0 < \lambda < +\infty)\}$  является семейство окружностей (окружности Аполлония). Для данного  $\lambda$  найти радиус и положение центра соответствующей окружности в  $z$ -плоскости.

2) Найти прообразы лучей  $\arg w = \theta$ .

3) Построить сетку в  $z$ -плоскости, соответствующую полярной сетке в  $w$ -плоскости.

4) Найти область  $z$ -плоскости, соответствующую полукругу  $K = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1, \operatorname{Im} w > 0\}$ .

20. Найти общий вид дробно-линейной функции  $w = w(z)$ , отображающей круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  на правую полуплоскость  $P = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$  так, чтобы  $w(z_1) = 0$ ,  $w(z_2) = \infty$ , где  $z_1$  и  $z_2$  — заданные точки на окружности  $\partial K$  и такие, что  $\arg z_1 < \arg z_2$ .

21. Найти центр  $w_0$  и радиус  $R$  окружности, на которую функция  $w = \frac{z-z_1}{z-z_2}$  отображает действительную ось ( $\operatorname{Im} z_2 \neq 0$ ).

22. Найти общий вид дробно-линейной функции  $w = w(z)$ , отображающей круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$  на себя при следующих условиях:

$$1) w(a) = 0 \ (|a| < R);$$

$$2) w(a) = b \ (|a| < R, |b| < R);$$

$$3) w(\pm R) = \pm R.$$

23. Отобразить круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  на себя так, чтобы заданные точки  $z_1, z_2$  внутри круга перешли в точки  $\pm a \ (0 < a < 1)$ .

24. Отобразить круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  на себя так, чтобы отрезок действительной оси  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq a \ (a < 1), \operatorname{Im} z = 0\}$  перешел в отрезок действительной оси, симметричный относительно начала координат. Найти длину преобразованного отрезка.

25. Доказать, что при отображении круга на круг линейное преобразование однозначно определяется заданием образов одной внутренней и одной граничной точек.

26. Доказать, что если линейное преобразование имеет две неподвижные точки, то произведение производных в этих точках равно единице.

27. 1) Выяснить, для каких значений  $m$  функция  $w = R(z + mz^n)$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , осуществляет конформное отображение круга  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  на некоторую область, и найти эту область.

2) Выяснить эти же вопросы для отображения внешности круга  $K$  при помощи функции  $w = R\left(z + \frac{m}{z^n}\right)$  и внутренности того же круга при помощи функции  $w = R\left(\frac{1}{z} + mz^n\right)$ .

28. Полуокрестность  $P = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$  с разрезом по дуге окружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  от точки  $z = 1$  до точки  $z = e^{i\alpha}$ , где  $0 < \alpha < \pi$ , отобразить на верхнюю полуокрестность.

29. Отобразить на верхнюю полуокрестность внутренность угла  $0 < \arg z < \pi\beta$ , где  $0 < \beta < 2$ , с разрезом по дуге окружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  от точки  $z = 1$  до точки  $z = e^{i\alpha}$ , где  $0 < \alpha < \beta$ .

30. Отобразить на верхнюю полуокрестность внешность единичного верхнего полукруга с разрезом по отрезку  $[0, -i]$  (внешность лопатки).

31. Найти преобразование полярной сетки с помощью функций:

1)  $w = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ ;

2)  $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$  ( $a > 0$ );

3)  $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{c}{z}\right)$ ,  $c = |c|e^{i\gamma}$  ( $0 \leq \gamma < \pi$ ).

32. Отобразить на верхнюю полуокрестность внешность единичного круга с разрезами по отрезку  $[-a, -1]$  и лучу  $[1, +\infty)$ , где  $a > 1$ .

33. Круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  с разрезом по отрезку  $[a, 1]$ ,  $0 < a < 1$ , отобразить на круг  $K' = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$  так, чтобы  $w(0) = 0$ ,  $w'(0) > 0$ . Найти  $w'(0)$  и длину дуги, соответствующей разрезу. При каком значении  $a$  разрез перейдет в полуокрестность?

34. Круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  с разрезами по отрезкам  $[a, 1]$ ,  $[-1, -b]$  ( $0 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$ ) отобразить на круг  $K' = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$  так, чтобы  $w(0) = 0$ ,  $w'(0) > 0$ . Определить  $w'(0)$  и длины дуг, соответствующих разрезам.

35. Отобразить внешность единичного круга  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$  на  $w$ -плоскость с разрезом по дуге  $\arg \frac{w-1}{w+1} = \beta$  ( $0 < |\beta| < \pi$ ) так, чтобы  $w(\infty) = \infty$ ,  $\arg w'(\infty) = \alpha$ .

36. Выяснить, во что преобразуются при отображении  $w = e^z$ :

1) прямоугольная сетка  $x = C$ ,  $y = C$ ;

2) прямые  $y = kx + b$ ;

3) полоса  $\alpha < y < \beta$  ( $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ );

4) полоса между прямыми  $y = x$ ,  $y = x + 2\pi$ ;

5) полуполоса  $x < 0$ ,  $0 < y < \alpha \leq 2\pi$ ;

6) полуполоса  $x > 0$ ,  $0 < y < \alpha \leq 2\pi$ ;

7) прямоугольник  $(\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$  ( $\delta - \gamma \leq 2\pi$ ).

37. Выяснить, во что преобразуются при отображении  $w = \ln z$ :

1) полярная сетка  $|z| = R$ ,  $\arg z = \theta$ ;

2) логарифмические спирали  $r = Ae^{k\varphi}$  ( $A > 0$ );

3) угол  $0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi$ ;

4) сектор  $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, 0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi\}$ ;

5) кольцо  $K = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$  с разрезом по отрезку  $[r_1, r_2]$ .

38. Выяснить, во что преобразуются при отображении  $w = \arcsin z$ :

1) верхняя полуокрестность;

2) плоскость с разрезом по действительной оси вдоль лучей  $(-\infty, -1]$ ,  $[1, +\infty)$ ;

3) первый квадрант;

4) полуокрестность  $P = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$  с разрезом по действительной оси вдоль луча  $(-\infty, -1]$ .

39. Выяснить, во что преобразуются при отображении  $w = \operatorname{tg} z$ :

1) прямоугольная сетка  $x = C$ ,  $y = C$ ;

2) полуполоса  $P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ ;

3) полоса  $G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$ ;



4) полоса  $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}\}$ ;

5) полоса  $D' = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}\}$ ;

40. Выяснить, во что преобразуются при отображении  $w = \operatorname{cth} z$ :

1) полоса  $P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ ;

2) полуполоса  $P' = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ .

41. Отобразить на верхнюю полуплоскость область, заключенную между софокусными параболой  $y^2 = 4(x+1)$ ,  $y^2 = 8(x+2)$ .

42. Найти функцию  $w = w(z)$ , отображающую область, ограниченную окружностью  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  и прямой, уравнение которой  $\operatorname{Im} z = 1$  (полуплоскость  $P = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 1\}$  с выкинутым кругом):

1) на круг  $K = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$  с нормировкой  $w(-3i) = \frac{-1+i}{2}$ ,  $\arg w'(-3i) = \frac{\pi}{2}$ .

2) на верхнюю полуплоскость с нормировкой  $w(-3i) = 1+i$ ,  $\arg w'(-3i) = \pi$ .

43. Отобразить на верхнюю полуплоскость полосу  $G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$  с разрезами вдоль отрезков  $\{0 \leq x \leq h_1, y = 0\}$  и  $\{1 - h_2 \leq x \leq 1, y = 0\}$  ( $h_1 + h_2 < 1$ ).

44. Отобразить на верхнюю полуплоскость полуполосу  $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$  с разрезами вдоль отрезка

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{2}, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq h_1\}$$

и вдоль луча

$$\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{2}, h_2 \leq \operatorname{Im} z < +\infty\} \quad (h_2 > h_1).$$

45. Отобразить на верхнюю полуплоскость область, ограниченную окружностями

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}, \quad \gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = 1\}$$

с разрезом по лучу

$$\gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq \operatorname{Re} z < +\infty, \operatorname{Im} z = 0\}.$$

46. Отобразить на верхнюю полуплоскость область, ограниченную окружностями

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}, \quad \gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 2\}$$

с разрезом вдоль отрезка

$$\gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq \operatorname{Re} z \leq a, \operatorname{Im} z = 0\} \quad (a < 4).$$

47. Отобразить на верхнюю полуплоскость область, ограниченную окружностями

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}, \quad \gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 2\}$$

с разрезами вдоль отрезков

$$\gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq \operatorname{Re} z \leq a, \operatorname{Im} z = 0\} \quad \text{и} \quad \gamma_4 = \{z \in \mathbb{C} : b \leq \operatorname{Re} z \leq 4, \operatorname{Im} z = 0\} \quad (a < b).$$

48. Отобразить на верхнюю полуплоскость область, ограниченную окружностями

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}, \quad \gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = 1\}$$

с разрезом по отрезку

$$\gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0, -\alpha \leq \operatorname{Im} z \leq \beta\} \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0).$$

# Интегрирование в комплексной плоскости. Интегралы Ньютона—Лейбница и Коши

Главное внимание в этой главе уделяется интегральной теореме Коши, одной из основных теорем всей теории аналитических функций. С ее помощью устанавливаются глобальные свойства аналитических функций.

Вместо неопределенного интеграла рассматривается интеграл Ньютона—Лейбница, обладающий многими достоинствами. Операция интегрирования в смысле Ньютона—Лейбница является обратной по отношению к операции дифференцирования.

## § 1. Интеграл Ньютона—Лейбница

### 1.1. Первообразная.

**Определение 1.** Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  и множество  $D_f$  не имеет изолированных точек. Функция  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  называется первообразной функции  $f$ , если  $D_F = D_f$  и  $\forall z \in D_f \quad F'(z) = f(z)$ .

Пусть  $F$  — первообразная функции  $f$ . Так как  $\forall (z \in D_f, C \in \mathbb{C}) \quad (F+C)'(z) = F'(z)$ , то  $F+C$  также является первообразной функции  $f$ . Поэтому первообразная определена неоднозначно и специального обозначения не имеет.

Исследуем характер неоднозначности первообразной. Нам понадобятся понятие кусочно-гладкого пути (см. определение 6, п. 2.9, гл. 2) и неравенство Лагранжа (см. п. 4.7, гл. 2).

**Определение 2.** Множество  $Z \subset \mathbb{C}$  называется линейно-связным, если для любых точек  $z_1 \in Z, z_2 \in Z$  существует кусочно-гладкий путь, соединяющий их и лежащий в множестве  $Z$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  и  $D_f$  — линейно-связное множество, содержащее более чем одну точку. Если  $\forall z \in D_f \quad f'(z) = 0$ , то функция  $f$  постоянная.

◀ Пусть  $z_1 \in D_f, z_2 \in D_f$ . По определению линейно-связного множества существует кусочно-гладкий путь, соединяющий точки  $z_1, z_2$  и лежащий в множестве  $D_f$ . Следовательно, найдется такая непрерывная функция  $[a, b] \xrightarrow{\varphi} D_f$ , что  $\varphi(a) = z_1, \varphi(b) = z_2$  и  $\varphi'(t)$  существует всюду, кроме конечного множества точек. Занумеруем их в порядке возрастания

$$t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b.$$

Согласно неравенству Лагранжа, имеем

$$|(f \circ \varphi)(t_k) - (f \circ \varphi)(t_{k-1})| \leq \|f'\| \cdot \varphi'(t_k - t_{k-1}) = 0 \quad (k = \overline{1, n})$$

Таким образом,

$$(f \circ \varphi)(t_0) = f(z_1) = (f \circ \varphi)(t_n) = f(z_2). \quad \blacktriangleright$$

**Теорема 2.** Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — первообразные функции  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , определенной на линейно-связном множестве, содержащем более одной точки. Тогда существует такая постоянная  $C \in \mathbb{C}$ , что  $\forall z \in D_f \quad F_2(z) = F_1(z) + C$ . ▶

◀ Рассмотрим функцию  $F = F_2 - F_1$ . Так как  $\forall z \in D_f \quad F'(z) = F_2'(z) - F_1'(z) = 0$ , то, согласно теореме 1, функция  $F$  постоянная. ▶

Предлагаем читателю составить таблицу первообразных основных элементарных функций.

## 1.2. Интеграл Ньютона—Лейбница.

**Определение.** Пусть  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  и  $D_f$  — линейно-связное множество, содержащее более одной точки. Функция  $f$  называется интегрируемой в смысле Ньютона—Лейбница, если она имеет первообразную. При этом  $\forall a \in D_f$

$$\left( F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta \right) \stackrel{\text{def}}{\iff} (F(a) = 0 \wedge \forall z \in D_f \quad F'(z) = f(z)). \quad (1)$$

Функция  $F$  в (1) называется интегралом Ньютона—Лейбница с фиксированным нижним пределом интегрирования  $a$  и переменным верхним пределом. Ее значение  $F(b)$  называется определенным интегралом Ньютона—Лейбница и обозначается  $\int_a^b f(\zeta) d\zeta$ , где  $\zeta$  — переменная интегрирования, от выбора которой величина интеграла не зависит, т. е.

$$\int_a^b f(\zeta) d\zeta = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(w) dw = \dots$$

Запись  $\int_a^z f(\zeta) d\zeta$  не имеет смысла, поскольку буква  $z$  используется для обозначения верхнего предела интегрирования.

**Теорема 1** (формула Ньютона—Лейбница). Пусть  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D_f$  — линейно-связное множество, содержащее более одной точки. Если функция  $f$  интегрируема в смысле Ньютона—Лейбница и  $\Phi$  — ее первообразная, то  $\forall (a \in D_f, b \in D_f)$  интеграл  $\int_a^b f(\zeta) d\zeta$  существует, определен однозначно и справедлива формула Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(\zeta) d\zeta = \Phi(b) - \Phi(a) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\zeta) \Big|_{\zeta=a}^{\zeta=b}. \quad (2)$$

◀ Полагаем  $\forall z \in D_f \quad F(z) = \Phi(z) - \Phi(a)$ . Тогда

$$F(a) = 0 \wedge \forall z \in D_f \quad F'(z) = \Phi'(z) = f(z).$$

Согласно определению, имеем

$$\int_a^b f(\zeta) d\zeta = F(b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Убедимся в том, что интеграл определен однозначно. Пусть

$$\int_a^b f(\zeta) d\zeta = \psi(b), \quad \psi(a) = 0 \wedge \forall z \in D_f \quad \psi'(z) = f(z).$$

По теореме 2, п. 1.1, существует постоянная  $C : \forall z \in D_f \quad \psi(z) = F(z) + C$ . Полагая  $z = a$ , получим, что  $C = 0$ . Следовательно,  $\psi(b) = F(b)$ , т. е. интеграл определен однозначно. ▶

**Теорема 2.** Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  и  $D_f$  — линейно-связное множество, состоящее более чем из одной точки. Если функция  $f$  интегрируема в смысле Ньютона—Лейбница, то справедливы равенства:

$$\int_a^b f(z) dz = - \int_b^a f(z) dz \quad \forall (a \in D_f, b \in D_f), \quad (3)$$

$$\int_a^b f(z) dz = \int_a^c f(z) dz + \int_c^b f(z) dz \quad \forall (a \in D_f, b \in D_f, c \in D_f), \quad (4)$$

$$\left( \int_a^z f(\zeta) d\zeta \right)' = f(z) \quad \forall (a \in D_f, z \in D_f), \quad (5)$$

$$\left( \int_z^b f(\zeta) d\zeta \right)' = -f(z) \quad \forall (z \in D_f, b \in D_f). \quad (6)$$

◀ Пусть  $\Phi$  — первообразная функции  $f$ . Согласно формуле Ньютона—Лейбница (2), имеем

$$\int_a^b f(z) dz = \Phi(b) - \Phi(a) = -(\Phi(a) - \Phi(b)) = - \int_b^a f(z) dz,$$

$$\int_a^b f(z) dz = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(b) - \Phi(c) + \Phi(c) - \Phi(a) = \int_c^b f(z) dz + \int_a^c f(z) dz,$$

$$\left( \int_a^z f(\zeta) d\zeta \right)' = (\Phi(z) - \Phi(a))' = \Phi'(z) = f(z),$$

$$\left( \int_z^b f(\zeta) d\zeta \right)' = (\Phi(b) - \Phi(z))' = -\Phi'(z) = -f(z). \quad \blacktriangleright$$

Равенство (3) называется *правилом перестановки пределов интегрирования*, равенство (4) — *аддитивностью интеграла относительно пределов интегрирования*, формулы (5) и (6) — *правилами дифференцирования интеграла по верхнему и нижнему переменным пределам интегрирования*.

### 1.3. Линейность интеграла.

**Замена переменных и формула интегрирования по частям.**

**Теорема 1** (о линейности интеграла). Пусть  $Z$  — линейно-связное множество, содержащее более одной точки. Если функции  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D_f = D_g = Z$ , интегрируемы в смысле Ньютона—Лейбница и  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$ , то функция  $\lambda f + \mu g$  также интегрируема и справедливо равенство

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(z) dz = \lambda \int_a^b f(z) dz + \mu \int_a^b g(z) dz \quad \forall (a \in Z, b \in Z). \quad (1)$$

◀ Пусть  $F, G$  — первообразные функций  $f$  и  $g$ . Тогда  $\forall z \in Z$

$$(\lambda F + \mu G)'(z) = \lambda F'(z) + \mu G'(z) = \lambda f(z) + \mu g(z).$$

Следовательно, функция  $\lambda f + \mu g$  имеет первообразную и по определению интегрируема в смысле Ньютона—Лейбница. Пусть

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta, \quad G(z) = \int_a^z g(\zeta) d\zeta.$$

Тогда  $(\lambda F + \mu G)'(a) = 0$ , и по определению интеграла получим

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(z) dz = (\lambda F + \mu G)(b) = \lambda F(b) + \mu G(b) = \lambda \int_a^b f(z) dz + \mu \int_a^b g(z) dz. \blacktriangleright$$

**Теорема 2** (о замене переменной). Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $Z = D_{f \circ \varphi}$  — линейно-связное множество, содержащее более одной точки. Если функция  $\varphi$  дифференцируема в каждой точке  $z \in Z$ , а функция  $f|_{\varphi(Z)}$  интегрируема в смысле Ньютона—Лейбница, то функция  $(f \circ \varphi)'$  также интегрируема и справедливо равенство

$$\int_a^b f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\zeta) d\zeta \quad \forall (a \in Z, b \in Z). \quad (2)$$

◀ Пусть  $F$  — первообразная функции  $f|_{\varphi(Z)}$ ,  $a \in Z$ ,  $b \in Z$  и  $F(\varphi(a)) = 0$ . Так как  $\forall z \in Z$  имеем

$$(F \circ \varphi)'(z) = F'(\varphi(z)) \varphi'(z) = f(\varphi(z)) \varphi'(z) = ((f \circ \varphi)')(z),$$

то функция  $(f \circ \varphi)'$  интегрируема в смысле Ньютона—Лейбница, и по определению интеграла справедливо равенство

$$\int_a^b f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz = F(\varphi(b)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\zeta) d\zeta. \blacktriangleright$$

**Теорема 3** (об интегрировании по частям). Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D_f = D_g = Z$ , — линейно-связное множество, состоящее более чем из одной точки. Если функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы в каждой точке множества  $Z$  и функция  $f'g$  интегрируема в смысле Ньютона—Лейбница, то функция  $fg'$  также интегрируема и справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_a^b f(z)g'(z) dz = f(z)g(z) \Big|_{z=a}^{z=b} - \int_a^b f'(z)g(z) dz \quad \forall (a \in Z, b \in Z). \quad (3)$$

◀ Поскольку  $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \quad \forall z \in Z$ , то  $fg' = (fg)' - f'g$ . По определению функция  $(fg)'$  интегрируема в смысле Ньютона—Лейбница. Согласно свойству линейности интеграла, функция  $fg'$  также интегрируема по Ньютону—Лейбницу и

$$\int_a^b f(z)g'(z) dz = \int_a^b (fg)'(z) dz - \int_a^b f'(z)g(z) dz = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(z)g(z) dz. \blacktriangleright$$

Из определения первообразной следует, что она принадлежит классу аналитических функций. Напомним читателю, что символом  $A(G)$  обозначается класс функций, аналитических в области  $G$ .

Если функция  $f$  определена на линейно-связном множестве  $Z$ , то определение 1, п. 1.1, можно сформулировать следующим образом: функция  $F \in A(Z)$  называется первообразной функции  $f$  на множестве  $Z$ , если  $\forall z \in Z \quad F'(z) = f(z)$ .

Вычислим в качестве примера интегралы

$$I_1(z) = \int_i^z \zeta(1-\zeta)^{97} d\zeta, \quad I_2 = \int_0^i (z-i)e^{-z} dz.$$

Полагая в  $I_1$   $1-\zeta = w$ , получим:  $d\zeta = -dw$ ,

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \int_{1-i}^{1-z} (1-w)w^{97} dw = \left( \frac{1}{98} w^{98} - \frac{1}{99} w^{99} \right) \Big|_{w=1-i}^{w=1-z} = \\ &= \frac{1}{98} (1-z)^{98} - \frac{1}{99} (1-z)^{99} - \frac{1}{98} (1-i)^{98} + \frac{1}{99} (1-i)^{99} = \\ &= (1-z)^{98} \left( \frac{1}{98} - \frac{1}{99} (1-z) \right) - \frac{1}{98} (\sqrt{2})^{98} e^{-i\frac{98\pi}{4}} + \frac{1}{99} (\sqrt{2})^{99} e^{-i\frac{99\pi}{4}} = \\ &= (1-z)^{98} \left( \frac{1}{98} - \frac{1}{99} (1-z) \right) + \frac{2^{48}}{49} i - 2^{49} \left( \frac{1+i}{99} \right). \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла  $I_2$  применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I_2 &= (z-i)e^{-z} \Big|_{z=i}^{z=0} + \int_0^i e^{-z} dz = -i + e^{-z} \Big|_{z=i}^{z=0} = -i + 1 - e^{-i} = \\ &= -i + 1 - (\cos 1 - i \sin 1) = 1 - \cos 1 + (\sin 1 - 1)i. \end{aligned}$$

## § 2. Производные и интегралы Ньютона—Лейбница любых порядков

### 2.1. Определение $n$ -производной и $n$ -интеграла.

Пусть область определения функции  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  не имеет изолированных точек. Назовем ее 1-дифференцируемой, если  $\forall z \in D_f$  она имеет производную  $f'(z)$ . Функция  $z \mapsto f'(z)$  называется 1-производной функции  $f$  и обозначается через  $f^{(1)}$ . По индукции определим производную функции  $f$  любого порядка.

**Определение 1.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Если функция  $f^{(n)}$  дифференцируема, то ее производная  $(f^{(n)})'$  называется  $n+1$ -й производной функции  $f$  и обозначается через  $f^{(n+1)}$ . При этом функция  $f$  называется  $(n+1)$ -дифференцируемой.

Для упрощения записи считаем  $f^{(0)} = f$ . Приведем примеры.

**Пример 1.** Пусть  $f(z) = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ . Тогда

$$f'(z) = e^z, \quad f^{(2)}(z) = e^z, \dots, f^{(n)}(z) = e^z \quad \forall (z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}).$$

**Пример 2.** Пусть  $f(z) = \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ . Тогда

$$f'(z) = \cos z = \sin(z + \frac{\pi}{2}), \quad f^{(2)}(z) = -\sin z = \sin(z + 2\frac{\pi}{2}), \quad \dots, \quad f^{(n)}(z) = \sin(z + n\frac{\pi}{2})$$

$\forall (z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}).$

Пусть область определения функции  $f$  есть линейно-связное множество, содержащее более одной точки и пусть  $a \in D_f$ . Назовем функцию  $f$  1-интегрируемой, если  $\forall z \in D_f$  существует  $\int_a^z f(t) dt$ . Отображение  $z \mapsto \int_a^z f(t) dt, z \in D_f$ , называется 1-интегралом функции  $f$  с нижним пределом интегрирования  $a \in D_f$ . По индукции определим интеграл произвольного порядка функции  $f$  с нижним пределом интегрирования  $a \in D_f$ .

**Определение 2.** Если функция  $f$  интегрируема,  $n \geq 2$ , то полагаем

$$\int_a^z f(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^z \left( \int_a^t f(\tau) d\tau \right) dt \quad \forall z \in D_f.$$

Рассмотрим примеры.

**Пример 3.** Вычислить  $\int_a^z dt \quad \forall (a \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C})$ .

Последовательно интегрируя, получим

$$\begin{aligned} \int_a^{z(1)} dt &= z - a, \quad \int_a^{z(2)} dt = \int_a^z (t - a) dt = \frac{(z - a)^2}{2}, \\ \int_a^{z(3)} dt &= \int_a^z \frac{(t - a)^2}{2} dt = \frac{(z - a)^3}{3!}, \quad \dots, \quad \int_a^{z(n)} dt = \frac{(z - a)^n}{n!}. \end{aligned}$$

**Пример 4.** Вычислить  $\int_0^z e^t dt, z \in \mathbb{C}$ .

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{z(1)} e^t dt &= e^z - 1, \quad \int_0^{z(2)} e^t dt = \int_0^z (e^t - 1) dt = e^z - 1 - z, \\ \int_0^{z(3)} e^t dt &= \int_0^z (e^t - 1 - t) dt = e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2!}, \quad \dots, \quad \int_0^{z(n)} e^t dt = e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2!} - \dots - \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

**Пример 5.** Вычислить  $\int_0^z \sin t dt, z \in \mathbb{C}$ .

Последовательно интегрируя четыре раза, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{z(1)} \sin t dt &= -\cos z + 1, \quad \int_0^{z(2)} \sin t dt = \int_0^z (-\cos t + 1) dt = -\sin z + z, \\ \int_0^{z(3)} \sin t dt &= \int_0^z (-\sin t + t) dt = \cos z - 1 + \frac{z^2}{2}, \quad \int_0^{z(4)} \sin t dt = \int_0^z \left( \cos t - 1 + \frac{t^2}{2} \right) dt = \sin z - z + \frac{z^3}{3!}. \end{aligned}$$

## 2.2. Формула Ньютона—Лейбница. Производные по пределам интегрирования.

**Теорема 1** (формула Ньютона—Лейбница для  $n$ -интеграла). Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D_f$  — линейно-связное множество, содержащее более одной точки, и  $n \in \mathbb{N}$ . Если существует  $F: \forall z \in D_f \quad F^{(n)}(z) = f(z)$ ,  $a \in D_f$  то  $\forall z \in D_f$  существует

$$\int_a^z f(t) dt = F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} F^{(k)}(a) \frac{(z-a)^k}{k!}. \quad (1)$$



◀ Применим метод математической индукции. Для  $n = 1$  утверждение доказано в п. 1.2. Предположим, что формула (1) справедлива после замены в ней  $n$  на  $n - 1$ . Так как  $(F')^{(n-1)} = F^{(n)} = f$ , то по предположению

$$\int_a^z f(t) dt = F'(z) - \sum_{k=0}^{n-2} (F')^{(k)}(a) \frac{(z-a)^k}{k!}.$$

Согласно определению 2 из п. 2.1, имеем

$$\begin{aligned} \int_a^z f(t) dt &= \int_a^z \left( \int_a^t f(\tau) d\tau \right) dt = \int_a^z \left( F'(t) - \sum_{k=0}^{n-2} F^{(k+1)}(a) \frac{(t-a)^k}{k!} \right) dt = \\ &= F(z) - F(a) - \sum_{k=0}^{n-2} F^{(k+1)}(a) \frac{(z-a)^{k+1}}{(k+1)!} = F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} F^{(k)}(a) \frac{(z-a)^k}{k!}, \end{aligned}$$

т. е. справедлива формула (1). ▶

**Теорема 2.** (о производной  $n$ -интеграла по пределам интегрирования). Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D_f$  — линейно-связное множество, содержащее более одной точки. Если функция  $f$  интегрируема, то справедливы равенства

$$\left( \int_a^z f(t) dt \right)' = \int_a^z f(t) dt \quad \forall a \in D_f, \quad (2)$$

$$\left( \int_z^b f(t) dt \right)' = -f(z) \int_z^b dt \quad \forall b \in D_f. \quad (3)$$

◀ Равенство (2) очевидно. Докажем справедливость формулы (3). Пусть  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  и  $\forall z \in D_f$   $F^{(n)}(z) = f(z)$ . Тогда, согласно формуле (1), получим

$$\left( \int_z^b f(t) dt \right)' = \left( F(b) - \sum_{k=0}^{n-1} F^{(k)}(z) \frac{(b-z)^k}{k!} \right)' = -F^{(n)}(z) \frac{(b-z)^{n-1}}{(n-1)!} = -f(z) \int_z^b dt$$

(см. пример 3 из п. 2.1). ▶

**Теорема 3** (Дирихле). Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D_f$  — линейно-связное множество, содержащее более одной точки, и  $a \in D_f$ ,  $b \in D_f$ . Если функция  $f$  интегрируема, то

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(t) \frac{(b-t)^{(n-1)}}{(n-1)!} dt. \quad (4)$$

◀ Согласно формуле (1) и теореме 2, имеем

$$\int_a^b f(t) \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \left( - \int_z^b f(t) dt \right) \Big|_{z=a}^{z=b} = \int_a^b f(t) dt. \quad \blacktriangleright$$

### 2.3. Формула Тейлора.

Пусть выполнены все условия теоремы 1, п. 2.2. Тогда из формулы (1) того же пункта следует равенство

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} F^{(k)}(a) \frac{(z-a)^k}{k!} + \int_a^z F^{(n)}(t) dt \quad \forall (a \in D_f, z \in D_f), \quad (1)$$

которое называется *формулой Тейлора для функции  $F$  с остаточным членом, записанным посредством  $n$ -интеграла*. Функция

$$z \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} F^{(k)}(a) \frac{(z-a)^k}{k!}$$

называется *многочленом Тейлора*.

Частные случаи формулы (1) встречаются в элементарной физике.

Пусть материальная точка движется прямолинейно по оси  $Oy$  с постоянной скоростью  $v = F'(a)$ . Если известно ее начальное положение  $F(a)$ , то положение  $F(x)$  в момент времени  $x$  можно найти по формуле

$$F(x) = F(a) + v(x-a) = F(a) + F'(a) \frac{(x-a)}{1!},$$

являющейся частным случаем равенства (1) при  $n=2$ , а также при  $n=1$ . Пусть снова материальная точка движется прямолинейно по оси  $Oy$  с изменяющейся скоростью, но с постоянным ускорением  $F''(a)$ , т. е. равноускоренно или равнозамедленно. Если известны ее начальное положение  $F(a)$  и начальная скорость  $v_0 = F'(a)$ , то положение точки  $F(x)$  в момент времени  $x$  можно определить по формуле

$$F(x) = F(a) + v_0(x-a) + F''(a) \frac{(x-a)^2}{2} = F(a) + F'(a) \frac{(x-a)}{1!} + F''(a) \frac{(x-a)^2}{2!},$$

являющейся частным случаем равенства (1) при  $n=3$ , а также при  $n=2$ . Таким образом, равенство (1) является дальнейшим обобщением этих важных формул элементарной физики.

Из формулы (1) следует, что функция  $F$  является многочленом тогда и только тогда, когда ее  $n$ -производная всюду равна нулю при некотором значении  $n \in \mathbb{N}$ . Формула бинома Ньютона является частным случаем формулы Тейлора.

Применив к  $n$ -интегралу формулу Дирихле (см. п. 2.2), получим *формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме*:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} F^{(k)}(a) \frac{(z-a)^k}{k!} + \int_a^z F^{(n)}(t) \frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt. \quad (2)$$

## § 3. Производная Ферма—Лагранжа. Формула Тейлора—Пеано

### 3.1. Производная Ферма—Лагранжа.

Производная, определенная в п. 4.1, гл. 2, допускает следующее обобщение по индукции.

**Определение.** Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in D_f$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Функция  $f$  называется  *$n$ -дифференцируемой в смысле Ферма—Лагранжа в точке  $z_0$* , если существует такая  $(n-1)$ -дифференцируемая в смысле Ферма—Лагранжа в точке  $z_0$  функция  $\varphi$ , что  $\forall z \in D_f$

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\varphi(z).$$

Если дополнительно  $z_0$  является предельной точкой множества  $D_f$ , то число  $n\varphi^{(n-1)}(z_0)$  называется  *$n$ -производной Ферма—Лагранжа функции  $f$  в точке  $z_0$  и обозначается  $f^{(n)}(z_0)$* .

Как и прежде, считаем функцию  $f$  0-дифференцируемой в смысле Ферма—Лагранжа в точке  $z_0$ , если она непрерывна в этой точке. При этом  $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$ .

**Пример 1.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$  и  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  где

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x^n}, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Доказать, что функция  $f_n$   $(n-1)$ -дифференцируема в смысле Ферма—Лагранжа в точке  $x = 0$   $\forall m \in \mathbb{N}$ .

Воспользуемся методом математической индукции. Если  $n = 1$ , то

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f_1(0),$$

т. е. функция  $f_1$  0-дифференцируема в смысле Ферма—Лагранжа в точке  $x = 0$   $\forall m \in \mathbb{N}$ . Допустим, что функция  $f_n$   $(n-1)$ -дифференцируема в смысле Ферма—Лагранжа в точке  $x = 0$   $\forall m \in \mathbb{N}$ . Согласно предположению, имеем

$$f_{n+1}(x) - f_{n+1}(0) = x f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

По определению функция  $f_{n+1}$   $n$ -дифференцируема в смысле Ферма—Лагранжа в точке  $x = 0$   $\forall m \in \mathbb{N}$ .

**Пример 2.** Указать в примере 1 значение  $m \in \mathbb{N}$ , при котором функция  $f_n$  не имеет 2-производной в точке  $x = 0$  в классическом смысле.

Если  $x \neq 0$ , то

$$f'_n(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x^n} - mx^{n-m-1} \cos \frac{1}{x^n}.$$

Полагая  $m = n-1$ , получаем, что функция  $f'_n$  разрывна в точке  $x = 0$ , вследствие чего  $f_n$  не  $n$ -дифференцируема в классическом смысле в этой точке при  $n \geq 2$ .

Из примеров 1 и 2 видим, что  $\forall n \geq 2$  существуют функции,  $n$ -дифференцируемые в смысле Ферма—Лагранжа в фиксированной точке и не имеющие в ней второй классической производной.

### 3.2. Теорема Тейлора—Пеано и ее обращение.

Понятия  $n$ -дифференцируемости и  $n$ -производной Ферма—Лагранжа используются при изучении локальных свойств функций. Очевидно, что если функция  $f$   $n$ -дифференцируема в смысле Ферма—Лагранжа в точке  $z_0 \in D_f$ , являющейся предельной для множества  $D_f$ , то  $\forall m = \overline{0, n}$  существуют  $m$ -производные Ферма—Лагранжа  $f^{(m)}(z_0)$ .

**Теорема 1** (формула Тейлора—Пеано). Пусть  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0$  — предельная точка множества  $D_f$  и  $z_0 \in D_f$ . Если функция  $f$   $n$ -дифференцируема в смысле Ферма—Лагранжа в точке  $z_0$ , то справедлива формула Тейлора—Пеано

$$f(z) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(z_0) \frac{(z-z_0)^k}{k!} + \varepsilon_n(z)(z-z_0)^n \quad \forall z \in D_f, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_n$  — непрерывная в точке  $z_0$  функция и  $\varepsilon_n(z_0) = 0$ .

◀ Применим метод математической индукции. Если  $n = 0$ , то утверждение очевидно при  $\varepsilon_0(z) = f(z) - f(z_0)$ . Предположим, что утверждение теоремы справедливо после замены  $n$  на  $n-1$  и что функция  $f$   $n$ -дифференцируема в смысле Ферма—Лагранжа в точке  $z_0$ . Согласно определению, существует такая  $n-1$ -дифференцируемая в смысле Ферма—Лагранжа в точке  $z_0$  функция  $\varphi$ , что  $\forall z \in D_f$

$$f(z) - f(z_0) = (z-z_0)\varphi(z). \quad (2)$$

По предположению

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^{(k)}(z_0) \frac{(z-z_0)^k}{k!} + \varepsilon_{n-1}(z)(z-z_0)^{n-1}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_{n-1}$  — непрерывная в точке  $z_0$  функция и  $\varepsilon_{n-1}(z_0) = 0$ . Из равенств (2) и (3) получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + (z - z_0) \left( \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^{(k)}(z_0) \frac{(z - z_0)^k}{k!} + \varepsilon_{n-1}(z)(z - z_0)^{n-1} \right) = \\ &= f(z_0) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{k+1} \cdot \frac{(z - z_0)^{k+1}}{k!} + \varepsilon_{n-1}(z)(z - z_0)^n, \end{aligned}$$

что равносильно формуле (1) при  $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}$ . ►

Следующее утверждение является обращением теоремы 1 и объясняет важность понятия  $n$ -производной Ферма—Лагранжа.

**Теорема 2** (об обращении формулы Тейлора—Пеано). Пусть  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0$  — предельная точка множества  $D_f$  и  $z_0 \in D_f$ . Если

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{(z - z_0)^k}{k!} + \varepsilon(z)(z - z_0)^n \quad \forall z \in D_f, \quad (4)$$

где  $a_k \in \mathbb{C} \quad \forall k = \overline{0, n}$ ,  $\varepsilon(z_0) = 0$  и  $\varepsilon$  — непрерывная в точке  $z_0$  функция, то функция  $f$   $n$ -дифференцируема в смысле Ферма—Лагранжа в точке  $z_0$  и  $a_k = f^{(k)}(z_0) \quad \forall k = \overline{0, n}$ .

◀ Применим метод математической индукции. Если  $n = 0$ , то равенство (4) имеет вид  $f(z) = a_0 + \varepsilon(z) \quad \forall z \in D_f$  и поэтому функция  $f$  непрерывна в точке  $z_0$  (т. е. 0-дифференцируема в смысле Ферма—Лагранжа в этой точке) и  $f^{(0)}(z_0) = f(z_0) = a_0$ . Пусть теорема справедлива при замене  $n$  на  $n-1$  и выполняется равенство (4). Так как  $f(z_0) = a_0$ , то

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0) \left( \sum_{k=1}^n a_k \frac{(z - z_0)^{k-1}}{k!} + \varepsilon(z)(z - z_0)^{n-1} \right).$$

Полагаем

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} \frac{(z - z_0)^{k-1}}{(k-1)!} + \varepsilon(z)(z - z_0)^{n-1}.$$

В силу предположения, функция  $\varphi$   $(n-1)$ -дифференцируема по Ферма—Лагранжу в точке  $z_0$  и  $\frac{a_k}{k} = \varphi^{(k-1)}(z_0) \quad \forall k = \overline{1, n}$ . По определению функция  $f$   $n$ -дифференцируема в смысле Ферма—Лагранжа в точке  $z_0$  и  $f^{(k)}(z_0) = k\varphi^{(k-1)}(z_0) = a_k \quad \forall k = \overline{1, n}$ . ►

Доказанная теорема может применяться для вычисления производных Ферма—Лагранжа. Приведем пример.

Пусть  $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ , где

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Вычислить  $f^{(n)}(0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Найдем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{2n}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^n}{e^t} = 0$$

(применяем  $n$  раз правило Лопиталья). Полагаем

$$\varepsilon_n(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{2n}}, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Функция  $\varepsilon_n$  непрерывна в точке  $x = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Так как  $f(x) = x^{2n}\varepsilon_n(x)$ , то, согласно теореме 2,  $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k = \overline{1, 2n}$ . В силу произвольности  $n$   $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .

## § 4. Криволинейные интегралы

### 4.1. Интегрирование функций по ориентированной гладкой кривой.

Непрерывная функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  может не быть интегрируемой по Ньютону—Лейбницу на линейно-связном открытом множестве. Поэтому возникает потребность в новом понятии — криволинейном интеграле. В § 3, гл. 2, определены понятия простой гладкой кривой или траектории и эквивалентных параметрических представлений кривой (см. определение 2), понятие ориентации и ориентированной гладкой кривой  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{ор}})$  (см. определение 3), а также понятие кусочно-гладкой кривой  $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$  (см. определение 6).

**Определение 1.** Пусть  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{ор}})$  — гладкая ориентированная кривая,  $\varphi \in \gamma_{\text{ор}}$  — параметрическое представление кривой  $\gamma$  и  $D_{\varphi} = [a, b]$ . Если  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  и  $D_f \supset \gamma$ , то криволинейным интегралом функции  $f$  по  $\Gamma$  называется число

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad (1)$$

если оно существует.

Из правила замены переменной в интеграле следует независимость правой части формулы (1) от выбора параметрического представления  $\varphi \in \gamma_{\text{ор}}$ .

Мы будем рассматривать криволинейные интегралы лишь по жордановым гладким и кусочно-гладким кривым, не оговаривая этого в каждом случае.

Формулу (1) можно записать также в виде

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b \operatorname{Re}(f(\varphi(t)) \varphi'(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(\varphi(t)) \varphi'(t)) dt. \quad (2)$$

Поскольку криволинейный интеграл (1) сводится к интегралу Римана, то он обладает свойствами *линейности* и *аддитивности*:

1)

$$\forall (\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}) \quad \int_{\Gamma} (\alpha f + \beta g)(z) dz = \alpha \int_{\Gamma} f(z) dz + \beta \int_{\Gamma} g(z) dz, \quad (3)$$

2) если  $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$  — кусочно-гладкая кривая, то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z) dz. \quad (4)$$

Если  $\Gamma^- = (\gamma, \gamma_{\text{ор}}^-)$  — противоположно ориентированная кривая по отношению к  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{ор}})$ , то выполняется равенство

$$\int_{\Gamma^-} f(z) dz = - \int_{\Gamma} f(z) dz, \quad (5)$$

т. е. при изменении ориентации кривой на противоположную интеграл изменяет знак.

Интеграл в определении 1 называют *криволинейным интегралом второго рода*, отличая его от следующего криволинейного интеграла первого рода.

**Определение 2.** Пусть  $\gamma$  — простая гладкая кривая, функция  $[a, b] \xrightarrow{\varphi} \gamma$  — ее параметрическое представление. Если  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  и  $\gamma \subset D_f$ , то криволинейным интегралом первого рода от функции  $f$  по кривой  $\gamma$  называется число

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_a^b f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt, \quad (6)$$

если оно существует.

Из теоремы о замене переменной в определенном интеграле следует, что правая часть формулы (6) не зависит от параметрического представления кривой  $\gamma$ . Если  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{ор}})$  — ориентированная гладкая кривая, то по определению полагаем

$$\int_{\Gamma} f(z) |dz| = \int_{\gamma} f(z) |dz|. \quad (7)$$

Из оценки модуля определенного интеграла следует важное для дальнейшего изложения неравенство

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| |dz|, \quad (8)$$

справедливое для любой непрерывной функции  $f$ .

Рассмотрим несколько примеров на вычисление криволинейных интегралов.

**Пример 1.** Пусть  $f \equiv 1$ . Тогда, согласно формуле (1), имеем

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

**Пример 2.** Пусть  $f(z) = z$ . Применив формулу (1), получим

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} z dz = \int_a^b \varphi(t) \varphi'(t) dt = \frac{1}{2} \int_a^b d(\varphi^2(t)) = \frac{\varphi^2(b)}{2} - \frac{\varphi^2(a)}{2}.$$

Примеры 1 и 2 показывают, что оба интеграла не зависят от выбора гладкой ориентированной кривой  $\Gamma$ , а зависят лишь от ее концов  $\varphi(a)$  и  $\varphi(b)$ .

Если  $\Gamma$  — замкнутая ориентированная кривая, то будем называть ее *контуром* или *петлей*, а для обозначения криволинейного интеграла по контуру  $\Gamma$  от функции  $f$  будем пользоваться записью

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz.$$

В силу замечания о зависимости интеграла лишь от концов кривой, получим:

$$\oint_{\Gamma} dz = \oint_{\Gamma} z dz = 0. \quad (9)$$

Легко также убедиться в справедливости равенства

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \frac{1}{n+1} (\varphi^{n+1}(b) - \varphi^{n+1}(a)).$$

**Пример 3.** Доказать, что

$$\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z} = i\pi, \quad \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{z} = -i\pi,$$

где  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — соответственно верхняя и нижняя полуокружности радиуса 1 с центром в начале координат. Начальная точка кривых  $z = 1$ .

Выбор начальной точки кривой определяет ее ориентацию. Параметрические представления ориентированных кривых имеют соответственно вид  $\varphi(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$  и  $\psi(t) = e^{it}$ ,  $-\pi \leq t \leq 0$ ,  $\varphi(0) = \psi(0) = 1$ . Согласно определению, имеем

$$\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z} = \int_0^{\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = i\pi, \quad \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{z} = \int_0^{-\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = -i\pi.$$

**Пример 4.** Вычислить  $\int_{\Gamma} \bar{z} dz$ , где  $\Gamma$  — произвольная замкнутая положительно ориентированная жорданова кривая.

Поскольку  $\bar{z} = x - iy$ ,  $dz = dx + i dy$ ,  $\bar{z} dz = x dx + y dy + i(-y dx + x dy)$ , то

$$\int_{\Gamma} \bar{z} dz = \int_{\Gamma} x dx + y dy + i \int_{\Gamma} -y dx + x dy = i \cdot 2 \iint_D dx dy = i \cdot 2|D|$$

(в силу формулы Грина), где  $|D|$  — площадь фигуры, ограниченной кривой  $\Gamma$ .

**Пример 5.** Вычислить интеграл  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt[4]{z}}$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}})$ , где  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ , когда

а)  $\sqrt[4]{1} = 1$ ; б)  $\sqrt[4]{1} = i$  и начальная точка кривой  $\Gamma$   $z = 1$ .

а) Параметрическое представление кривой  $\gamma$  — функция  $\varphi(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ . Согласно формуле (1) получим:

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt[4]{z}} = \int_0^{\pi} \frac{ie^{it} dt}{e^{i\frac{t}{4}}} = i \int_0^{\pi} e^{i\frac{3t}{4}} dt = \frac{4}{3} \left( e^{i\frac{3\pi}{4}} - 1 \right) = \frac{4}{3} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right);$$

б) Функция  $\varphi(t) = e^{i(t+2\pi)}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , является параметрическим представлением кривой  $\gamma$ . Поэтому

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt[4]{z}} = \int_0^{\pi} \frac{ie^{i(t+2\pi)} dt}{e^{i\frac{t+2\pi}{4}}} = \int_0^{\pi} e^{i\frac{3t}{4}} dt = \frac{4}{3} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \right).$$

Из свойства аддитивности криволинейного интеграла следует, что интеграл по контуру

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz$$

не зависит от выбора начальной точки интегрирования.

## 4.2. Гомотопия двух кривых (путей).

Пусть  $[a, b] \xrightarrow[\text{на}]{\varphi_0} \gamma_0$ ,  $[a, b] \xrightarrow[\text{на}]{\varphi_1} \gamma_1$  — параметрические представления простых непрерывных кривых  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ ,  $G \subset \mathbb{C}$  — открытое множество,  $G \supset \gamma_0$ ,  $G \supset \gamma_1$ .

**Определение 1.** Гомотопией (или деформацией) кривой  $\gamma_0$  в кривую  $\gamma_1$  называется непрерывное отображение  $[a, b] \times [\alpha, \beta] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$ , где  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  — такой отрезок, что  $\forall t \in [a, b]$   $\varphi(t, \alpha) = \varphi_0(t)$  и  $\varphi(t, \beta) = \varphi_1(t)$ .

Из определения следует, что  $\forall \xi \in [\alpha, \beta]$  отображение  $t \mapsto \varphi(t, \xi)$  есть параметрическое представление непрерывной кривой в  $G$ .

Обычно в определении гомотопии вместо прямоугольника  $[a, b] \times [\alpha, \beta]$  рассматривают квадрат  $K = [0, 1] \times [0, 1]$ . Этого всегда можно добиться с помощью замены переменных. В дальнейшем считаем, что  $D_{\varphi_0} = D_{\varphi_1} = [0, 1]$ ,  $[\alpha, \beta] = [0, 1]$  и рассматриваем гомотопию  $K \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$ , причем  $\forall t \in [0, 1]$ .

$$\varphi(t, 0) = \varphi_0(t), \quad \varphi(t, 1) = \varphi_1(t). \quad (1)$$

Пусть кривые  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  имеют одно и то же начало  $\varphi_0(0) = \varphi_1(0)$  и один и тот же конец  $\varphi_0(1) = \varphi_1(1)$ . В этом случае отображение  $\varphi$  называется гомотопией с фиксированными началом и концом, если выполнены соотношения (1) и если  $\forall \xi \in [0, 1]$

$$\varphi(0, \xi) = \varphi_0(0), \quad \varphi(1, \xi) = \varphi_0(1). \quad (2)$$

Иначе говоря, мы требуем, чтобы  $\forall \xi \in [0, 1]$  кривая  $\gamma_{\xi}$  имела то же начало, что и  $\gamma_0$  с  $\gamma_1$ , и тот же конец, что и  $\gamma_0$  с  $\gamma_1$ .

Если  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  — замкнутые кривые, то говорят о гомотопии замкнутой кривой  $\gamma_0$  в замкнутую кривую  $\gamma_1$ .

Мы будем, как правило, рассматривать гладкие или кусочно-гладкие пути и их гладкие или кусочно-гладкие гомотопии.



**Определение 2.** Область  $D \subset \mathbb{C}$  называется односвязной, если любая замкнутая кривая в ней гомотопна точке, т. е. постоянному пути.

Следовательно, в односвязной области любую замкнутую кривую можно стянуть в точку.

## § 5. Теорема и интеграл Коши

### 5.1. Существование локальной первообразной аналитической функции.

Пусть функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  определена в области  $G$ . Согласно определению 1, п. 1.1, функция  $F \in A(G)$  называется первообразной функции  $f$  в области  $G$ , если  $\forall z \in G \quad F'(z) = f(z)$ . С понятием первообразной связано определение интеграла Ньютона—Лейбница.

Выясним, при каких условиях функция  $f$ , определенная в области  $G \subset \mathbb{C}$ , имеет первообразную. При рассмотрении замкнутых областей их границам приписывают определенную ориентацию. Будем говорить, что граница  $\partial G$  области  $G$  обходится в положительном направлении, если при ее обходе внутренние точки  $z \in G$  остаются слева. Противоположное направление обхода называется отрицательным. Пусть, например,  $\bar{G}$  — замкнутый треугольник с вершинами в точках  $\alpha, z, z + \Delta z$  на плоскости  $\mathbb{C}$ ,  $\varphi_1$  — параметрическое представление отрезка  $[\alpha, z]$ ,  $\varphi_2$  — параметрическое представление отрезка  $[z, z + \Delta z]$ ,  $\varphi_3$  — параметрическое представление отрезка  $[z + \Delta z, \alpha]$  с соответствующими областями определения. Обозначим через  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  их положительные ориентации, соответствующие возрастанию параметра (рис. 69, а). Положительно ориентированной границей треугольника  $G$  назовем упорядоченный набор

$$\partial G = (\Gamma_1, \Gamma_2^-, \Gamma_3^-)$$

(рис. 69, б)).

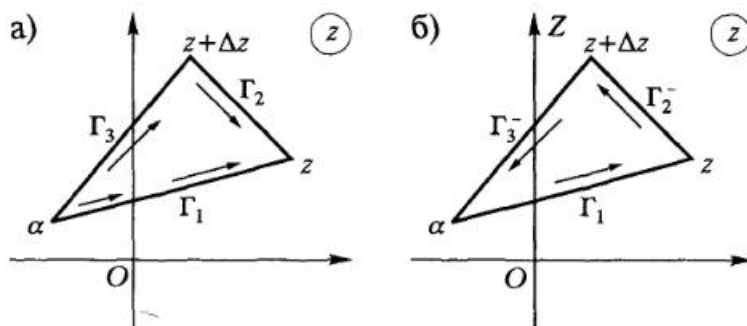


Рис. 69

**Теорема 1** (достаточные условия существования первообразной в круге). Пусть функция  $f$  непрерывна в круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$  и интеграл от нее по ориентированной границе любого треугольника  $\bar{G} \in K$  равен нулю, т. е.

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 0. \quad (1)$$

Тогда функция

$$F(z) = \int_{[\alpha, z]} f(\zeta) d\zeta, \quad (2)$$

где интегрирование проводится по прямолинейному отрезку  $[\alpha, z] \subset K$ , является первообразной функции  $f$  в круге  $K$ , т. е.  $F$  — аналитическая функция в  $K$  и  $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in K$ .

◀ Пусть  $\bar{G}$  — треугольник с вершинами в точках  $\alpha, z, z + \Delta z$ , где  $z \in K$  — любая точка и  $(z + \Delta z) \in K$ . Тогда  $\bar{G} \in K$  (рис. 69, а). Ориентируем границу треугольника в положительном

направлении (рис. 69, б)), соответствующем направлению движения против хода часовой стрелки. Согласно условию теоремы и свойству аддитивности интеграла, имеем

$$\int_{\partial G} f(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma_1} f(\zeta) d\zeta + \int_{\Gamma_2^-} f(\zeta) d\zeta + \int_{\Gamma_3^-} f(\zeta) d\zeta = F(z) - F(z + \Delta z) + \int_{\Gamma_2^-} f(\zeta) d\zeta = 0,$$

откуда

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{\Gamma_2^-} f(\zeta) d\zeta.$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_{\Gamma_2^-} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta.$$

Поскольку функция  $f$  непрерывная, то  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ , если  $|\Delta z| < \delta$  и  $\zeta \in [z, z + \Delta z]$ . Принимая во внимание неравенство (6), п. 4.1, получаем оценку

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{1}{|\Delta z|} \cdot \varepsilon |\Delta z| = \varepsilon,$$

откуда следует, что  $F'(z) = f(z)$ . ►

**Теорема 2.** Если  $f \in A(D)$ , то интеграл от  $f$  по ориентированной границе  $\partial G$  любого треугольника  $\bar{G} \in D$  равен нулю.

◀ Применим метод доказательства от противного. Допустим, что теорема неверна. Тогда существует такой треугольник  $\bar{G}^* \in D$ , что

$$\left| \int_{\partial G^*} f(z) dz \right| = M, \quad M > 0. \quad (3)$$

Разобьем треугольник  $\bar{G}^*$  средними линиями на четыре треугольника и ориентируем границу  $\partial G^*$  и границы составных треугольников так, чтобы их обход совершался в положительном направлении (см. рис. 70). Пусть  $\partial G_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) — положительно ориентированные границы составных треугольников. Тогда, очевидно, выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^4 \int_{\partial G_j} f(z) dz = \int_{\partial G^*} f(z) dz,$$

так как интегралы вдоль средних линий берутся дважды в противоположных направлениях и при сложении взаимно уничтожаются.

В силу неравенства (3) среди составных треугольников  $\bar{G}_j$  существует по меньшей мере один (обозначим его  $\bar{G}_1^*$ ) такой, что

$$\left| \int_{\partial G_1^*} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

Треугольник  $G_1^*$  опять разобьем средними линиями на четыре треугольника. Тогда, в силу приведенных выше рассуждений, среди них найдется по меньшей мере один такой треугольник  $\bar{G}_2^*$ , что

$$\left| \int_{\partial G_2^*} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^2}.$$

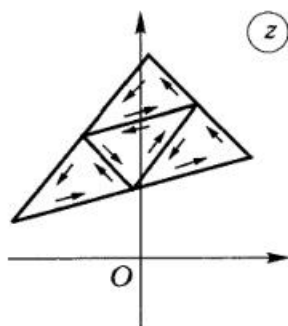


Рис. 70

Продолжая этот процесс разбиения на составные треугольники, получим последовательность вложенных друг в друга треугольников  $(\bar{G}_n^*)$ , для которых выполняются неравенства

$$\left| \int_{\partial G_n^*} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n}. \quad (4)$$

Согласно теореме Кантора (см. §4, гл. 1) существует точка  $z_0$ , принадлежащая всем треугольникам. Поскольку  $z_0 \in \bar{G}^*$ , то  $z_0 \in D$ . Так как функция  $f$  аналитическая, то  $\forall z \in D$  выполняется равенство

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0), \quad (5)$$

где  $\alpha \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow z_0$ , т. е.  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(z)| < \varepsilon$ .

Пусть  $K_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ . При достаточно больших  $n \in \mathbb{N}$   $\bar{G}_n^* \in K_\delta$ . Принимая во внимание примеры 1 и 2 из п. 4.1, получим:

$$\int_{\partial G_n^*} f(z) dz = \int_{\partial G_n^*} f(z_0) dz + \int_{\partial G_n^*} f'(z_0)(z - z_0) dz + \int_{\partial G_n^*} \alpha(z)(z - z_0) dz = \int_{\partial G_n^*} \alpha(z)(z - z_0) dz,$$

откуда следует оценка

$$\left| \int_{\partial G_n^*} f(z) dz \right| < \varepsilon |\partial G_n^*|^2,$$

где  $|\partial G_n^*|$  — периметр треугольника  $\bar{G}_n^*$ , т. к.  $|z - z_0| < |\partial G_n^*|$ . Согласно построению имеем

$$|\partial G_n^*| = \frac{|\partial G^*|}{2^n},$$

следовательно, выполняется оценка

$$\left| \int_{\partial G_n^*} f(z) dz \right| < \varepsilon \frac{|\partial G^*|^2}{4^n}. \quad (6)$$

Сопоставляя неравенства (4) и (6), получаем оценку

$$\frac{M}{4^n} < \varepsilon \frac{|\partial G^*|^2}{4^n},$$

откуда следует неравенство  $M < \varepsilon |\partial G^*|^2$ . В силу произвольного выбора  $\varepsilon > 0$   $M = 0$ . Получили противоречие, источник которого в предположении, что

$$\int_{\partial G} f(z) dz \neq 0. \blacktriangleright$$

Из теорем 1 и 2 получаем следствие, которое сформулируем как теорему.

**Теорема 3.** Если  $f \in A(D)$ , то в любом круге  $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset D$  она имеет первообразную

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta,$$

где интеграл берется по прямолинейному отрезку  $[z_0, z] \subset K_r$ .

Теперь покажем, как из локальных первообразных аналитической функции можно склеить первообразную, действующую вдоль заданной кривой (пути).

## 5.2. Первообразная вдоль кривой (вдоль пути).

Пусть функция  $f$  определена в области  $D \subset \mathbb{C}$ ,  $\gamma \subset D$  — простая непрерывная кривая,  $\varphi$  — ее параметрическое представление,  $D_\varphi = [a, b] = I$ . Тогда  $f$  определена в каждой точке  $z = \varphi(t) \in \gamma$ ,  $t \in I$ .

**Определение.** Функция  $I \xrightarrow{\Phi} \mathbb{C}$  называется первообразной функции  $f$  вдоль кривой (пути)  $\gamma$ , если выполняются следующие условия:

- 1)  $\Phi$  непрерывна на сегменте  $I$ ;
- 2) для каждой точки  $t_0 \in I$  существует окрестность  $O_{z_0}$  точки  $z_0 = \varphi(t_0)$ , в которой функция  $f$  имеет первообразную  $F$ , причем  $F(\varphi(t)) = \Phi(t) \quad \forall t \in O_{t_0} \subset I$ , где  $O_{t_0}$  — некоторая окрестность точки  $t_0$  в топологии  $I$ .

**Примечание 1.** Если  $f$  имеет первообразную  $F$  во всей области  $D$ , то функция  $t \mapsto F(\varphi(t))$  будет, очевидно, первообразной функции  $f$  вдоль кривой  $\gamma$ . Вообще говоря, в определении первообразной вдоль кривой не требуется существование первообразной во всей области  $D$ , а лишь в окрестности каждой точки  $z_0 = \varphi(t_0) \in \gamma$ .

**Примечание 2.** Если  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ ,  $t_1 \neq t_2$ , то первообразные функции  $f$ , одна из которых соответствует окрестности  $O_{t_1}$ , другая — окрестности  $O_{t_2}$ , могут не совпадать. Две первообразные одной и той же функции  $f$  в окрестности одной и той же точки  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$  могут отличаться лишь на постоянное слагаемое. Это является свидетельством того, что первообразная вдоль пути, являясь функцией параметра  $t$ , может не быть функцией точки  $z$ .

**Теорема 1.** Для любой функции  $f \in A(D)$  и любой непрерывной кривой  $\gamma \subset D$  первообразная функции  $f$  существует и определена с точностью до постоянного слагаемого.

◀ Пусть  $\varphi$  — параметрическое представление кривой  $\gamma$ ,  $D_\varphi = [a, b] = I$ . Разобьем отрезок  $I$  на  $n$  отрезков  $I_k = [t_k, t'_k]$  так, чтобы два соседних отрезка пересекались:  $t_k < t_{k+1} < t'_k$ ,  $t_1 = a$ ,  $t'_n = b$ . По теореме Кантора функция  $\varphi$  равномерно непрерывна на сегменте  $I$ . Поэтому сегменты  $I_k$  можно выбрать настолько малыми, чтобы  $\forall k = \overline{1, n}$  образ  $\varphi(I_k)$  содержался в круге  $K'_k \subset D$ , в котором функция  $f$  имеет первообразную. Существование первообразной следует из аналитичности функции  $f$  (теорема 3, п. 5.1).

Семейство первообразных, определенных в круге  $K'_1$ , имеет свойство: первообразные отличаются друг от друга на постоянное слагаемое. Выберем из этого семейства какую-либо одну первообразную и обозначим ее через  $F_1$ . Затем рассмотрим семейство первообразных, определенных в круге  $K'_2$ . Среди них существует одна (обозначим ее через  $F_2$ ), совпадающая на множестве  $K'_1 \cap K'_2 \neq \emptyset$  с  $F_1$ . Продолжая этот процесс, в каждом круге  $K'_k$  выберем первообразную  $F_k$  так, чтобы  $F_k = F_{k-1}$  на множестве  $K'_{k-1} \cap K'_k$ . Таким образом, функция  $t \mapsto \Phi(t) = F_k(\varphi(t))$ ,  $t \in I_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) является первообразной функции  $f$  вдоль кривой  $\gamma$ .

Докажем, что функция  $\Phi$  определена с точностью до постоянного слагаемого.

Пусть  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — первообразные функции  $f$  вдоль кривой  $\gamma$  и пусть  $\psi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t)$ . Возьмем произвольную точку  $t_0 \in I$ . В ее окрестности  $O_{t_0}$  имеем  $\psi(t) = F^{(1)}(\varphi(t)) - F^{(2)}(\varphi(t))$ , где  $F^{(1)}$  и  $F^{(2)}$  — две первообразные функции  $f$ , определенные в окрестности точки  $z_0 = \varphi(t_0)$ . Они могут отличаться лишь на постоянное слагаемое, поэтому  $\psi(t) = \text{const} \in O_{t_0}$ . Функция  $\psi$  определена на связном множестве  $I$  и является локально постоянной. Но непрерывная локально постоянная в каждой точке связного множества функция является постоянной на всем множестве. Докажем это утверждение.

Обозначим через  $E \subset I$  множество точек, в которых  $\psi(t) = \psi(t_0)$ :  $E = \{t \in I \mid \psi(t) = \psi(t_0)\}$ . Поскольку  $t_0 \in E$ , то  $E \neq \emptyset$ . Из того, что функция  $\psi$  локально постоянная, следует, что  $E$  — открытое множество в топологии  $I$  (см. теорему 7, п. 6.4, гл. 1). Из непрерывности функции  $\psi$  следует, что множество  $E$  также замкнуто в топологии  $I$ . Действительно, пусть  $t^*$  — предельная точка множества  $E$ . Тогда существует такая последовательность  $(t_n)$  точек из  $E$ , что  $t_n \rightarrow t^*$  и  $\psi(t_n) = \psi(t_0)$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(t_n) = \psi(t_0)$ . Поскольку функция  $\psi$  непрерывная, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(t_n) = \psi(t^*)$ . Следовательно,  $\psi(t^*) = \psi(t_0)$ , т. е.  $t^* \in E$ . Множество  $E$  одновременно открытое и замкнутое в топологии  $I$ . Согласно теореме § 3, гл. 2,  $E = I$ , или  $\psi(t) \equiv \psi(t_0)$ . Поэтому  $\forall t \in I \quad \Phi_1(t) - \Phi_2(t) = \text{const}$ . ▶

**Теорема 2.** Если  $\gamma$  — кусочно-гладкая кривая и  $f$  — непрерывная на  $\gamma$  функция с первообразной  $\Phi$  вдоль  $\gamma$ , то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \Phi(b) - \Phi(a), \quad (1)$$

т. е. интеграл вдоль ориентированной кусочно-гладкой кривой  $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$  вычисляется по формуле Ньютона—Лейбница.

◀ 1) Пусть  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$  — ориентированная гладкая кривая,  $\varphi \in \gamma_{\text{op}}$  — непрерывно дифференцируемое параметрическое представление кривой  $\gamma$ ,  $D_{\varphi} = [a, b]$ ,  $\varphi(a)$  — начало кривой  $\gamma$ , и пусть  $\gamma$  целиком лежит в области, в которой функция  $f$  имеет первообразную  $F$ . Тогда  $\Phi(t) = F(\varphi(t)) + C$ ,  $\Phi'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$  и

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_a^b \Phi'(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a).$$

2) В общем случае  $\gamma = \bigcup_{k=1}^n \gamma_k$ ,  $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$ ,  $\Gamma_k = (\gamma^{(k)}, \gamma_{\text{op}}^{(k)})$ ,  $\varphi_k \in \gamma_{\text{op}}$  — непрерывно дифференцируемые на сегментах  $[a_k, b_k]$  функции,  $[a, b] = \bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k]$ . По определению,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z) dz.$$

Принимая во внимание 1), получим:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n (\Phi(b_k) - \Phi(a_k)) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

где  $\Phi$  — первообразная функции  $f$  вдоль кривой  $\Gamma$ . ▶

**Замечание.** Посредством формулы Ньютона—Лейбница можно определить интеграл от аналитической функции вдоль любой непрерывной кривой, поскольку аналитическая функция имеет первообразную вдоль нее. В учебной литературе слова “кривая” и “путь” употребляют как синонимы.

### 5.3. Теорема Коши.

В этом пункте докажем основную интегральную теорему теории аналитических функций.

**Теорема 1** (об инвариантности интеграла при гомотопиях пути интегрирования). Если функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  аналитическая в области  $D$ , а  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  — две гладкие кривые, гомотопные в области  $D$  как пути с общими концами, или как замкнутые пути, то справедливо равенство

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz, \quad (1)$$

где  $\Gamma_0 = (\gamma_0, \gamma_0^{\text{op}})$ ,  $\Gamma_1 = (\gamma_1, \gamma_1^{\text{op}})$  — ориентированные кривые с общей начальной точкой.

◀ Пусть  $\varphi_0 \in \gamma_0^{\text{op}}$ ,  $\varphi_1 \in \gamma_1^{\text{op}}$  — параметрические представления гладких кривых  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ ,  $K = [0, 1] \times [0, 1] \xrightarrow{\varphi} D$  — гомотопия кривой  $\gamma_0$  в кривую  $\gamma_1$ . Тогда  $\forall t \in [0, 1]$   $\varphi(t, 0) = \varphi_0(t)$ ,  $\varphi(t, 1) = \varphi_1(t)$  и  $\forall \xi \in [0, 1]$  отображение  $t \mapsto \varphi(t, \xi)$  есть параметрическое представление непрерывной кривой  $\gamma_{\xi}$  в  $G$  (см. п. 4.2).

Если  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  гомотопны как кривые с общими концами, то

$$\forall \xi \in [0, 1] \quad \varphi(0, \xi) = \varphi_0(0) = \varphi_1(0) = a, \quad \varphi(1, \xi) = \varphi_0(1) = \varphi_1(1) = b.$$

Если  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  гомотопны как замкнутые кривые (контуры), то

$$\forall \xi \in [0, 1] \quad \varphi(0, \xi) = \varphi(1, \xi).$$

Пусть  $(K_{nm})_{n,m=1,\overline{N}}$  — семейство таких квадратов, покрывающих квадрат  $K$ , что каждый из них пересекается со всеми примыкающими к нему. Поскольку функция  $\varphi$  равномерно непрерывна в квадрате  $K$ , то квадраты  $K_{nm}$  можно выбрать настолько малыми, что образ  $\varphi(K_{nm})$  будет принадлежать кругу  $K'_{nm} \subset D$ , в котором функция  $f$  имеет первообразную. Зафиксируем  $n$  и далее поступаем так же, как и при доказательстве теоремы о существовании первообразной вдоль кривой.

Рассмотрим совокупность первообразных в круге  $K'_{n1}$ , отличающихся друг от друга, как известно, на постоянное слагаемое, и зафиксируем одну из них, которую обозначим через  $F_{n1}$ . Среди первообразных, определенных в круге  $K'_{n2}$ , выберем ту (обозначим ее через  $F_{n2}$ ), которая равна  $F_{n1}$  на множестве  $K'_{n1} \cap K'_{n2} \neq \emptyset$ . В точности так же подбираем первообразные

$F_{n3}, \dots, F_{nm}$ . Затем на множестве  $K_n = \bigcup_{m=1}^N K_{nm}$  определим функцию  $\Phi_n$  равенством

$$\Phi_n(t, \xi) = F_{nm}(\varphi(t, \xi)), \quad (t, \xi) \in K_{nm}.$$

Очевидно, что функция  $\Phi_n$  непрерывна на множестве  $K_n$  и определена с точностью до постоянного слагаемого.

Функцию  $\Phi_1(t, \xi)$  выберем произвольно, а функцию  $\Phi_2(t, \xi)$  выберем так, чтобы  $\Phi_2 = \Phi_1$  в  $K_1 \cap K_2$ . Такой выбор возможен, поскольку функция  $\Phi_1 - \Phi_2$  как локально постоянная и непрерывная на связном множестве  $K_1 \cap K_2$  является постоянной. Затем выберем  $\Phi_3$  так, чтобы  $\Phi_3 = \Phi_2$  в  $K_2 \cap K_3$  и т. д. В результате построим непрерывную функцию  $(t, \xi) \mapsto \Phi(t, \xi)$ , определенную равенством  $\Phi(t, \xi) = \Phi_n(t, \xi)$ ,  $(t, \xi) \in K_n$ .

Очевидно, что при фиксированном  $\xi \in [0, 1]$  функция  $\Phi(t, \xi)$  является первообразной функции  $f$  вдоль кривой  $\gamma_\xi$  с параметрическим представлением  $\varphi(t, \xi)$ . Поэтому, согласно формуле Ньютона—Лейбница, имеем

$$\int_{\Gamma_\xi} f(z) dz = \Phi(1, \xi) - \Phi(0, \xi) \quad (2)$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  имеют общие концы. Это означает, что  $\forall \xi \in [0, 1] \varphi(0, \xi) = \varphi_0(0) = \varphi_1(0) = a$ ,  $\varphi(1, \xi) = \varphi_0(1) = \varphi_1(1) = b$ . Отсюда следует, что  $\Phi(0, \xi)$  и  $\Phi(1, \xi)$  локально постоянные в каждой точке  $\xi \in [0, 1]$ , следовательно, постоянные на отрезке  $[0, 1]$ . Действительно, пусть  $(0, \xi) \in K_{n1}$ . Тогда  $\Phi(0, \xi) = F_{n1}(\varphi(0, \xi)) = F_{n1}(a) = \text{const}$ . Таким образом,  $\Phi(0, \xi) = \text{const}$  для всех таких  $\xi$ , что  $(0, \xi) \in K_{n1}$ . Локальное постоянство  $\Phi(1, \xi)$  доказывается аналогично. Следовательно, справедливы равенства  $\Phi(0, 0) = \Phi(0, 1)$ ,  $\Phi(1, 0) = \Phi(1, 1)$ , и по формуле (2) получаем

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz, \quad \Gamma_0 = (\gamma_0, \gamma_0^{\text{оп}}), \quad \Gamma_1 = (\gamma_1, \gamma_1^{\text{оп}}).$$

2) Пусть кривые  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  замкнутые, т. е.  $\forall \xi \in [0, 1] \varphi(0, \xi) = \varphi(1, \xi)$ . Аналогично предыдущему показываем, что разность  $\Phi(1, \xi) - \Phi(0, \xi)$  локально постоянная в каждой точке  $\xi \in [0, 1]$ , следовательно, постоянная на сегменте  $[0, 1]$ . В частности,  $\Phi(1, 1) - \Phi(0, 1) = \Phi(1, 0) - \Phi(0, 0)$ , т. е. по формуле (2) имеем

$$\oint_{\Gamma_0} f(z) dz = \oint_{\Gamma_1} f(z) dz. \blacktriangleright$$

**Следствие 1.** Если  $f \in A(D)$ ,  $\gamma$  — гладкая замкнутая кривая, гомотопная нулю в области  $D$ , то

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}}).$$

◀ Напомним, что путь  $\gamma$  с параметрическим представлением  $\psi$ ,  $D_\psi = [0, 1]$ , гомотопен нулю в области  $D$ , если существует непрерывное отображение  $K = [0, 1] \times [0, 1] \xrightarrow{\varphi} D$ , удовлетворяющее условиям

$$\varphi(0, \xi) = \varphi(1, \xi), \quad \varphi(t, 0) = \psi(t), \quad \varphi(t, 1) = \text{const}.$$

Отсюда следует, что существует замкнутая гладкая кривая  $\gamma_1$  с параметрическим представлением  $\varphi_1$ ,  $D_{\varphi_1} = [0, 1]$ , гомотопная кривой  $\gamma$  в  $D$  и содержащаяся в некотором круге  $K' \subset D$ . Функция  $f$  имеет первообразную  $F$  в этом круге. Поэтому функция  $\Phi$ , где  $\Phi(t) = F(\varphi_1(t))$ , является первообразной функции  $f$  вдоль пути  $\gamma_1$ . При этом

$$\Phi(0) = F(\varphi_1(0)) = F(a), \quad \Phi(1) = F(\varphi_1(1)) = F(a),$$

откуда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz = F(a) - F(a) = 0, \quad \Gamma_1 = (\gamma_1, \gamma_1^{\text{op}}). \quad \blacktriangleright$$

**Следствие 2.** Если функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  аналитическая в односвязной области  $D$ ,  $\gamma \subset D$  — любая гладкая замкнутая кривая, то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}}).$$

◀ Утверждение следует из следствия 1, если принять во внимание, что в односвязной области каждая замкнутая кривая гомотопна нулю (см. п. 4.2). ▶

**Примечание 1.** Следствие 2 — это классическая формулировка теоремы Коши. При дополнительных условиях, когда  $f'$  непрерывна в  $D$ , а  $\gamma$  — гладкая жорданова кривая, классическая теорема Коши доказывается элементарно с помощью формулы Грина.

◀ Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  — область,  $\partial G$  — ее положительно ориентированная граница. Тогда получим:

$$\int_{\partial G} f(z) dz = \int_{\partial G} u dx - v dy + i \int_{\partial G} v dx + u dy = \iint_G \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_G \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

в силу условий Коши—Римана, выполняющихся для аналитической функции  $f = u + iv$ . ▶

В теореме 1 и следствиях из нее вместо гладких кривых можно брать кусочно-гладкие.

**Примечание 2.** Классическую теорему Коши можно сформулировать иначе: если функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  аналитическая в замыкании  $\overline{D} = D \cup \partial D$ , где  $D$  — односвязная область, и  $\partial D$  — кусочно-гладкая кривая, то

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

Такую формулировку теоремы Коши можно обобщить. Оказывается, достаточно потребовать, чтобы  $f \in A(D)$  и чтобы  $f$  была непрерывной на замыкании  $\overline{D}$ .

**Теорема 2** (обобщение интегральной теоремы Коши на случай, когда функция не является аналитической на контуре интегрирования). Пусть область  $D$  представляет внутренность кусочно-гладкой замкнутой кривой  $\gamma$  и  $f$  — функция, непрерывная в замкнутой области  $\overline{D}$  и аналитическая в области  $D$ . Тогда выполняется равенство

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}}). \quad (3)$$

◀ Предположим сначала, что  $\gamma$  — звездный контур, т. е. существует такая точка  $z_0 \in D$ , что любой луч с вершиной в этой точке пересекает  $\gamma$  в одной и только одной точке (см. рис. 71). Например, звездными являются границы выпуклых многоугольников (в частности, треугольников) или кругов.

Пусть  $\varphi(t) = z_0 + \lambda(t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  — параметрическое представление контура  $\gamma$ . Согласно предположению, функция  $\lambda$  имеет кусочно-непрерывную производную  $\lambda'(t)$ . Преобразование подобия  $\zeta = z_0 + \rho\lambda(t)$ ,  $0 < \rho < 1$ , отображает ориентированный контур  $\Gamma$  на контур  $\Gamma_{\rho}$  с той же



ориентацией в направлении против хода часовой стрелки (рис. 71). Поскольку контур  $\gamma_\rho$  лежит в области  $D$ , то по интегральной теореме Коши (следствие 2) имеем

$$\int_{\Gamma_\rho} f(\zeta) d\zeta = \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho\lambda(t)) \rho\lambda'(t) dt = 0,$$

откуда

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho\lambda(t)) \lambda'(t) dt = 0.$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + \lambda(t)) \lambda'(t) dt \right| = \\ &= \left| \int_0^{2\pi} (f(z_0 + \lambda(t)) - f(z_0 + \rho\lambda(t))) \lambda'(t) dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \lambda(t)) - f(z_0 + \rho\lambda(t))| |\lambda'(t)| dt. \end{aligned}$$

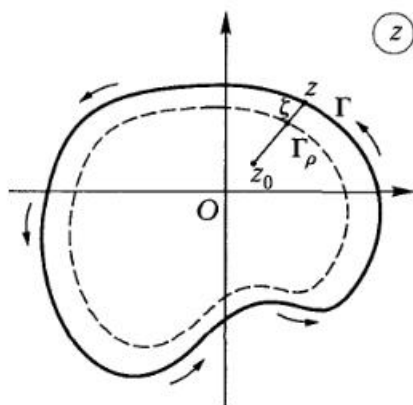


Рис. 71

Так как функция  $f$  по теореме Кантора равномерно непрерывна в  $\overline{D}$ , то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (z' \in \overline{D}, z'' \in \overline{D}) (|z' - z''| < \delta) : |f(z') - f(z'')| < \varepsilon.$$

Пусть

$$\sup_{t \in [0, 2\pi]} |\lambda(t)| = \alpha, \quad \sup_{t \in [0, 2\pi]} |\lambda'(t)| = \beta.$$

Тогда выполняется неравенство

$$|(z_0 + \lambda(t)) - (z_0 + \rho\lambda(t))| \leq (1 - \rho)\alpha < \delta, \quad \text{если } 1 - \rho < \frac{\delta}{\alpha},$$

и поэтому

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| < \varepsilon \beta \cdot 2\pi.$$

В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  отсюда следует, что

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Пусть  $\gamma$  — произвольная кусочно-гладкая замкнутая кривая. Если она имеет точки возврата, то мы выбросим из области  $D$  круга малого радиуса  $\varepsilon$  с центрами в этих точках так, чтобы граница полученной области  $D_\varepsilon$  не имела таких точек (рис. 72). Проводя внутри  $D_\varepsilon$  линии  $\gamma_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ), эту область можно разбить на части  $D_k$ , ограниченные звездными кривыми  $\gamma'_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ).

По ранее доказанному

$$\int_{\Gamma'_k} f(z) dz = 0, \quad \Gamma'_k = (\gamma'_k, \gamma_k'^{\text{оп}}), \quad k = \overline{1, m},$$

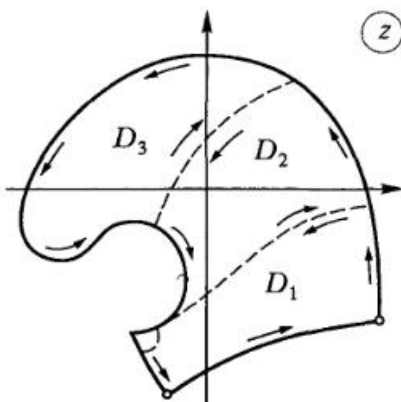


Рис. 72

где  $\Gamma'_k$  ориентированы в положительном направлении (см. рис. 72). Так как общие части границ смежных областей проходятся дважды, притом в противоположных направлениях, то

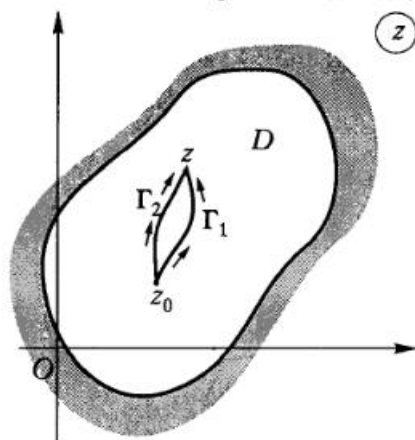


Рис. 73

$$\sum_{k=1}^m \int_{\Gamma'_k} f(z) dz = \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z) dz = 0, \quad \Gamma_\varepsilon = (\gamma_\varepsilon, \gamma_\varepsilon^{\text{op}}),$$

где  $\Gamma_\varepsilon$  — положительно ориентированная граница области  $D_\varepsilon$ . Поскольку  $\gamma$  и  $\gamma_\varepsilon$  отличаются лишь на конечное число малых дуг, а функция  $f$  ограничена, то ее интеграл вдоль этих дуг, который обозначим через  $I$ , допускает оценку

$$|I| < 2\pi M\varepsilon,$$

где  $M > 0$  — некоторая постоянная. Таким образом, интеграл по кривой  $\Gamma$  сколь угодно мало отличается от интеграла по кривой  $\Gamma_\varepsilon$ , равного нулю, вследствие чего

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad \blacktriangleright$$

Из теоремы Коши для односвязной области легко получить теорему о существовании первообразной аналитической функции, заданной в односвязной области. Эта теорема носит глобальный характер.

**Теорема 3.** Любая аналитическая в односвязной области  $D \subset \mathbb{C}$  функция  $f$  имеет в этой области первообразную.

◀ Если функция  $f$  аналитическая в односвязной области  $D$ , то, согласно следствию 2 из теоремы 1, для всех простых (жордановых) гладких кривых  $\gamma$ , лежащих в этой области и имеющих общие концы, интеграл  $\int_{\Gamma} f(z) dz$ , где  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$ , имеет одно и то же значение. Действительно, пусть  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — ориентированные гладкие или кусочно-гладкие кривые, с концами в точках  $z_0$  и  $z$ , лежащие в области  $D$  (рис. 73).

Рассмотрим упорядоченный набор  $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2^-)$ , являющийся замкнутой положительно ориентированной кусочно-гладкой кривой. Тогда имеем

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2^-} f(z) dz = 0,$$

откуда

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = - \int_{\Gamma_2^-} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

Поэтому криволинейный интеграл в рассмотренном случае можно обозначить так же, как и интеграл Ньютона—Лейбница

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta.$$

Пусть  $a \in D$  — начало гладкой или кусочно-гладкой кривой  $\gamma$ ,  $z \in D$  — произвольная точка, являющаяся концом кривой  $\gamma$ . Тогда в области  $D$  определена функция  $F$ , где

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta.$$

Пусть  $(z + \Delta z) \in D$ . Тогда получим:

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta. \quad (4)$$

В связи с замечанием о независимости интеграла от выбора пути, соединяющего две точки, в правой части равенства (4) считаем, что путь, соединяющий точки  $z$  и  $z + \Delta z$ , является прямолинейным отрезком. Поскольку функция  $f$  непрерывна в области  $D$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |\Delta z| < \delta \Rightarrow |f(z + \Delta z) - f(z)| < \varepsilon$ . Оценивая интеграл в равенстве (4), получим для  $|\Delta z| < \delta$ :

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{1}{|\Delta z|} \varepsilon |\Delta z| = \varepsilon.$$

Следовательно,  $\forall z \in D \quad F'(z) = f(z)$ . ►

В классической теореме Коши существенным является требование односвязности области. В неодносвязной области не каждый путь гомотопен нулю, а по нехомотопным нулю кривым интеграл от аналитической функции может не быть равным нулю. Рассмотрим пример.

Пусть  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ ,  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Очевидно, что  $f \in A(D)$ . Возьмем замкнутую кривую (окружность) с параметрическим представлением  $\varphi(t) = \rho e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $1 < \rho < 2$ . Тогда  $\gamma \subset D$ . Рассмотрим интеграл

$$\int_{\Gamma} f(z) dz,$$

где  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{ор}})$  — ориентированная в направлении против хода часовой стрелки окружность радиуса  $\rho$  с центром в начале координат. По определению криволинейного интеграла второго рода вдоль гладкой кривой  $\Gamma$  имеем

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{i \rho e^{it}}{\rho e^{it}} dt = 2\pi i \neq 0.$$

Однако, классическая теорема Коши обобщается и на случай неодносвязной области. Рассмотрим это обобщение.

Пусть даны  $(n+1)$ -связная область  $D \subset \mathbb{C}$ , ограниченная гладкими или кусочно-гладкими кривыми  $\gamma_0$  (внешняя граница),  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  (внутренние границы), функция  $f$  аналитическая в замкнутой области  $\overline{D}$  (рис. 74),  $\Gamma_0 = (\gamma_0, \gamma_0^{\text{ор}})$ ,  $\Gamma_1 = (\gamma_1, \gamma_1^{\text{ор}}), \dots, \Gamma_n = (\gamma_n, \gamma_n^{\text{ор}})$  — ориентированные кривые, при обходе которых область все время остается слева.

**Теорема 4.** При выполнении всех перечисленных выше условий справедливо равенство

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \int_{\Gamma_0} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z) dz = 0,$$

где  $\partial D$  — положительно ориентированная полная граница области  $D$ , состоящая из контуров  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ .

► Проведем разрезы  $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n$ , превращающие область  $D$  в односвязную область  $D'$ . Обозначим через  $\Gamma'$  положительно ориентированную полную границу области  $D'$ . Так как область  $D'$  односвязная и  $f$  аналитическая в замкнутой области  $\overline{D'}$ , то по теореме Коши имеем

$$\int_{\Gamma'} f(z) dz = 0.$$

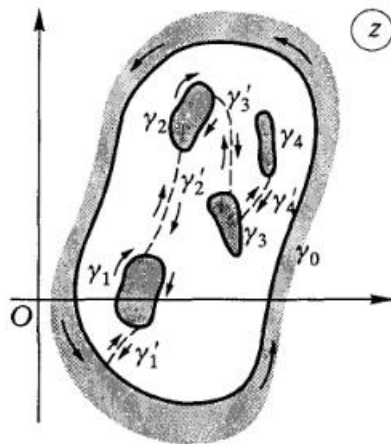


Рис. 74

Поскольку берега разрезов  $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n$  при интегрировании будут проходить дважды в противоположных направлениях, то в силу свойств криволинейного интеграла второго рода получим

$$\int_{\Gamma'} f(z) dz = \int_{\Gamma_0} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k^-} f(z) dz = 0$$

(входящие в сумму интегралы по берегам разрезов взаимно уничтожаются). ►

Теорема 4 остается в силе, если функция  $f$  аналитическая в области  $D$  и непрерывная в замыкании  $\bar{D}$ .

#### 5.4. Интегральная формула Коши.

Эта формула определяет аналитическую функцию в области через ее значения на границе области.

**Теорема.** Пусть  $D \in \mathbb{C}$  — область,  $f$  — аналитическая функция в замыкании  $\bar{D}$ ,  $\partial D$  — положительно ориентированная граница области  $D$ , состоящая из одной или конечного числа кусочно-гладких кривых. Тогда  $\forall z \in D$  выполняется равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1)$$

◀ Пусть  $z \in D$  — любая точка,  $K_\rho = \{z' \in D : |z' - z| < \rho\} \Subset D$ . Рассмотрим множество  $D_\rho = D \setminus \bar{K}_\rho$  (рис. 75).

Поскольку функция  $F$ , где  $F(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ , аналитическая в замыкании  $\bar{D}_\rho$ , то по теореме Коши 4, п. 5.3, имеем

$$\int_{\partial D_\rho} F(\zeta) d\zeta = 0,$$

откуда

$$\int_{\partial D} F(\zeta) d\zeta - \int_{\partial K_\rho} F(\zeta) d\zeta = 0,$$

где  $\partial K_\rho$  — положительно ориентированная граница круга  $K_\rho$ . Получаем, что

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial K_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (2)$$

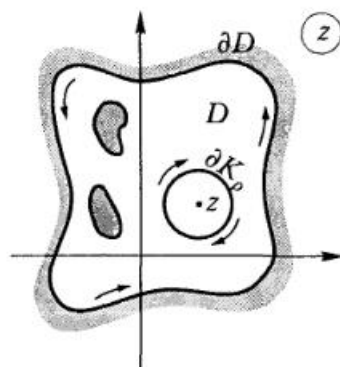


Рис. 75

В равенстве (2) перейдем к пределу при  $\rho \rightarrow 0$ , приняв во внимание, что его левая часть не зависит от  $\rho$ . Правую часть равенства (2) запишем в виде

$$\int_{\partial K_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_{\partial K_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int_{\partial K_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

После замены переменной  $\zeta - z = \rho e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , получим:

$$\int_{\partial K_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it} dt}{\rho e^{it}} + \int_0^{2\pi} \frac{i(f(\rho e^{it} + z) - f(z))\rho e^{it}}{\rho e^{it}} dt = 2\pi i f(z) + i \int_0^{2\pi} (f(\rho e^{it} + z) - f(z)) dt.$$

Поскольку аналитическая функция  $f$  является непрерывной, то  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\Delta z| < \delta \implies |f(z + \Delta z) - f(z)| < \varepsilon$ . Взяв  $\rho < \delta$ , получим оценку

$$\left| i \int_0^{2\pi} (f(\rho e^{it} + z) - f(z)) dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it} + z) - f(z)| dt < 2\pi\varepsilon.$$

В силу произвольности  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial K_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

Окончательно имеем

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial K_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z),$$

откуда следует формула (1). ►

**Следствие** (теорема о среднем). Пусть  $f$  — аналитическая функция в замкнутом круге  $\overline{K}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ . Тогда справедливо равенство

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R e^{it}) dt, \quad (3)$$

т. е. значение функции  $f$  в центре круга равно среднему арифметическому ее значений на окружности.

◀ Согласно формуле (1) имеем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Произведя замену переменной по формуле  $\zeta = z_0 + R e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , получим

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R e^{it}) \frac{R e^{it} i dt}{R e^{it}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R e^{it}) dt. \quad \blacktriangleright$$

Интеграл в правой части равенства (1) называется *интегралом Коши*.

Считаем полезным напомнить читателю, что положительная ориентация контура при его обходе соответствует направлению движения против хода часовой стрелки. При положительной ориентации границы области, состоящей из нескольких контуров, внешний контур обходится в направлении против хода часовой стрелки, а внутренние обходятся в направлении по ходу часовой стрелки. Это принято во внимание при доказательстве теоремы 4, п. 5.3, и теоремы Коши этого пункта.

Рассмотрим задачи.

1. Доказать, что  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^4 - 1} = 0$ , где  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ .

◀ Пусть  $\Gamma_j = (\gamma_j, \gamma_j^{\text{оп}})$  — положительно ориентированные границы окружностей радиуса  $\rho$  с центрами в точках  $-1, 1, -i, i$ , не пересекающиеся друг с другом. Применив формулу (1), получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^4 - 1} &= \int_{\Gamma_1} \frac{((z-1)(z^2+1))^{-1}}{z+1} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{((z+1)(z^2+1))^{-1}}{z-1} dz + \\ &+ \int_{\Gamma_3} \frac{((z^2-1)(z-i))^{-1}}{z+i} dz + \int_{\Gamma_4} \frac{((z^2-1)(z+i))^{-1}}{z-i} dz = 2\pi i \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4i} - \frac{1}{4i} \right) = 0. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

2. Пусть  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$  и  $|a| \neq r$ . Доказать равенство

$$I = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z-a|^2} = 2\pi r | |a|^2 - r^2 |^{-1}.$$

◀ Поскольку на окружности  $\gamma$  выполняется равенство  $z = re^{i\varphi}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , то

$$dz = ir e^{i\varphi} d\varphi, \quad -\frac{i dz}{z} = d\varphi, \quad |dz| = r d\varphi = -\frac{ir dz}{z},$$

то интеграл  $I$  сводится к интегралу второго рода по ориентированному в положительном направлении (против хода часовой стрелки) контуру  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}})$ :

$$I = -ir \int_{\Gamma} \frac{dz}{z|z-a|^2} = -ir \int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z-a)(\bar{z}-\bar{a})} = -ir \int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}.$$

Так как  $\bar{z} = r^2 z^{-1}$ , то

$$I = \frac{ir}{\bar{a}} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-a)(z-\frac{r^2}{\bar{a}})}.$$

Если контур  $\Gamma$  окружает точку  $a$ , то по формуле Коши (1) получим:

$$I = -\frac{2\pi r}{\bar{a}} \left(a - \frac{r^2}{\bar{a}}\right)^{-1} = -2\pi r (|a|^2 - r^2)^{-1} = 2\pi r (r^2 - |a|^2)^{-1}.$$

Если  $|a| > r$ , то контур  $\Gamma$  окружает точку  $\frac{r^2}{\bar{a}}$  и в силу формулы (1) имеем:

$$I = -\frac{2\pi r}{\bar{a}} \left(\frac{r^2}{\bar{a}} - a\right)^{-1} = 2\pi r (|a|^2 - r^2)^{-1}.$$

Объединив обе формулы в одну, получаем:

$$I = 2\pi r | |a|^2 - r^2 |^{-1}. \blacktriangleright$$

3. Вычислить интеграл

$$I = \int_{\Gamma} z \sin z \, dz, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}}), \quad \gamma = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0\right\}.$$

◀ Поскольку  $f \in A(\mathbb{C})$ , где  $f(z) = z \sin z$ , то в любой односвязной области, содержащей кривую  $\gamma$ , функция  $f$  имеет первообразную  $F(z) = -z \cos z + \sin z$ . Применяя формулу Ньютона—Лейбница, получим:

$$I = (-z \cos z + \sin z) \Big|_{z=-\pi/2}^{z=\pi/2} = 2$$

Параметрическое представление кривой имеет вид  $\varphi = \frac{\pi}{2} e^{it}$ ,  $-\pi \leq t \leq 0$ . Тогда  $a = \frac{\pi}{2} e^{-i\pi} = -\frac{\pi}{2}$  — начальная точка кривой  $\Gamma$ ,  $b = \frac{\pi}{2} e^{i0} = \frac{\pi}{2}$  — ее конечная точка. ▶

4. Пусть функция  $f$  аналитическая в конечной  $m$ -связной области  $\bar{D}$ , ограниченной замкнутыми кусочно-гладкими кривыми  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ . Доказать, что для существования первообразной функции  $f$  в области  $D$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\int_{\Gamma_k} f(z) \, dz = 0 \quad (k = \overline{1, m-1}), \quad \Gamma_k = (\gamma_k, \gamma_k^{\text{оп}}). \quad (1)$$

◀ Необходимость. Пусть функция  $f$  имеет в области  $D$  первообразную. Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = 0, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}}), \quad (2)$$

где  $\gamma \subset D$  — любая замкнутая кусочно-гладкая кривая.

Для данного  $1 \leq k \leq m-1$  выберем кусочно-гладкую замкнутую кривую  $\gamma$  так, чтобы функция  $f$  была аналитической в двусвязной области с положительно ориентированной границей  $\Gamma \cup \Gamma_k^-$  (или  $\Gamma^- \cup \Gamma$ ). Тогда по теореме Коши для односвязной области имеем

$$\int_{\Gamma_k} f(z) dz = 0.$$

Достаточность. Равенство (2) для любой замкнутой ориентированной кривой  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{ор}})$ ,  $\gamma \subset D$  следует из равенств (1) и применения теоремы Коши для односвязной или односвязной области. ►

5. Пусть  $f \in A(D)$ ,  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$  и  $f$  непрерывна в замыкании  $\bar{D}$ . Вычислить интеграл

$$I = \iint_{r < |z| < R} f(z) dx dy.$$

◀ Применив теорему о среднем, получим

$$I = \int_r^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\varphi}) d\varphi = 2\pi f(0) \frac{R^2 - r^2}{2} = \pi f(0)(R^2 - r^2). \blacktriangleright$$

## § 6. Интеграл типа Коши

В теории функций комплексного переменного значительное место занимает интеграл типа Коши, являющийся обобщением интеграла Коши.

### 6.1. Определение и основное свойство интеграла типа Коши.

Интегралом типа Коши называют интеграл вида

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (1)$$

где  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{ор}})$  — ориентированная гладкая или кусочно-гладкая кривая,  $f$  — непрерывная функция  $\forall z \in \gamma$ . Если  $\gamma$  — спрямляемая кривая, то требуем, чтобы  $f$  была суммируемой на  $\gamma$  (кривая  $\gamma$  называется *спрямляемой*, если ее параметрическое представление  $\varphi$  является функцией ограниченной вариации на отрезке  $D_{\varphi} = [a, b]$ ).

В случае, когда путь  $\gamma$  замкнут, а  $f$  — аналитическая функция в замкнутой области, ограниченной контуром  $\gamma$ , то интеграл типа Коши совпадает с интегралом Коши, т. е.

$$F(z) = f(z).$$

Следовательно, интеграл Коши является частным случаем интеграла типа Коши.

Основное свойство интеграла типа Коши сформулируем в виде теоремы.

**Теорема.** Интеграл типа Коши имеет производную любого порядка в любой точке  $z \in \mathbb{C}$ , не принадлежащей кривой  $\gamma$ , и эти производные определяются следующими равенствами

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (2)$$

(т. е. их получают формальным дифференцированием под знаком интеграла (1)).



◀ Применим метод математической индукции. Пусть  $z \in \mathbb{C}$  — произвольная точка и  $z \notin \gamma$ . Покажем, что  $F'(z)$  существует и вычисляется по формуле (2) при  $n = 1$ . Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\Delta z} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\Delta z} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) \Delta z d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z - \Delta z)}. \end{aligned}$$

Оценим модуль разности

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} \right| &= \\ = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left( \frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - z - \Delta z)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right) d\zeta \right| &= \left| \frac{\Delta z}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - \Delta z)} \right|. \end{aligned}$$

Выберем  $|\Delta z|$  настолько малым, чтобы  $(z + \Delta z) \notin \gamma$ . Очевидно, существуют такие числа  $\rho_0 > 0$  и  $M > 0$ , что

$$\rho(\gamma, z) = \inf_{\zeta \in \gamma} |\zeta - z| \geq \rho_0, \quad \rho(\gamma, z + \Delta z) = \inf_{\zeta \in \gamma} |\zeta - z - \Delta z| \geq \rho_0, \quad |f(\zeta)| < M \quad \forall \zeta \in \gamma.$$

Тогда  $\forall \varepsilon > 0$  справедлива оценка

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| < \frac{M|\Delta z|L}{2\pi\rho_0^3} < \varepsilon,$$

если  $|\Delta z| < \frac{2\pi\rho_0^3}{ML}$ , где  $L$  — длина кривой  $\gamma$ . Таким образом,

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Предположим, что утверждение справедливо для  $n = k$  и покажем, что из этого предположения следует справедливость утверждения для  $n = k + 1$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{F^{(k)}(z + \Delta z) - F^{(k)}(z)}{\Delta z} &= \frac{k!}{2\pi i \Delta z} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left( \frac{1}{(\zeta - z - \Delta z)^{k+1}} - \frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}} \right) d\zeta = \\ &= \frac{k!}{2\pi i \Delta z} \int_{\Gamma} f(\zeta) \frac{(\zeta - z)^{k+1} - (\zeta - z - \Delta z)^{k+1}}{(\zeta - z - \Delta z)^{k+1}(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \\ &= \frac{k!}{2\pi i \Delta z} \int_{\Gamma} f(\zeta) \frac{(\zeta - z)^{k+1} - \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j C_{k+1}^j (\zeta - z)^{k+j-1} \Delta z^j}{(\zeta - z - \Delta z)^{k+1}(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \\ &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) \frac{\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} C_{k+1}^j (\zeta - z)^{k+1-j} \Delta z^{j-1}}{(\zeta - z - \Delta z)^{k+1}(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j C_{k+1}^{j+1} (\zeta - z)^{k-j} \Delta z^j}{(\zeta - z)^{k+1}(\zeta - z - \Delta z)^{k+1}} d\zeta. \end{aligned}$$

Оценим выражение

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{F^{(k)}(z + \Delta z) - F^{(k)}(z)}{\Delta z} - \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+2}} \right| = \\
& = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left( \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j C_{k+1}^{j+1} (\zeta - z)^{k-j} \Delta z^j}{(\zeta - z)^{k+1} (\zeta - z - \Delta z)^{k+1}} - \frac{k+1}{(\zeta - z)^{k+2}} \right) d\zeta \right| = \\
& = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) \frac{\sum_{j=0}^k (-1)^j C_{k+1}^{j+1} (\zeta - z)^{k+1-j} \Delta z^j - (k+1)(\zeta - z - \Delta z)^{k+1}}{(\zeta - z)^{k+2} (\zeta - z - \Delta z)^{k+1}} d\zeta \right| = \\
& = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) \frac{(k+1) \left( (\zeta - z)^{k+1} - (\zeta - z - \Delta z)^{k+1} \right) + \sum_{j=1}^k (-1)^j C_{k+1}^{j+1} (\zeta - z)^{k+1-j} \Delta z^j}{(\zeta - z)^{k+2} (\zeta - z - \Delta z)^{k+1}} d\zeta \right| = \\
& = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) \frac{(k+1) \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} C_{k+1}^j (\zeta - z)^{k+1-j} \Delta z^j + \sum_{j=1}^k (-1)^j C_{k+1}^{j+1} (\zeta - z)^{k+1-j} \Delta z^j}{(\zeta - z)^{k+2} (\zeta - z - \Delta z)^{k+1}} d\zeta \right| < \\
& < \frac{k! L |\Delta z| M N}{2\pi \rho_0^{2k+3}} = B |\Delta z| < \varepsilon, \quad \text{если } |\Delta z| < \frac{\varepsilon}{B}.
\end{aligned}$$

В полученном неравенстве  $N$  — постоянная, зависящая лишь от  $k$  и  $\rho_0$ .

Таким образом, формула (2) справедлива при  $n = k + 1$ , а значит и  $\forall n \in \mathbb{N}$ . ►

**Следствие.** Аналитическая в области  $D \subset \mathbb{C}$  функция  $f$  имеет производную любого порядка  $f^{(n)}(z) \forall z \in D$ .

◄ Пусть  $z_0 \in D$  — любая точка. Рассмотрим ее  $\delta$ -окрестность  $K_\delta = \{z \in D : |z - z_0| < \delta\} \Subset D$ . Согласно интегральной формуле Коши, имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in K_\delta.$$

Поскольку интеграл Коши является частным случаем интеграла типа Коши, то функция  $f$  имеет производные всех порядков в точке  $z_0$ . Поскольку  $z_0 \in D$  — произвольная точка, то  $\forall (z \in D, n \in \mathbb{N}) \exists f^{(n)}(z)$ . ►

Полученное следствие можно кратко записать в виде

$$f \in A(D) \implies \forall (z \in D, n \in \mathbb{N}) \exists f^{(n)}(z) \wedge f^{(n)}(z) \in A(D).$$

Рассмотрим некоторые факты, непосредственно следующие из свойства бесконечной дифференцируемости аналитической функции.

## 6.2. Гармоничность действительной и мнимой частей аналитической функции.

**Восстановление аналитической функции по ее действительной (мнимой) части.**

**Определение.** Дважды дифференцируемая функция  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D = G$ , называется гармонической в области  $G$ , если она удовлетворяет в  $G$  дифференциальному уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Дифференциальный оператор  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  называется *оператором Лапласа*.

Пусть  $f = u + iv$ ,  $f \in A(D)$ ,  $D \in \mathbb{C}$  — односвязная область. Из бесконечной дифференцируемости функции  $f$  следует, что функции  $u$  и  $v$  имеют в каждой точке области  $D$  частные производные любых порядков. Запишем условия Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2)$$

Продифференцируем первое равенство в (2) по  $x$ , второе — по  $y$  и сложим полученное, приняв во внимание, что  $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ . Имеем

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Аналогично получаем равенство  $\Delta v = 0$ . Следовательно, действительная часть  $u$  и мнимая часть  $v$  аналитической в области  $D$  функции  $f$  являются гармоническими функциями. Функцию  $v$  принято называть *гармонически сопряженной с функцией  $u$* .

Пусть в односвязной области  $D$  задана гармоническая функция  $u$ . Найдем сопряженную ей гармоническую функцию  $v$ . Из условий (2) получаем:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

откуда

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C, \quad C = \text{const}, \quad (x_0, y_0) \in D, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Подынтегральное выражение в этом криволинейном интеграле является полным дифференциалом, вследствие чего интеграл не зависит от выбора пути интегрирования.

Таким образом, аналитическая функция  $f$  в односвязной области  $D$  определяется ее действительной частью с точностью до аддитивной постоянной  $iC$  по формуле

$$f(z) = u(x, y) + i \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + iC. \quad (4)$$

Формула

$$f(z) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + C + iv(x, y) \quad (5)$$

восстанавливает аналитическую функцию  $f$  по ее мнимой части с точностью до произвольной аддитивной действительной постоянной  $C$ .

### 6.3. Теоремы Лиувилля и Морера.

**Теорема 1** (Лиувилля). Если функция  $f$  аналитическая во всей плоскости  $\mathbb{C}$  и ограниченная, то она постоянная.

◀ Согласно условию,  $\forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leq M = \text{const}$ . Пусть  $z_0 \in \mathbb{C}$  — произвольная точка. Рассмотрим круг  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ , где  $R > |z_0|$ . Согласно формуле производной от интеграла Коши имеем

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{if(Re^{it})Re^{it}}{(Re^{it} - z_0)^2} dt,$$

откуда при достаточно больших  $R$  получим  $\forall \varepsilon > 0$  оценку

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{MR2\pi}{(R - |z_0|)^2} < \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора  $\varepsilon > 0$   $f'(z_0) = 0$ . Поскольку  $z_0 \in \mathbb{C}$  — произвольная точка, то  $f(z) \equiv \text{const}$ . ►

**Теорема 2 (Морера).** Если функция  $f$  непрерывная в области  $D \subset \mathbb{C}$  и интеграл от нее вдоль ориентированной границы  $\partial G$  любого треугольника  $\bar{G} \in D$  равен нулю, то  $f \in A(D)$ .

► Пусть  $z_0 \in D$  — любая точка. Рассмотрим круг  $K_{z_0} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset D$ . Тогда по теореме 1, п. 5.1, функция  $F$ , где

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta,$$

является первообразной функции  $f$  в круге  $K_{z_0}$ , т. е.  $\forall z \in K_{z_0}$   $F'(z) = f(z)$ . Отсюда следует, что  $f \in A(K_{z_0})$ , следовательно,  $f \in A(D)$  в силу произвольности  $K_{z_0}$ . ►

#### 6.4. Главное значение и предельные значения интеграла типа Коши.

Согласно теореме п. 6.1, интеграл типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{ор}}), \quad (1)$$

где  $f$  — непрерывная функция,  $\Gamma$  — положительно ориентированная гладкая или кусочно-гладкая кривая, является аналитической функцией в любой точке  $z \in \mathbb{C}$ , не принадлежащей кривой  $\gamma$ .

Функцию  $\zeta \mapsto f(\zeta)$  называют *плотностью*, а функцию  $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$  — *ядром Коши*. Если  $z \in \gamma$ , то интеграл в правой части (1) в обычном понимании не существует, однако при некоторых дополнительных ограничениях, налагаемых на плотность  $f$ , ему можно придать определенный смысл.

Считаем, что  $\gamma$  — замкнутая гладкая кривая Жордана и  $\zeta_0 \in \gamma$ . Пусть  $L_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta_0| = \varepsilon\}$ , где  $\varepsilon > 0$  — произвольное, как угодно малое число, не превышающее стандартного радиуса кривой  $\gamma$  (гладкие замкнутые кривые Жордана  $\gamma$  имеют важное свойство:  $\forall \gamma \exists \delta_0 > 0$  такое, что  $\forall z_0 \in \gamma$  окружность с центром в этой точке радиуса  $\delta < \delta_0$  ровно два раза пересекает кривую  $\gamma$ ; число  $\delta_0$  называется стандартным радиусом кривой  $\gamma$ ).

Часть кривой  $\gamma$ , лежащей вне окружности  $L_\varepsilon$ , обозначим  $\gamma_\varepsilon$ . Интеграл

$$F_\varepsilon(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \quad (2)$$

очевидно, существует в обычном понимании.

**Определение.** Если существует  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F_\varepsilon(\zeta_0)$ , то этот предел называют *интегралом в смысле главного значения по Коши*, или *главным значением интеграла типа Коши* в точке  $\zeta_0$  и обозначают  $F(\zeta_0)$ .

Обозначение главного значения интеграла типа Коши совпадает с обозначением интеграла типа Коши, поскольку, как правило, если интеграл не существует в обычном понимании, то рассматривают его главное значение.

Для существования интеграла типа Коши в понимании главного значения  $\forall \zeta_0 \in \gamma$  достаточно, чтобы функция  $f$  удовлетворяла на кривой  $\gamma$  *условию Гельдера* с показателем  $0 < h \leq 1$  и постоянной  $M$ :

$$(\exists M > 0) : \forall (\zeta_1 \in \gamma, \zeta_2 \in \gamma) |f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leq M|\zeta_1 - \zeta_2|^h. \quad (3)$$

Действительно, запишем  $F_\varepsilon(\zeta_0)$  в виде

$$F_\varepsilon(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{f(\zeta_0)}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0}.$$

Принимая во внимание условия (3), легко доказать существование равномерно сходящегося несобственного интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta.$$

Пусть  $L'_\varepsilon$  — часть окружности  $L_\varepsilon$ , находящаяся вне области  $D$ , ограниченной кривой  $\gamma$ ,  $\tau$  — касательная к кривой  $\gamma$  в точке  $\zeta_0$  (рис. 76). Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\Gamma_\varepsilon \cup L'_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} - \int_{L'_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \right) = \\ &= 2\pi i - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L'_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = 2\pi i - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} i \frac{\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}} dt = \\ &= 2\pi i - i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varphi_2 - \varphi_1) = 2\pi i - \pi i = \pi i. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{f(\zeta_0)}{2}.$$

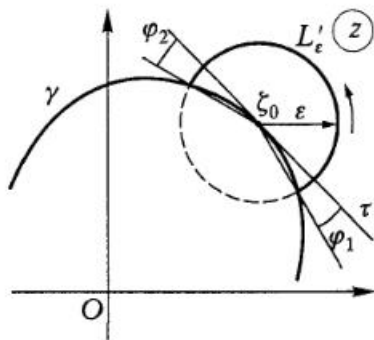


Рис. 76

Следовательно, главное значение интеграла типа Коши определяется равенством

$$F(\zeta_0) = \frac{f(\zeta_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}}).$$

Замкнутая кривая Жордана  $\gamma$  делит всю плоскость  $\mathbb{C}$  на две области: конечную  $D^+$  и  $D^-$ , содержащую бесконечно удаленную точку. В каждой из этих областей интеграл типа Коши определяет аналитическую функцию. Пусть  $\zeta_0 \in \gamma$  — произвольная точка. Возникает вопрос о существовании пределов

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta_0 \\ z \in D^+}} F(z) \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta_0 \\ z \in D^-}} F(z).$$

Эти пределы, если они существуют, называются соответственно *предельными значениями интеграла типа Коши в точке  $\zeta_0$  слева от кривой  $\gamma$  и справа от нее* и обозначаются  $F^+(\zeta_0)$ ,  $F^-(\zeta_0)$ . Если указанные предельные значения существуют, то желательно установить связь между ними и главным значением интеграла типа Коши  $F(\zeta_0)$ . Мы найдем эту связь при дополнительном предположении, что функция  $f$  аналитическая на кривой  $\gamma$ .

Выберем  $\varepsilon > 0$  настолько малым, чтобы круг  $\bar{K}_\varepsilon = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - \zeta_0| \leq \varepsilon\}$  содержался в полоске аналитичности функции  $f$ . Обозначим через  $\delta_\varepsilon$  часть кривой  $\gamma$ , принадлежащей кругу  $\bar{K}_\varepsilon$ . Имеем

$$\begin{aligned} F^+(\zeta_0) &= \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta_0 \\ z \in D^+}} F(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta_0 \\ z \in D^+}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta_0 \\ z \in D^+}} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) = \\ &= \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta_0 \\ z \in D^+}} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{L'_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \int_{L'_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta \right) \end{aligned}$$

(в каждом из интегралов перешли к пределу под знаком интеграла, поскольку кривые, по которым производится интегрирование, не содержат точку  $\zeta_0$ ). Таким образом, справедливо равенство

$$F^+(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{L'_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta,$$

выполняющееся для любого как угодно малого  $\varepsilon > 0$ . Поэтому в нем можно перейти к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Получим:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = F(\zeta_0),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{f(\zeta_0)}{2\pi i} \int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \right) = \frac{f(\zeta_0)}{2},$$

так как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \pi i, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = 0.$$

Окончательно имеем

$$F^+(\zeta_0) = \frac{f(\zeta_0)}{2} + F(\zeta_0).$$

Аналогично получаем

$$F^-(\zeta_0) = -\frac{f(\zeta_0)}{2} + F(\zeta_0).$$

При доказательстве последнего равенства вместо  $L'_\varepsilon$  берем  $L''_\varepsilon$  — часть окружности  $L_\varepsilon$ , содержащуюся в  $D^+$ . Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L''_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = -\pi i.$$

Равенства

$$F^\pm(\zeta_0) = \pm \frac{f(\zeta_0)}{2} + F(\zeta_0)$$

в учебной литературе носят название *формул Сохоцкого*. Их открыл в 1873 г. русский математик Ю. В. Сохоцкий (1842–1927). Формулы Сохоцкого справедливы при более общих предположениях относительно функции  $f$ .

### 6.5. Формулы Шварца и Пуассона.

Пусть  $\gamma_R = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = R\}$ ,  $\zeta = Re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $u_0$  — функция, заданная на окружности  $\gamma_R$ , где

$$u_0(\zeta) = u_0(Re^{it}) = \bar{u}_0(t), \quad \bar{u}_0(0) = \bar{u}_0(2\pi).$$

Формулой Шварца называется равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(Re^{it}) \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} u_0(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (1)$$

а интеграл в (1) носит название *интеграла Шварца*.

Рассмотрим свойства функции  $f$ .

1) Запишем формулу (1) в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} u_0(\zeta) \frac{2d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{u_0(\zeta)}{\zeta} d\zeta. \quad (2)$$

Второй интеграл в формуле (2) является постоянной величиной, а первый — интеграл типа Коши. Поэтому  $f$  — аналитическая функция в любой области, не содержащей точек кривой  $\gamma_R$  и, в частности,  $f \in A(K_R)$ , где  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ .

2) Пусть  $u_0(\zeta) \equiv 1$ , тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{2d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Если  $z \in K_R$ , то  $f(z) = 2 - 1 = 1$ .

3) Найдем  $\operatorname{Re} f(z)$ , считая, что  $z = re^{i\varphi} \in K_R$ . Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(z) &= \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(Re^{it}) \frac{Re^{it} + re^{i\varphi}}{Re^{it} - re^{i\varphi}} dt = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(Re^{it}) \frac{(Re^{it} + re^{i\varphi})(Re^{-it} - re^{-i\varphi})}{(Re^{it} - re^{i\varphi})(Re^{-it} - re^{-i\varphi})} dt = \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(Re^{it}) \frac{R^2 - r^2 + Rr(e^{i(\varphi-t)} - e^{-i(\varphi-t)})}{R^2 + r^2 - Rr(e^{i(t-\varphi)} + e^{-i(t-\varphi)})} dt = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(Re^{it}) \frac{R^2 - r^2 + 2iRr \sin(\varphi - t)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(t - \varphi)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(t - \varphi)} dt = u(re^{i\varphi}). \end{aligned}$$

Равенство

$$u(r, \varphi) = u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(t - \varphi)} dt \quad (3)$$

называется *формулой Пуассона*. Интеграл в правой части формулы (3) называется *интегралом Пуассона*.

Из свойства 2) функции  $f$  следует равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(t - \varphi)} dt = 1, \quad (4)$$

выполняющееся  $\forall z \in K_R$ ,  $z = re^{i\varphi}$ .

4) Покажем, что функция  $(r, \varphi) \mapsto u(r, \varphi)$  непрерывна в замыкании  $\overline{K}_R$  и что  $u(R, \varphi) = u_0(Re^{i\varphi})$ , т. е.  $u(r, \varphi) \rightarrow u_0(Re^{i\varphi})$  при  $z = re^{i\varphi} \rightarrow \zeta = Re^{i\varphi}$  вдоль любого пути, лежащего в  $K_R$ . Для этого нам понадобится следующее утверждение.

**Лемма.** Пусть функция  $U: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U = U(z, \zeta)$ , где  $z = re^{i\varphi}$ ,  $\zeta = Re^{it}$ ,  $0 \leq r < R$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ , удовлетворяет следующим условиям:

1) она непрерывна и неотрицательна;

2)  $\forall z$  выполняется равенство  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z, \zeta) dt = 1$ ;

3) при  $z \rightarrow \zeta_0 = Re^{it_0}$  ( $\zeta_0$  — любая точка окружности  $\gamma_R$ ) и  $\zeta \neq \zeta_0$  функция  $U$  стремится к нулю равномерно относительно  $\zeta$  (т. е.  $\forall \epsilon > 0 \exists (\rho < R, \delta > 0) (r > R - \rho \wedge |\varphi - t_0| < \delta) (\forall t: |t - t_0| < \delta) : 0 \leq U(z, \zeta) < \epsilon$ ).

Тогда для любой функции  $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $u = u(\zeta)$ , кусочно-непрерывной с точками разрыва первого рода, в любой точке ее непрерывности  $\zeta_0$  существует предел

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) U(z, \zeta) dt = u(\zeta_0).$$





6. Пусть  $f$  — функция, аналитическая в круге  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$ . Доказать, что при  $0 < r < R$

$$f'(a) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} P(\theta) e^{-i\theta} d\theta,$$

где  $P(\theta) = \operatorname{Re} f(a + re^{i\theta})$ .

◀ По теореме Коши

$$0 = \int_{\partial K_R} f(z) dz = ir \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta,$$

откуда

$$0 = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \overline{f(a + re^{i\theta})} e^{-i\theta} d\theta.$$

С другой стороны, по формуле производной от интеграла Коши, получаем:

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) e^{-i\theta} d\theta.$$

Из последних двух формул имеем

$$f'(a) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} P(\theta) e^{-i\theta} d\theta.$$

Аналогично

$$f'(a) = \frac{i}{\pi r} \int_0^{2\pi} Q(\theta) e^{-i\theta} d\theta, \quad Q(\theta) = \operatorname{Im} f(a + re^{i\theta}). \quad \blacktriangleright$$

7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}}), \quad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| = 1\}.$$

◀ Согласно формуле (2), п. 6.1, находим:

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \cos z \Big|_{z=i} = -\pi i \cos i = -\pi i \operatorname{ch} 1. \quad \blacktriangleright$$

8. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin n\varphi}{1 - 2a \sin \varphi + a^2} d\varphi, \quad -1 < a < 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

◀ Воспользуемся формулой Пуассона. Получим:

$$I = \frac{2\pi}{1-a^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-a^2) \sin n\varphi}{1 - 2a \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) + a^2} d\varphi = \frac{2\pi}{1-a^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Re}(-ie^{in\varphi})(1-a^2)}{1 - 2a \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) + a^2} d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{1-a^2} \operatorname{Re} \left( -i a^n e^{i n \frac{\pi}{2}} \right) = \frac{2\pi a^n}{1-a^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k \\ \frac{2\pi}{1-a^2} (-1)^k a^{2k+1}, & \text{если } n = 2k+1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}). \blacktriangleright$$

9. Вычислить интеграл  $\int_{\Gamma} |z| \bar{z} dz$ , где  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}})$  — кусочно-гладкая, положительно ориентированная кривая,  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ ,  $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z = 0\}$ ,  $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ .

◀ Кривая  $\gamma$  замкнута, а положительная ориентация кривой  $\Gamma$  означает, что при возрастании параметра (на отрезке  $\gamma_1$  это  $x$ , а на верхней полуокружности  $\gamma_2$  это  $t$ ) подвижная точка пробегает кривую  $\gamma$  в направлении, противоположном ходу часовой стрелки. На отрезке  $\gamma_1$   $|z|\bar{z} = |x|x$ , а на полуокружности  $\gamma_2$   $z = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ . Следовательно,

$$\int_{\Gamma} |z| \bar{z} dz = \int_{-1}^1 |x|x dx + i \int_0^{\pi} e^{it} e^{-it} dt = i\pi. \blacktriangleright$$

10. Вычислить интеграл  $\int_{\Gamma} \frac{z}{\bar{z}} dz$ , где  $\Gamma$  — ориентированная граница полукольца, изображенного на рис. 78.

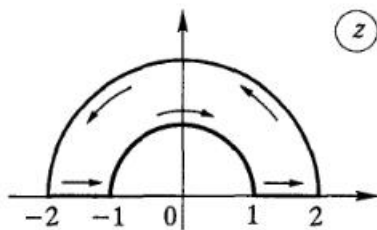


Рис. 78

◀ При интегрировании по замкнутой кривой выбор начальной точки не играет роли. Пусть это будет точка  $z = -2$ . Получим, принимая во внимание, что на действительной оси  $z = \bar{z} = x$ , на нижней полуокружности  $z = e^{it}$ , на верхней —  $z = 2e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ :

$$\int_{\Gamma} \frac{z}{\bar{z}} dz = \int_{-2}^{-1} dx + \int_{\pi}^0 i e^{i3t} dt + \int_1^2 dx + \int_0^{\pi} i 2e^{i3t} dt = 1 + \frac{1}{3} e^{i3t} \Big|_{t=\pi}^{t=0} + 1 + \frac{2}{3} e^{i3t} \Big|_{t=0}^{t=\pi} = 2 + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}. \blacktriangleright$$

11. Вычислить интеграл  $\int_{\Gamma} (z-a)^n dz$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}})$ :

1) по полуокружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = R, 0 \leq \arg(z-a) \leq \pi\}$  (начало пути в точке  $z = a+R$ );

2) по окружности  $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = R\}$ ;

3) по периметру квадрата с центром в точке  $a$  и сторонами, параллельными осям координат.

◀ 1) Выбор начальной точки кривой  $\gamma$  определяет ее ориентацию, следовательно, кривая  $L$  ориентирована в направлении, противоположном направлению хода часовой стрелки. В интеграле произведем замену переменной, полагая  $z-a = Re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ . Пусть  $n \neq -1$ . Тогда

$$\int_L (z-a)^n dz = iR^{n+1} \int_0^{\pi} e^{i(n+1)t} dt = \frac{R^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t} \Big|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{R^{n+1}}{n+1} ((-1)^{n+1} - 1).$$

Если  $n = -1$ , то

$$\int_L \frac{dz}{z-a} = \int_0^{\pi} \frac{iR e^{it}}{R e^{it}} dt = i\pi.$$

2) Если  $n \neq -1$ , то подынтегральная функция аналитическая в односвязной области, ограниченной окружностью  $\gamma_R$ , являющейся гладкой кривой. По теореме Коши (см. п. 5.3) имеем

$$\int_L (z-a)^n dz = 0.$$

Если  $n = -1$ , то, произведя ту же замену переменной, что и в предыдущем примере, получим:

$$\int_L \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}} dt = i2\pi.$$

3) Если  $n \neq -1$ , то функция  $z \mapsto (z-a)^n$  аналитическая в односвязной области, ограниченной кусочно-гладкой кривой и по теореме Коши

$$\int_L (z-a)^n dz = 0.$$

Пусть  $n = -1$ . Тогда подынтегральная функция не является аналитической в области, ограниченной сторонами квадрата. Из теоремы 4, п. 5.3, следует, что криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кусочно-гладкой кривой не зависит от ее вида. Поэтому вместо границы квадрата возьмем окружность с центром в точке  $a$  и радиуса, большего половины длины диагонали квадрата. Задались к случаю, рассмотренному в 2). Поэтому

$$\int_L \frac{dz}{z-a} = i2\pi. \blacktriangleright$$

**12.** Вычислить интеграл  $I = \int_{\Gamma} \operatorname{Ln} z dz$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}})$ , где:

- 1)  $\gamma$  — единичная окружность и  $\operatorname{Ln} 1 = 0$ ;
- 2)  $\gamma$  — единичная окружность и  $\operatorname{Ln} i = \frac{\pi i}{2}$ ;
- 3)  $\gamma$  — окружность:  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$  и  $\operatorname{Ln} R = \ln R$ ;
- 4)  $\gamma$  — окружность:  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$  и  $\operatorname{Ln} R = \ln R + 2\pi i$ .

◀ Мнозначная функция  $w = \operatorname{Ln} z$  имеет следующие однозначные ветви:

$$w_k = \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При интегрировании следует выбирать соответствующие ветви, определяемые дополнительными условиями. В каждом из случаев 1)–4) окружности положительно ориентированы и ориентация их соответствует возрастанию параметра. В случаях 1) и 2) параметрические представления окружностей имеют вид соответственно  $z = \varphi(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $z = \psi(t) = e^{it}$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{5}{2}\pi$ , а в случаях 3) и 4) —  $z = \varphi(t) = Re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $z = \psi(t) = Re^{it}$ ,  $2\pi \leq t \leq 4\pi$ . Произведя в каждом из рассматриваемых интегралов замену переменной, получим:

- 1) 
$$I = - \int_0^{2\pi} te^{it} dt = - \left( \frac{te^{it}}{i} \Big|_{t=0}^{t=2\pi} - \int_0^{2\pi} e^{it} dt \right) = - \frac{2\pi}{i} + \frac{e^{it}}{i} \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = - \frac{2\pi}{i} = i2\pi;$$
- 2) 
$$I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} te^{it} dt = - \left( \frac{te^{it}}{i} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{5}{2}\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} e^{it} dt \right) = - \left( \frac{5}{2}\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{e^{it}}{i} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{5}{2}\pi} \right) = -2\pi;$$
- 3) 
$$I = Ri \int_0^{2\pi} (\ln R + it) e^{it} dt = -R \int_0^{2\pi} te^{it} dt = i2\pi R;$$
- 4) 
$$I = Ri \int_{2\pi}^{4\pi} (\ln R + it) e^{it} dt = -R \left( \frac{te^{it}}{i} - \int_{2\pi}^{4\pi} e^{it} dt \right) = iRte^{it} \Big|_{t=2\pi}^{t=4\pi} = i2\pi R. \blacktriangleright$$

13. Вычислить интеграл  $I = \int_{\Gamma} z^n \operatorname{Ln} z \, dz$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}})$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , где:

1)  $\operatorname{Ln} 1 = 0$ ; 2)  $\operatorname{Ln}(-1) = \pi i$ .

◀ Рассуждая аналогично (см. предыдущий пример), получим:

1) Пусть  $n \neq -1$ . Тогда

$$I = - \int_0^{2\pi} t e^{i(n+1)t} dt = - \left( \frac{t e^{i(n+1)t}}{(n+1)i} \Big|_{t=0}^{t=2\pi} - \frac{1}{(n+1)i} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \right) = i \frac{t e^{i(n+1)t}}{(n+1)} \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{2\pi i}{n+1}.$$

Пусть  $n = -1$ . Тогда получим:

$$I = - \int_0^{2\pi} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_{t=2\pi}^{t=0} = -2\pi^2.$$

2) Пусть  $n \neq -1$ . Имеем

$$I = - \int_{\pi}^{3\pi} t e^{i(n+1)t} dt = \frac{i}{n+1} t e^{i(n+1)t} \Big|_{t=\pi}^{t=3\pi} = \frac{i}{n+1} (3\pi e^{i(n+1)3\pi} - \pi e^{i(n+1)\pi}) = \frac{2\pi i}{n+1} (-1)^{n+1}.$$

Если  $n = -1$ , то

$$I = - \int_{\pi}^{3\pi} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_{t=3\pi}^{t=\pi} = -4\pi^2. \blacktriangleright$$

14. Показать, что если путь интегрирования не проходит через начало координат, то

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln r + i\varphi + 2\pi i k,$$

где  $k$  — целое число, указывающее, сколько раз путь интегрирования обходит начало координат ( $z = r e^{i\varphi}$ ).

◀ Пусть путь интегрирования не проходит через начало координат. Согласно теореме 3, п. 5.3, интеграл от аналитической функции  $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$  в односвязной области, не содержащей начала координат, не зависит от выбора пути, соединяющего точки  $\zeta = 1$  и  $\zeta = z = r e^{i\varphi}$ . Пусть  $\Gamma_1$  — ориентированный отрезок  $[1, r]$  с параметрическим представлением  $z = \varphi_1(x) = x$ ,  $\Gamma_2$  — положительно ориентированная дуга окружности  $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$  с параметрическим представлением  $\varphi_2(t) = r e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \varphi$ . Тогда упорядоченный набор  $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$  является кусочно-гладкой положительно ориентированной кривой с началом в точке  $\zeta = 1$  и концом в точке  $\zeta = z = r e^{i\varphi}$ . Интегрируя по кривой  $\Gamma$ , получим

$$\int_L \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^r \frac{dx}{x} + \int_0^{\varphi} \frac{i r e^{it}}{e^{it}} dt = \ln r + i\varphi.$$

Пусть  $\Gamma_3$  — гладкая или кусочно-гладкая кривая с началом в точке  $z$  и концом в точке  $1$ , охватывающая начало координат (рис. 79). Тогда положительно ориентированная замкнутая кусочно-гладкая кривая  $\tilde{\Gamma} = (\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$  окружает начало координат и в силу однозначности функции  $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$  интеграл  $\int_{\tilde{\Gamma}} \frac{d\zeta}{\zeta}$  не зависит от выбора кривой  $\tilde{\Gamma}$  и его можно заменить, согласно теореме Коши, интегралом по любой замкнутой гладкой или кусочно-гладкой кривой, например, по

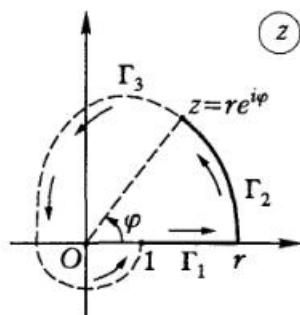


Рис. 79

окружности радиуса 1 с центром в начале координат и направлением обхода против хода часовой стрелки. При этом получим

$$\int_{\tilde{\Gamma}} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i.$$

После такого полного обхода по кривой  $\tilde{\Gamma}$  путь из точки  $\zeta = 1$  в точку  $\zeta = z$  состоит из объединения кривых  $\tilde{\Gamma}$  и  $\Gamma$ , т. е. кривая  $\Gamma$  будет пройдена два раза, и при этом имеем

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i + \ln r + i\varphi.$$

Теперь становится ясным, что при обходе начала координат  $k$  раз получим равенство

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln r + i\varphi + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть  $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\Gamma_+} \frac{d\zeta}{\zeta}$ . Тогда  $\int_{\Gamma_+} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\Gamma_-} \frac{d\zeta}{\zeta} = -2\pi i$ , откуда

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\Gamma_+} \frac{d\zeta}{\zeta} = - \int_{\Gamma_-} \frac{d\zeta}{\zeta} - 2\pi i = \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} - 2\pi i = \ln r + i\varphi - 2\pi i.$$

При обходе начала координат  $k$  раз в направлении хода часовой стрелки получим

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln r + i\varphi - 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Объединив полученные результаты, имеем

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln r + i\varphi + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}. \blacktriangleright$$

**15.** Показать, что если путь не проходит через точки  $\pm i$ , то

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

где  $k$  — целое число.

◀ Поскольку  $\frac{1}{1+\zeta^2} = \frac{i}{2(\zeta+i)} - \frac{i}{2(\zeta-i)}$ , то

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{i}{2} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta+i} - \frac{i}{2} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta-i}.$$

Если путь интегрирования не охватывает точки  $\pm i$ , то интеграл не зависит от его выбора и можно интегрировать, например, по отрезку  $[0, 1]$ . Тогда получим:

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}.$$

Пусть кривая, по которой проводится интегрирование, охватывает точку  $i$  и состоит из замкнутой кривой и отрезка  $[0, 1]$ , ориентированных в положительном направлении (рис. 80, а). Вместо произвольной гладкой или кусочно-гладкой ориентированной кривой можно, согласно теореме Коши, взять положительно ориентированную единичную окружность с центром в точке  $i$  (рис. 80, б). Пусть  $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$  — положительно ориентированный путь, состоящий из упомянутой ориентированной единичной окружности и отрезка  $[0, 1]$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} &= \int_0^1 \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \\ &= \frac{i}{2} \int_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta+i} - \frac{i}{2} \int_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta-i} + \int_{\Gamma_2} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \\ &= -\frac{i}{2} \int_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta-i} + \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \pi + \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

поскольку

$$\int_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta+i} = 0,$$

как интеграл от аналитической функции по замкнутой гладкой кривой, а

$$-\frac{i}{2} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta-i} = -\frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = \pi, \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Пусть  $\Gamma^{(1)} = (\Gamma, \Gamma_2^-)$ ,  $\Gamma^{(2)} = (\Gamma^{(1)}, \Gamma)$ . Тогда

$$\int_{\Gamma^{(1)}} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \pi, \quad \int_{\Gamma^{(2)}} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{\pi}{4} + 2\pi.$$

Интегрирование по  $\Gamma^{(2)}$  соответствует полному обходу точки  $i$  в положительном направлении два раза и одному интегрированию по отрезку  $[0, 1]$ . Полагая  $\Gamma^{(3)} = (\Gamma^{(2)}, \Gamma_2^-)$ ,  $\Gamma^{(4)} = (\Gamma^{(3)}, \Gamma)$ , находим:

$$\int_{\Gamma^{(3)}} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = 2\pi, \quad \int_{\Gamma^{(4)}} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{\pi}{4} + 3\pi.$$

Продолжая этот процесс, после  $k$  полных обходов точки  $i$ , получим:

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Если  $k$  полных обходов точки  $i$  совершаются в направлении хода часовой стрелки, то

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{\pi}{4} - k\pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Оба случая объединяются в один:

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Аналогичный результат получим в случае, когда замкнутая кривая окружает точку  $-i$ . ►

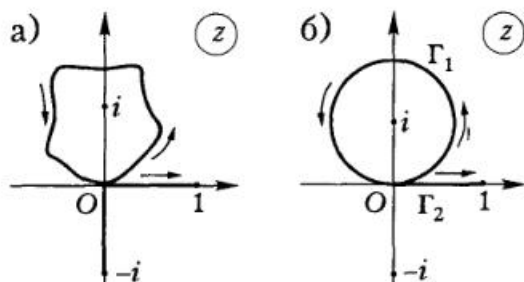


Рис. 80



**16.** Показать, что если  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$  — произвольный простой замкнутый контур, не проходящий через точку  $a$ , и  $n$  — целое число, то

$$\int_{\Gamma} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{если } n = -1, a \text{ — внутри } \gamma, \\ 0, & \text{если } n = -1, a \text{ — вне } \gamma. \end{cases}$$

◀ Если  $n \neq -1$ , то по теореме Коши заменяем кривую  $\gamma$  произвольной окружностью  $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$ , содержащуюся во внутренности или во внешности кривой  $\gamma$ . Тогда получим, полагая  $z-a = re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ :

$$\int_{\Gamma} (z-a)^n dz = i \int_0^{2\pi} r^{n+1} e^{i(n+1)t} dt = r^{n+1} \left. \frac{e^{i(n+1)t}}{n+1} \right|_{t=0}^{t=2\pi} = 0.$$

Пусть  $n = -1$ ,  $a$  — вне  $\gamma$ . Тогда функция  $z \mapsto (z-a)^{-1}$  является аналитической и по теореме Коши

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = 0.$$

Если  $n = -1$ ,  $a$  — внутри  $\gamma$ , то, заменив кривую  $\gamma$  окружностью  $\gamma_r$  с центром в точке  $a$ , принадлежащую внутренности  $\gamma$ , получим

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i. \blacktriangleright$$

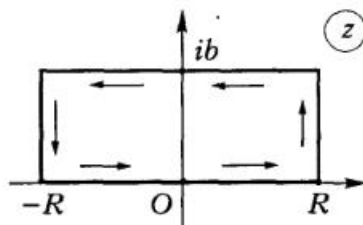


Рис. 81

**17.** Доказать, что  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}.$

◀ Пусть  $L$  — положительно ориентированная кусочно-гладкая кривая, состоящая из отрезков, параллельных осям координат (рис. 81). Функция  $z \mapsto e^{-z^2}$  аналитическая в области  $D$ , ограниченной этой кривой и непрерывна в замыкании  $\bar{D}$ . По теореме Коши имеем

$$\int_L e^{-z^2} dz = 0.$$

Воспользуемся свойством аддитивности криволинейного интеграла второго рода:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_L e^{-z^2} dz = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + i \int_0^b e^{-(R+iy)^2} dy + \int_R^{-R} e^{-(x+ib)^2} dx + i \int_b^0 e^{-(-R+iy)^2} dy = \\ &= \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + i \int_0^b \left( e^{-(R+iy)^2} - e^{-(-R+iy)^2} \right) dy - \int_{-R}^R e^{-(x+ib)^2} dx = \\ &= \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + i \int_0^b e^{-R^2+y^2} (e^{-2iRy} - e^{2iRy}) dy - \int_{-R}^R e^{b^2-x^2} e^{-i2bx} dx = \\ &= \int_{-R}^R e^{-x^2} dx - 2i \int_0^b e^{-R^2+y^2} \sin 2Ry \, dy - \int_{-R}^R e^{b^2-x^2} e^{-i2bx} dx. \quad (1) \end{aligned}$$

Пусть

$$I = \int_{-R}^R e^{b^2 - x^2} e^{-i2bx} dx = \int_{-R}^0 e^{b^2 - x^2} e^{-i2bx} dx + \int_0^R e^{b^2 - x^2} e^{-i2bx} dx.$$

После замены  $x = -t$  в первом интеграле, получим

$$I = 2e^{b^2} \int_0^R e^{-x^2} \cos 2bx dx, \quad \int_{-R}^R e^{-x^2} dx - 2i \int_0^b e^{-R^2+y^2} \sin 2Ry dy - 2e^{b^2} \int_0^R e^{-x^2} \cos 2bx dx = 0.$$

Интеграл

$$\int_0^b e^{-R^2+y^2} \sin 2Ry dy \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow +\infty, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

(это известный интеграл Эйлера—Пуассона),

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-x^2} \cos 2bx dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx.$$

Таким образом, перейдя к пределу в (1) при  $R \rightarrow +\infty$ , получим:

$$\sqrt{\pi} - 2e^{b^2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = 0$$

откуда

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}. \blacktriangleright$$

**18.** Вычислить интеграл  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2+9}$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}})$ ,  $\gamma$  — замкнутая гладкая или кусочно-гладкая

кривая, если:

- 1) точка  $3i$  лежит внутри кривой  $\gamma$ , а точка  $-3i$  вне ее;
- 2) точка  $-3i$  лежит внутри кривой  $\gamma$ , а точка  $3i$  вне ее;
- 3) точки  $\pm 3i$  принадлежат внутренности кривой  $\gamma$ .

◀ Поскольку  $\frac{1}{z^2+9} = \frac{i}{6} \left( \frac{1}{z+3i} - \frac{1}{z-3i} \right)$ , то

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2+9} = \frac{i}{6} \left( \int_{\Gamma} \frac{dz}{z+3i} - \int_{\Gamma} \frac{dz}{z-3i} \right).$$

- 1) Так как точка  $-3i$  принадлежит внешности кривой  $\gamma$ , то по теореме Коши

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z+3i} = 0.$$

В интеграле

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-3i}$$

вместо кривой  $\gamma$  можно взять окружность  $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3i| = r\}$ , принадлежащую внутренней  $\gamma$ . Тогда получим, после замены  $z - 3i = re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ :

$$-\frac{i}{6} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - 3i} = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it}} dt = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}, \quad \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 9} = \frac{\pi}{3}.$$

2) По аналогии с предыдущим, имеем

$$\frac{i}{6} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z + 3i} = -\frac{\pi}{3}, \quad \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 9} = -\frac{\pi}{3}.$$

3) Применим теорему 4, п. 5.3, к интегралу по положительно ориентированной полной границе области, состоящей из контуров  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  (см. рис. 82). Получим, принимая во внимание случаи 1) и 2):

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 9} = \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z^2 + 9} + \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{z^2 + 9} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0. \blacktriangleright$$

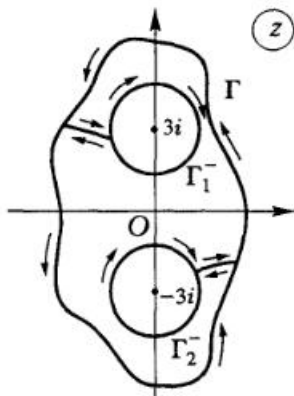


Рис. 82

**19.** Вычислить интеграл  $\int_{\Gamma} \frac{z dz}{z^4 - 1}$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = a\}$ ,  $(a > 1)$ .

◀ Функция  $z \mapsto z^4 + 1$  имеет нули в точках  $z_k = \sqrt[4]{-1} = e^{i\frac{k\pi}{2}}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . Кривая  $\gamma$  окружает лишь точку  $z_0 = 1$ . Записав подынтегральное выражение в виде

$$\frac{z}{z^4 - 1} = \frac{A}{z - 1} + \frac{Bz^2 + Cz + D}{(z + 1)(z^2 + 1)}$$

легко найдем  $A$ :

$$A = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{(z + 1)(z^2 + 1)} = \frac{1}{4}.$$

В силу свойства аддитивности интеграла, имеем

$$\int_{\Gamma} \frac{z dz}{z^4 - 1} = \frac{1}{4} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - 1} + \int_{\Gamma} \frac{Bz^2 + Cz + D}{(z + 1)(z^2 + 1)} dz = \frac{1}{4} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z + 1},$$

так как по теореме Коши

$$\int_{\Gamma} \frac{Bz^2 + Cz + D}{(z + 1)(z^2 + 1)} dz = 0.$$

Произведя в интеграле замену переменной по формуле  $z - 1 = re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , находим:

$$\int_{\Gamma} \frac{z dz}{z^4 - 1} = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = \frac{2\pi i}{4} = \frac{\pi i}{2}. \blacktriangleright$$

**20.** Вычислить интеграл  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z^2 + a^2}$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}})$ , если замкнутая кусочно-гладкая кривая  $\gamma$  окружает круг  $K_a = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq a\}$ , т. е.  $\bar{K}_a \Subset D$ , где  $D$  — область,  $\partial D = \Gamma$ .

◀ Разлагая функцию  $z \mapsto \frac{1}{z^2 + a^2}$  на простые дроби, получим:

$$\frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{i}{2a(z + ia)} - \frac{i}{2a(z - ia)}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{ie^z}{2a(z + ia)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{ie^z}{2a(z - ia)} dz.$$

Применив интегральную формулу Коши (см. п. 5.4), находим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2 + a^2} dz = \frac{i}{2a} (e^{-ia} - e^{ia}) = \frac{\sin a}{a}. \blacktriangleright$$

**21.** Вычислить интеграл  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{ze^z}{(z-a)^3} dz$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{op})$ , если точка  $a$  принадлежит внутренности кусочно-гладкой замкнутой кривой  $\gamma$ .

◀ Пусть

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{te^t}{t-z} dt.$$

Согласно формуле (2), п. 6.1, имеем

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{te^t}{(t-z)^3} dt,$$

а по интегральной формуле Коши  $f(z) = ze^z$ . Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{ze^z}{(z-a)^3} dz = \left( \frac{1}{2} ze^z \right)' \Big|_{z=a} = e^a \left( 1 + \frac{a}{2} \right). \blacktriangleright$$

**22.** Вычислить интеграл  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{op})$ ,  $\gamma$  — кусочно-гладкая замкнутая кривая, если:

курвая, если:

- 1) точка 0 принадлежит внутренности кривой  $\gamma$ , а точка 1 — ее внешности;
- 2) точка 1 принадлежит внутренности кривой  $\gamma$ , а точка 0 — ее внешности;
- 3) точки 0 и 1 принадлежат внутренности кривой  $\gamma$ .

◀ Записав подынтегральную функцию в виде суммы

$$\frac{e^z}{z} + \frac{e^z(-z^2 + 3z - 3)}{(z-1)^3},$$

получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^z(-z^2 + 3z - 3)}{(z-1)^3} dz = I_1 + I_2.$$

1) По интегральной формуле Коши  $I_1 = e^0 = 1$ . Поскольку подынтегральная функция в интеграле  $I_2$  аналитическая, то  $I_2 = 0$  и, таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(1-z)^3} = 1.$$

2) В рассматриваемом случае  $I_1 = 0$ , поскольку функция  $z \mapsto \frac{e^z}{z}$  аналитическая. Пусть

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(-t^2 + 3t - 3)e^t}{t-z} dt.$$

Применив формулу (2), п. 6.1, получим:

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(-t^2 + 3t - 3)e^t dt}{(t - z)^3}.$$

Поскольку  $f(z) = (-z^2 + 3z - 3)e^z$ , то

$$I_2 = \frac{((-z^2 + 3z - 3)e^z)''}{2} \Big|_{z=1} = \frac{e^z}{2} (-z^2 - z + 1) \Big|_{z=1} = -\frac{e}{2}.$$

3) Рассуждая так же, как и при решении примера 18, 3), и принимая во внимание результаты, полученные при решении задач в случаях 1) и 2), можем сразу записать:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = 1 - \frac{e}{2}. \blacktriangleright$$

**23.** Функция  $f$  — аналитическая в области, ограниченной простым замкнутым контуром  $\gamma$ , окружающим начало координат. Доказать, что при любом выборе ветви  $\operatorname{Ln} z$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f'(z) \operatorname{Ln} z dz = f(z_0) - f(0), \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}}),$$

где  $z_0$  — начальная точка интегрирования.

◀ Интегрируя по частям, получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f'(z) \operatorname{Ln} z dz = \frac{1}{2\pi i} f(z) \operatorname{Ln} z \Big|_{\Gamma} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z} dz.$$

Поскольку  $\operatorname{Ln} z \Big|_{\Gamma} = 2\pi i$ , то  $\frac{1}{2\pi i} f(z) \operatorname{Ln} z \Big|_{\Gamma} = f(z_0)$ . По интегральной формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z} dz = f(0).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f'(z) \operatorname{Ln} z dz = f(z_0) - f(0). \blacktriangleright$$

**24.** Вычислить интеграл  $I = \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , в зависимости от того, будет ли 1)  $|a| < |b| < 1$ ; 2)  $|a| < 1 < |b|$ ; 3)  $1 < |a| < |b|$ .

◀ 1) Точки  $a$  и  $b$  принадлежат внутренности окружности  $\gamma$ , в силу чего можно применить теорему 4, п. 5.3:

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n} = \int_{\Gamma_a} \frac{(z-b)^{-n}}{(z-a)^n} dz + \int_{\Gamma_b} \frac{(z-a)^{-n}}{(z-b)^n} dz,$$

где, например,  $\Gamma_a$  и  $\Gamma_b$  — положительно ориентированные окружности с центрами в точках  $a$  и  $b$  достаточно малых радиусов. Применив формулу (2), п. 6.1, получим:

$$\int_{\Gamma_a} \frac{(z-b)^{-n}}{(z-a)^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-b)^{-n}) \Big|_{z=a} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{(a-b)^{2n-1}}, \quad (1)$$

$$\int_{\Gamma_b} \frac{(z-a)^{-n}}{(z-b)^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{(b-a)^{2n-1}} \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что в этом случае  $I = 0$ .

2) Пусть  $|a| < 1 < |b|$ , т. е. внутренности кривой  $\gamma$  принадлежит лишь точка  $a$ . Тогда

$$\int_{\Gamma_b} \frac{(z-a)^{-n}}{(z-b)^n} dz = 0, \quad I = \int_{\Gamma_a} \frac{(z-b)^{-n}}{(z-a)^n} dz = (-1)^{n-1} \frac{2\pi i (2n-2)!}{((n-1)!)^2 (a-b)^{2n-1}}.$$

3) При  $1 < |a| < |b|$  подынтегральная функция является аналитической в замыкании  $\overline{K}$ , где  $\overline{K} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ . Тогда по интегральной теореме Коши  $I = 0$ . ►

**25.** Согласно теореме Лиувилля, функция  $f$ , аналитическая и ограниченная во всей плоскости, является постоянной. Доказать эту теорему, вычислив интеграл  $\int_{\Gamma_R} \frac{f(z) dz}{(z-a)(z-b)}$ ,  $\Gamma_R = (\gamma_R, \gamma_R^{\text{op}})$ , где  $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$  ( $|a| < R, |b| < R$ ) и произведя его оценку при  $R \rightarrow \infty$ .

► Пусть  $\Gamma_a$  и  $\Gamma_b$  — положительно ориентированные окружности с центрами в точках  $a$  и  $b$  достаточно малых радиусов. Применив интегральную формулу Коши (см. п. 5.4), получим:

$$\int_{\Gamma_R} \frac{f(z) dz}{(z-a)(z-b)} = \int_{\Gamma_a} \frac{\frac{f(z)}{z-b}}{z-a} dz + \int_{\Gamma_b} \frac{\frac{f(z)}{z-a}}{z-b} dz = 2\pi i \left( \frac{f(a)}{a-b} + \frac{f(b)}{b-a} \right) = 2\pi i \left( \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right).$$

Поскольку справедлива оценка

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{f(z) dz}{(z-a)(z-b)} \right| \leq \frac{\max_{|z|=R} |f(z)|}{(R-|a|)(R-|b|)} \cdot 2\pi R,$$

где  $\max_{|z|=R} |f(z)| \leq M$ ,  $M = \text{const}$ , то

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{f(z) dz}{(z-a)(z-b)} = 0 = 2\pi i \left( \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right),$$

откуда  $\forall (a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}) \quad f(a) = f(b)$ , т. е.  $\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) \equiv \text{const}$ . ►

### Упражнения для самостоятельной работы

1. Вычислить интегралы:

a)  $\int_{\Gamma} |z|^2 dz$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ;

b)  $\int_{\Gamma} \text{Re } z dz$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$ .

2. Вычислить интеграл  $\int_{\Gamma} e^z dz$ , где

a)  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$ ,  $\gamma$  — ломаная, соединяющая точки 0, 1 и  $1+i$ ;

b)  $\gamma$  — ломаная, соединяющая точки 0,  $i$  и  $1+i$ .

3. Вычислить  $\int_{-1}^1 |z| dz$ , если путями интегрирования служат: а) прямолинейный отрезок;

б) верхняя половина единичной окружности; в) нижняя половина единичной окружности.

4. Вычислить интегралы вдоль отрезка  $\Gamma$  прямой с началом в точке  $z_1 = 0$  и концом  $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  от следующих функций: а)  $z \mapsto e^{|z|^2} \text{Re } z$ ; б)  $z \mapsto e^{z^2} \text{Re } z$ ; в)  $z \mapsto \frac{|z|}{1+|z|}$ .

5. Вычислить  $\int_{\Gamma} \text{tg } z dz$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$ , где  $\gamma$  — дуга параболы  $y = x^2$ , соединяющая точки  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 1+i$ .

6. Вычислить  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{4z^2+4z+3}}$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ,  $\sqrt{4z^2+4z+3}|_{z=1} > 0$ .

7. Пусть функция  $f$  непрерывна при  $|z - z_0| > r_0$  и  $r \cdot \max_{|z - z_0| = r} |f(z)| \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +\infty$ .

Доказать, что  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ .

8. Пусть функция  $f$  непрерывна при  $0 < |z - z_0| < R$  и  $r \cdot \max_{|z - z_0| = r} |f(z)| \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ .

Доказать, что  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ .

9. Пусть функция  $f$  непрерывна на окружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Доказать равенство

$$\int_{\Gamma} \overline{f(z)} dz = - \int_{\Gamma} \frac{\overline{f(z)}}{z^2} dz, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}})$$

10. Пусть  $a \in \mathbb{C}$ , а функция  $f$  — аналитическая в круге  $\overline{K} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ . Доказать, что

$$\int_{\partial K} \frac{\overline{f(z)}}{z - a} dz = \begin{cases} 2\pi i \overline{f(0)}, & \text{если } |a| < 1, \\ 2\pi i \left( \overline{f(0)} - \overline{f\left(\frac{1}{a}\right)} \right), & \text{если } |a| > 1. \end{cases}$$

11. Путем вычисления интеграла  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-a)(z-\frac{1}{a})}$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ,

доказать, что при  $0 < a < 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+a^2-2a \cos t} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

12. Вычислить интеграл  $\int_{\Gamma} \frac{\sin z \cdot \sin(z-1)}{z^2 - z} dz$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ .

13. Пусть  $R(z)$  — правильная рациональная дробь,  $\gamma$  — кусочно-гладкая замкнутая кривая, охватывающая все нули этой дроби, а точка  $z$  лежит во внешности  $\gamma$ . Доказать формулу

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R(z)}{z - \zeta} dz = R(\zeta), \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}}).$$

14. Пусть функция  $f$  — аналитическая в некоторой области  $D$  с жордановой границей  $\partial D$ , непрерывна в замыкании  $\overline{D}$  и постоянна на  $\partial D$ . Доказать, что она постоянна и в  $D$ .

15. Найти интегралы типа Коши:

а)  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$ ;

б)  $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta(2\zeta^2 + 5\zeta + 2)(\zeta - z)}$ ,  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ и } |z + \frac{2}{3}| > \frac{1}{3}\}$ .

16. Пусть функция  $f$  — аналитическая в круге  $K_{R_1} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R_1\}$  и  $|a| < R < R_1$ . Доказать, что

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{R^2 - a\bar{a}}{(z-a)(R^2 - z\bar{a})} f(z) dz, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}}), \quad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}.$$

Вывести отсюда формулу Пуассона

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)f(Re^{i\varphi})d\varphi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} \quad (0 < r < R).$$

17. Пусть функция  $f$  — аналитическая в круге  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$ . Доказать формулу

$$f'(a) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(a + re^{i\theta}) e^{-i\theta} d\theta.$$

18. Доказать, что

$$\int_{\Gamma} \operatorname{ch} z \operatorname{ctg} z dz = 2\pi i \frac{\operatorname{sh}\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}}), \quad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\}.$$



## Ряды аналитических функций. Изолированные особые точки

В этой главе изучаются равномерно сходящиеся ряды, членами которых являются аналитические функции. Основное внимание уделяется разложению аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана, а также классификации изолированных особых точек аналитических функций, основанной на разложении их в ряд Лорана.

### § 1. Ряд Тейлора

#### 1.1. Общие сведения о рядах.

*Числовой (функциональный) ряд* можно интуитивно понимать как последовательность  $(z_n)$  комплексных чисел (последовательность  $(f_n)$  функций), которые строятся по определенному закону и последовательно складываются. В соответствии с этим числовой (функциональный) ряд записывают в виде

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad \left( f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right), \quad (1)$$

где  $z_n$  ( $f_n$ ) называют *общим членом ряда*, а число (функцию)

$$S_n = \sum_{k=1}^n z_k \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left( z \mapsto S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z) \quad \forall n \in \mathbb{N} \right) \quad (2)$$

— его *частичной суммой*. Предел последовательности  $(S_n)$  частичных сумм ряда, если он существует, называется *суммой ряда* и обозначается тем же символом  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$   $\left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right)$ , что и ряд (1).

Обозначения ряда и его суммы различают по смыслу текста, в котором они встречаются. В частном случае, когда члены ряда — действительные числа, его суммой могут быть символы  $+\infty$  и  $-\infty$ . Однако, числовой ряд называется *сходящимся*, если у него существует сумма и она конечная, т. е. является действительным или комплексным числом. В остальных случаях, когда сумма числового ряда не существует или является бесконечной, ряд называется *расходящимся*.

Для функциональных рядов рассматриваются понятия поточечной и равномерной сходимости, о чем речь пойдет позже.

В некоторых книгах по математическому анализу появилось формальное определение ряда как пары последовательностей

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \stackrel{\text{def}}{=} \left( (z_n)_{n \in \mathbb{N}}, \left( \sum_{k=1}^n z_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \right) \quad \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \stackrel{\text{def}}{=} \left( (f_n(z))_{n \in \mathbb{N}}, \left( \sum_{k=1}^n f_k(z) \right)_{n \in \mathbb{N}} \right) \right), \quad (3)$$

но для ряда и его суммы сохраняется одно и то же обозначение.

Определение ряда равенством (3) не является единственно возможным.

В настоящей книге ряд будем обозначать специальным символом  $\sum z_n$  ( $\sum f_n$ ) и определять не как пару двух последовательностей, а как последовательность чисел (функций) вида (2):

$$\sum z_n \stackrel{\text{def}}{=} \left( \sum_{k=1}^n z_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \left( \sum f_n \stackrel{\text{def}}{=} \left( \sum_{k=1}^n f_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \right). \quad (4)$$

Для суммы ряда, когда она существует, сохранено прежнее обозначение

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k \quad \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(z) \right). \quad (5)$$

Таким образом, символы  $\sum z_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  имеют различный смысл. Первый из них обозначает ряд, а второй — сумму ряда, когда она существует. Здесь проводится аналогия с обозначениями функции  $f$  и ее значения  $f(z)$ .

**Теорема 1** (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд сходится, то последовательность его членов стремится к нулю.

◀ Пусть ряд  $\sum z_n$  ( $\sum f_n$ ) сходится,  $S$  — его сумма ( $S(z)$  — его сумма в точке  $z \in D_S$ ),  $(S_n)$  ( $(S_n(z))$ ) — последовательность его частичных сумм. Тогда

$$z_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0 \quad (f_n(z) = S_n(z) - S_{n-1}(z) \rightarrow S(z) - S(z) = 0). \quad \blacktriangleright$$

**Теорема 2** (критерий Коши). Ряд  $\sum z_n$  ( $\sum f_n$ ) сходится (сходится в точке  $z \in D_{f_n}$ ) тогда и только тогда, когда

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbb{N}) : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| < \varepsilon \quad \left( \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon \right). \quad (6)$$

◀ Условие теоремы означает, что последовательность  $(S_n)$  ( $(S_n(z))$ ) частичных сумм ряда фундаментальна. Поэтому утверждение следует из критерия Коши для числовой последовательности. ▶

Если числовой ряд сходится абсолютно, т. е. сходится ряд  $\sum |z_n|$ , то его сумму будем обозначать символом  $\sum_{n \in \mathbb{N}} z_n$ , подчеркивая этим, что любая перестановка ряда имеет ту же сумму, что и сам ряд. Этим свойством не обладают условно сходящиеся ряды.

Поскольку последовательность комплексных чисел может рассматриваться как ряд, то они являются различными названиями для одного и того же объекта — отображения множества  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{C}$ . Поэтому с рядами можно производить те же операции, что и с последовательностями.

## 1.2. Последовательность функций и функциональный ряд. Поточечная сходимость.

**Определение 1.** Отображение  $\Phi$  множества  $\mathbb{N}$  в множество всех функций называется функциональной последовательностью. Значение отображения  $\Phi(n) = f_n$  называется ее  $n$ -ым членом.

Для последовательности функций примем обозначение  $(f_n)$ .

**Определение 2.** Пусть  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  и  $\forall n \in \mathbb{N} D_{f_n} = D_f = Z$ . Последовательность  $(f_n)$  называется поточечно сходящейся к функции  $f$ , если  $\forall z \in Z f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ .

Если последовательность  $(f_n)$  поточечно сходится к функции  $f$ , то пишем  $f_n \rightarrow f$ . В случае, когда важен сам факт поточечной сходимости и не играет роли функция  $f$ , будем писать  $f_n \rightarrow$ .

**Определение 3.** Пусть  $(f_n)$  — последовательность функций  $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D_{f_n} = Z$ . Функциональная последовательность  $(S_n)$ , где  $S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z) \quad \forall z \in Z$ , называется функциональным рядом и обозначается символом  $\sum f_n$ . Функция  $S_n$  называется  $n$ -частичной суммой ряда  $\sum f_n$ , а  $f_n$  — его  $n$ -членом.

**Определение 4.** Поточечной суммой ряда  $\sum f_n$  на множестве  $Z$  называется поточечный предел его частичных сумм, если он существует. Ряд называется поточечно сходящимся, если его поточечная сумма существует и является конечной.

Поточечная сумма ряда  $\sum f_n$  обозначается символом  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ . Таким образом,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)(z) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(z) \quad \forall z \in Z.$$

Пусть  $D_{S_n} = Z \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Тогда последовательность функций  $(S_n)$  можно рассматривать как ряд  $\sum (S_n - S_{n-1})$ , где  $S_0(z) = 0 \quad \forall z \in Z$ . Следовательно, функциональные ряды, подобно числовым, представляют собой особую форму изучения последовательностей функций.

### 1.3. Равномерная норма функции.

#### Равномерная сходимость последовательности функций и функционального ряда.

Введем в рассмотрение равномерную норму функции, обобщающую модуль числа и совпадающую с ним, когда функция постоянная. Это новое понятие используем при построении равномерного предела функциональной последовательности.

**Определение 1.** Число

$$\sup_{z \in D_f} |f(z)|, \quad (1)$$

конечное или бесконечное, называется равномерной нормой функции  $f$  и обозначается  $\|f\|$ .

Отметим основные свойства равномерной нормы функции.

**Теорема 1.** Для любых функций  $f: C \rightarrow C$ ,  $g: C \rightarrow C$  и  $\forall \lambda \in C$  справедливы соотношения:

$$1) \|f\| = 0 \Rightarrow f = 0;$$

$$2) \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|;$$

$$3) \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \text{ если } D_f \cap D_g \neq \emptyset.$$

$$\triangleleft 1) \|f\| = 0 \Rightarrow \sup_{z \in D_f} |f(z)| = 0 \Rightarrow |f(z)| = 0 \quad \forall z \in D_f \Rightarrow f(z) = 0 \quad \forall z \in D_f \Rightarrow f = 0;$$

$$2) \|\lambda f\| = \sup_{z \in D_f} |\lambda f(z)| = \sup_{z \in D_f} |\lambda| |f(z)| = |\lambda| \sup_{z \in D_f} |f(z)| = |\lambda| \|f\|.$$

$$3) \text{ Пусть } z \in D_f \cap D_g \neq \emptyset. \text{ Тогда}$$

$$|f(z) + g(z)| \leq |f(z)| + |g(z)| \leq \sup_{t \in D_f} |f(t)| + \sup_{\tau \in D_g} |g(\tau)| = \|f\| + \|g\|.$$

Согласно определению точной верхней грани имеем

$$\sup_{z \in D_f + g} |f(z) + g(z)| \leq \|f\| + \|g\|, \quad \text{т.е.} \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|. \quad \blacktriangleright$$

**Теорема 2.** Функция  $f: C \rightarrow C$  ограничена тогда и только тогда, когда  $\|f\| < +\infty$ .

$\triangleleft$  Действительно,

$$\|f\| = \sup_{z \in D_f} |f(z)| < +\infty \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}: \forall z \in D_f \quad |f(z)| \leq M \Leftrightarrow f \text{ — ограниченная.} \quad \blacktriangleright$$

Для модулей чисел  $z \in C$ ,  $w \in C$  справедливо равенство  $|zw| = |z||w|$ . Для равномерных норм такого равенства не существует, например, пусть  $f(z) = 1$ , если  $|z| < 1$ ,  $f(z) = 0$ , если  $|z| \geq 1$ , а  $g = 1 - f$ . Тогда  $fg = 0$ ,  $\|fg\| = 0$ ,  $\|f\| = 1$ ,  $\|g\| = 1$ , т.е.  $\|fg\| \neq \|f\| \|g\|$ .

Однако справедливо утверждение.

**Теорема 3.** Пусть  $f: C \rightarrow C$ ,  $g: C \rightarrow C$ . Если  $D_f \cap D_g \neq \emptyset$ , то

$$\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad (2)$$

$\triangleleft$  Пусть  $z \in D_f \cap D_g$ . Тогда  $|f(z)g(z)| = |f(z)||g(z)| \leq \|f\| \|g\|$ . Из определения точной верхней грани следует неравенство

$$\sup_{z \in D_{fg}} |f(z)g(z)| \leq \|f\| \|g\|, \quad \text{т.е.} \quad \|fg\| \leq \|f\| \|g\|. \quad \blacktriangleright$$

**Определение 2.** Пусть  $Z = D_f = D_{f_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Последовательность функций  $(f_n)$  называется равномерно сходящейся к функции  $f$  на множестве  $Z$ , если  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

При этом функцию  $f$  называем *равномерным пределом последовательности*  $(f_n)$  и пишем  $f_n \Rightarrow f$ , или  $f_n \Rightarrow f$  на  $Z$ .

**Теорема 4.** Если  $f_n \Rightarrow f$ , то  $f_n \rightarrow f$ .

◀ Пусть  $Z = D_f = D_{f_n} \forall n \in \mathbb{N}$  и  $z \in Z$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$  имеем

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \|f - f_n\| \rightarrow 0,$$

Следовательно,  $f_n \rightarrow f$ . ▶

**Следствие.** Если последовательность функций  $(f_n)$  сходится равномерно, то ее равномерный предел — единственный.

**Теорема 5** (о линейности равномерного предела). Если  $f_n \Rightarrow f$ ,  $g_n \Rightarrow g$ ,  $Z = D_f = D_g = D_{f_n} = D_{g_n} \forall n \in \mathbb{N}$ , то  $\forall \lambda \in \mathbb{C} \ f_n + \lambda g_n \Rightarrow f + \lambda g$ .

◀ Имеем при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\|(f_n + \lambda g_n) - (f + \lambda g)\| \leq \|f_n - f\| + |\lambda| \|g_n - g\| \rightarrow 0,$$

следовательно,  $f_n + \lambda g_n \Rightarrow f + \lambda g$ . ▶

Не все теоремы о пределах сходящихся числовых и равномерно сходящихся функциональных последовательностей аналогичны друг другу. Это объясняется тем, что равномерная норма, в отличие от модуля числа, может принимать значение  $+\infty$ .

Приведем пример двух равномерно сходящихся последовательностей функций, произведение которых сходится неравномерно.

Пусть  $\forall (n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}) \ f_n(z) = z$ ,  $f(z) = z$ ,  $g_n(z) = \frac{1}{n}$ . Тогда  $f_n \Rightarrow f$ ,  $g_n \Rightarrow 0$ . Однако,  $\forall (n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}) \ (f_n g_n)(z) = \frac{z}{n}$ ,  $\|f_n g_n - 0\| = \|f_n g_n\| = \sup_{z \in \mathbb{C}} \left| \frac{z}{n} \right| = +\infty$ , т.е. сходимость неравномерная.

**Определение 3.** Пусть  $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  и  $\forall n \in \mathbb{N} \ D_{f_n} = Z$ . Последовательность  $(f_n)$  называется *равномерно фундаментальной*, если  $(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \ (\forall (n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbb{N})) : \|f_{n+p} - f_n\| < \varepsilon$ .

Числовую последовательность можно рассматривать как частный случай последовательности постоянных функций, при этом понятия фундаментальности и равномерной фундаментальности совпадают.

**Теорема 6** (критерий Коши). Последовательность  $(f_n)$  равномерно сходится тогда и только тогда, когда она равномерно фундаментальна.

◀ Необходимость. Пусть  $f_n \Rightarrow f$  и  $\varepsilon > 0$ . Пользуясь определением равномерной сходимости, найдем такой номер  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , что  $\forall n \geq n_\varepsilon \ \|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда  $\forall (n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbb{N}) \ \|f_{n+p} - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Следовательно,  $\forall (n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbb{N}) \ \|f_{n+p} - f_n\| \leq \|f_{n+p} - f\| + \|f - f_n\| < \varepsilon$ , что означает равномерную фундаментальность последовательности  $(f_n)$ .

Достаточность. Пусть последовательность  $(f_n)$  равномерно фундаментальная и  $z \in Z$ . Тогда из оценки

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| \leq \|f_{n+p} - f_n\|, \quad (3)$$

справедливой  $\forall (n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N})$ , следует фундаментальность числовой последовательности  $(f_n(z))$ . Согласно критерию Коши, для последовательности комплексных чисел существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ , который обозначим через  $f(z)$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ . Поскольку последовательность  $(f_n)$  равномерно фундаментальная, то существует такое  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , что  $\forall (n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbb{N})$  выполняется неравенство  $\|f_{n+p} - f_n\| < \varepsilon$ . В силу неравенства (3)  $\forall (n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbb{N}, z \in Z)$  имеем

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при  $p \rightarrow \infty$ . Получим  $\forall (n \geq n_\varepsilon, z \in Z)$  неравенство

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon.$$

Согласно определению точной верхней грани,  $\forall n \geq n_\varepsilon \ \|f - f_n\| \leq \varepsilon$ , откуда следует, что  $f_n \Rightarrow f$  на  $Z$ . ▶

**Определение 4.** Пусть  $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D_{f_n} = Z \forall n \in \mathbb{N}$ . Ряд  $\sum f_n$  называется *равномерно сходящимся*, если последовательность его частичных сумм сходится равномерно.

Сумму равномерно сходящегося ряда назовем *равномерной суммой*.

**Определение 5.** Пусть  $f_n : C \rightarrow C$ ,  $D_{f_n} = Z \forall n \in \mathbb{N}$ . Ряд  $\sum f_n$  удовлетворяет равно-  
номерному условию Коши, если последовательность его частичных сумм является равномерно  
фундаментальной.

Критерий Коши, доказанный для равномерно фундаментальной последовательности, сфор-  
мулируем в терминах теории функциональных рядов.

**Теорема 7** (критерий Коши для функционального ряда). Пусть  $f_n : C \rightarrow C$ ,  
 $D_{f_n} = Z \forall n \in \mathbb{N}$ . Ряд  $\sum f_n$  сходится равномерно тогда и только тогда, когда он удовлетворяет  
равномерному условию Коши.

#### 1.4. Нормальная сходимость функционального ряда.

##### Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов.

**Определение 1.** Пусть  $f_n : C \rightarrow C$ ,  $D_{f_n} = Z \forall n \in \mathbb{N}$ . Ряд  $\sum f_n$  называется нормально  
сходящимся, если сходится ряд  $\sum \|f_n\|$ .

Если все члены ряда  $\sum f_n$  постоянны, то его нормальная сходимость равносильна абсолю-  
тной сходимости числового ряда.

**Теорема 1.** Пусть  $f_n : C \rightarrow C$ ,  $D_{f_n} = Z \forall n \in \mathbb{N}$ . Если ряд  $\sum f_n$  сходится нормально, то он  
является равномерно сходящимся.

◀ Из сходимости числового ряда  $\sum \|f_n\|$  следует, что он удовлетворяет критерию Коши:  
( $\forall \varepsilon > 0$ ) ( $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ) ( $\forall (n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbb{N})$ ):  $\sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\| < \varepsilon$ .

Из неравенства

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|,$$

выполняющегося  $\forall (n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N})$ , и теоремы 7, п. 1.3, следует равномерная сходимость ря-  
да  $\sum f_n$ . ▶

**Следствие** (мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости  
функционального ряда). Пусть  $f_n : C \rightarrow C$ ,  $D_{f_n} = Z \forall n \in \mathbb{N}$ . Если существует такой  
сходящийся числовой ряд  $\sum a_n$ , что  $\forall n \in \mathbb{N} \|f_n\| \leq a_n$ , то ряд  $\sum f_n$  сходится равномерно.

В качестве примера исследуем на равномерную сходимость ряд  $\sum f_n$ , где  $f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^2}$ ,  
 $0 \leq x < +\infty$ .

Поскольку  $f_n(0) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ , то функция  $f_n$  имеет  $\forall n \in \mathbb{N}$  локальный максимум,

являющийся одновременно ее равномерной нормой. Решая уравнение  $f'_n(x) = \frac{1-n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2} = 0$ ,  
получаем:  $x_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $\|f_n\| = f_n(x_n) = \frac{1}{2n^2}$ . Так как числовой ряд  $\sum \frac{1}{2n^2}$  сходится, то по теореме 1  
ряд  $\sum f_n$  сходится равномерно. Если взять  $a_n = \frac{1}{n^2}$ , то  $\|f_n\| < a_n$  и ряд  $\sum f_n$  равномерно  
сходится по мажорантному признаку Вейерштрасса.

Пусть  $f_k : C \rightarrow C$  ( $k = \overline{1, n}$ ),  $g_k : C \rightarrow C$  ( $k = \overline{0, n}$ ),  $D_{f_k} = D_{g_k} = Z$ . Тогда  $\forall z \in Z$   
справедливо тождество Абеля

$$\sum_{k=1}^n f_k(z) (g_k(z) - g_{k-1}(z)) = f_n(z) g_n(z) - f_1(z) g_0(z) - \sum_{k=1}^{n-1} (f_{k+1}(z) - f_k(z)) g_k(z). \quad (1)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f_k(g_k - g_{k-1}) &= f_1(g_1 - g_0) + f_2(g_2 - g_1) + \dots + f_n(g_n - g_{n-1}) = \\ &= -f_1g_0 + (f_1 - f_2)g_1 + \dots + (f_{n-1} - f_n)g_{n-1} + f_ng_n = f_ng_n - f_1g_0 - \sum_{k=1}^{n-1} (f_{k+1} - f_k)g_k. \end{aligned}$$

Тождество (1) является источником получения признаков равномерной сходимости функци-  
ональных рядов.

**Теорема 2** (о равномерной равносходимости функциональных рядов, связанных преобразованием Абеля). Пусть последовательность функций  $(f_n g_n)$  сходится равномерно на множестве  $Z$ . Тогда функциональные ряды, сходящиеся поточечно на множестве  $Z$ ,

$$\sum f_n(g_n - g_{n-1}), \quad g_0 = 0, \quad (2)$$

$$\sum g_n(f_{n+1} - f_n) \quad (3)$$

сходятся равномерно или неравномерно одновременно.

◀ Пусть ряд (3) равномерно сходится на множестве  $Z$ . Согласно теореме о линейности равномерного предела и тождеству Абеля

$$\sum_{k=1}^n f_k(g_k - g_{k-1}) = f_n g_n - \sum_{k=1}^{n-1} g_k(f_{k+1} - f_k) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

ряд (2) сходится равномерно на множестве  $Z$ . Аналогично ряд (3) равномерно сходится, если ряд (2) является равномерно сходящимся. ▶

**Определение 2.** Последовательность комплексных чисел  $(z_n)$  называется бимонотонной, если  $\forall(n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N})$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |z_{k+1} - z_k| \leq 2 \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (z_{k+1} - z_k) \right|. \quad (5)$$

Смысл термина “бимонотонность” поясняет следующее утверждение.

**Лемма.** Пусть  $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = x_n + iy_n$ . Если последовательности  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  монотонны, то последовательность  $(z_n)$  является бимонотонной.

◀ Имеем  $\forall(n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} |z_{k+1} - z_k| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |x_{k+1} - x_k| + \sum_{k=n+1}^{n+p} |y_{k+1} - y_k| = \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (x_{k+1} - x_k) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (y_{k+1} - y_k) \right| \leq 2 \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (z_{k+1} - z_k) \right|. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Если  $\forall z \in Z$  последовательность комплексных чисел  $(f_n(z))$  бимонотонная и

$$\left( \sup_{k \geq n} \|g_k\| \right) \left( \sup_{k \geq n} \|f_k - f_n\| \right) = o(1), \quad (6)$$

то ряд  $\sum g_n(f_{n+1} - f_n)$  сходится равномерно.

◀ Пусть  $z \in Z$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z)(f_{k+1}(z) - f_k(z)) \right| &\leq \sum_{k=n}^{n+p} |g_k(z)| |f_{k+1}(z) - f_k(z)| \leq \sup_{k \geq n} \|g_k\| 2 \left| \sum_{k=n}^{n+p} (f_{k+1}(z) - f_k(z)) \right| \leq \\ &\leq 2 \sup_{k \geq n} \|g_k\| \|f_{n+p+1}(z) - f_n(z)\| \leq 2 \sup_{k \geq n} \|g_k\| \sup_{k \geq n} \|f_k - f_n\|. \quad (7) \end{aligned}$$

Из оценки (7) и критерия Коши для функционального ряда следует утверждение теоремы. ▶

**Теорема 4** (Абеля). Пусть  $\forall z \in Z$  последовательность комплексных чисел  $(f_n(z))$  бимонотонная. Если ряд  $\sum \varphi_n$  сходится равномерно и  $\|f_n\| = O(1)$ , то ряд  $\sum f_n \varphi_n$  является равномерно сходящимся.

◀ Пусть  $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ . Полагаем  $g_n = \sum_{k=1}^n \varphi_k - \Phi \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . По условию  $\|g_n\| = o(1)$ . Поскольку

$\sup_{k \geq n} \|g_k\| \sup_{k \geq n} \|f_k - f_n\| = o(1)O(1) = o(1)$  и  $\forall n \geq 2 \quad \varphi_n = g_n - g_{n-1}$ , то выполнены все условия

теоремы 3. Поэтому ряд  $\sum g_n(f_{n+1} - f_n)$  равномерно сходится. Так как  $\|f_n g_n\| \leq \|f_n\| \|g_n\| = O(1)o(1) = o(1)$ , то по теореме 2 ряд  $\sum f_n \varphi_n$  равномерно сходится. ▶

**Теорема 5** (Дирихле). Пусть  $\forall z \in Z$  последовательность комплексных чисел  $(f_n(z))$  бимонотонная. Если

$$\left\| \sum_{k=1}^n \varphi_k \right\| = O(1) \quad \text{и} \quad \|f_n\| = o(1), \quad (8)$$

то ряд  $\sum f_n \varphi_n$  равномерно сходится.

◀ Полагаем  $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n = \sum_{k=1}^n \varphi_k$ . Так как  $\sup_{k \geq n} \|g_k\| \cdot \sup_{k \geq n} \|f_k - f_n\| = O(1)o(1) = o(1)$  и  $\forall n \geq 2 \quad g_n - g_{n-1} = \varphi_n$ , то, согласно теореме 3, ряд  $\sum g_n (f_{n+1} - f_n)$  сходится равномерно. Кроме того,  $\|f_n g_n\| \leq \|f_n\| \|g_n\| = o(1)O(1) = o(1)$ . По теореме 2 ряд  $\sum f_n \varphi_n$  сходится равномерно. ▶

**Пример 1.** Исследовать на равномерную сходимость ряд  $\sum \psi_n$ , если  $\psi_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n} \quad \forall (n \in \mathbb{N}, x \in (0, +\infty))$ .

Воспользуемся признаком Дирихле, обозначив  $\forall (n \in \mathbb{N}, x \in (0, +\infty)) \quad f_n(x) = \frac{1}{x+n}, \varphi_n(x) = (-1)^n$ . Последовательность  $(f_n(x))$  является монотонной  $\forall x \in (0, +\infty)$  и тем самым бимонотонной. Далее,  $\|f_n\| = \frac{1}{n} = o(1), \left\| \sum_{k=1}^n \varphi_k \right\| = O(1)$ . Следовательно, выполнены все условия признака Дирихле, т. е. ряд сходится равномерно.

**Пример 2.** Доказать, что ряд  $\sum \frac{z^n}{n}$  сходится равномерно в интервале  $(-1, 0)$ , а ряд  $\sum \left| \frac{z^n}{n} \right|$  в этом же интервале сходится, но не равномерно.

На рассматриваемом множестве ряд имеет вид  $\sum (-1)^n \frac{|x|^n}{n}$ . Числовой ряд  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  сходится, а поскольку его члены не зависят от  $x$ , то эта сходимость равномерная. При каждом  $x \in (-1, 0)$  последовательность  $(|x|^n)$  монотонная и ограниченная. По признаку Абеля ряд  $\sum \frac{z^n}{n}$  сходится равномерно на интервале  $(-1, 0)$ .

Исследование ряда  $\sum \left| \frac{z^n}{n} \right|$  на равномерную сходимость на интервале  $(-1, 0)$  равносильно исследованию ряда  $\sum \frac{t^n}{n}$  на равномерную сходимость на интервале  $(0, 1)$ . Сумма его  $n$ -остатка  $r_n = \frac{t^{n+1}}{n(1-t)} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Оценим  $\|r_n - 0\| = \|r_n\|$ . Поскольку точка  $x_n = 1 - \frac{1}{n}$  принадлежит интервалу  $(0, 1) \quad \forall n > 1$  и  $r_n(x_n) = (1 - \frac{1}{n})^{n+1} \rightarrow e^{-1}$ , то  $\|r_n\| \not\rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и ряд сходится неравномерно.

**Определение 3.** Ряд  $\left( \sum_{k=n+1}^{n+j} f_k \right)_{j \in \mathbb{N}}$  называется  $n$ -остатком ряда  $\sum f_n = \left( \sum_{k=1}^n f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Если ряд  $\sum f_n$  сходится равномерно, то, очевидно, его  $n$ -остаток равномерно сходится к нулю.

### 1.5. Функциональные свойства равномерной суммы функционального ряда.

**Теорема 1.** Если функциональный ряд  $\sum f_n$  сходится равномерно в области  $G \subset \mathbb{C}$  и все его члены являются непрерывными функциями в точке  $z_0 \in G$ , то его сумма  $S$  будет непрерывной функцией в этой точке.

◀ Пусть  $\epsilon > 0$ . В силу равномерной сходимости ряда  $\sum f_n$  найдется такое  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ , что

$$\forall n \geq n_\epsilon \quad \|S - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \right\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Выберем  $h > 0$  из условия  $\overline{K}_h \subset G$ , где  $\overline{K}_h = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq h\}$ , рассмотрим  $\forall z \in \overline{K}_h$  разность

$$S(z) - S(z_0) = S(z) - S_{n_\epsilon}(z) + S_{n_\epsilon}(z) - S_{n_\epsilon}(z_0) + S_{n_\epsilon}(z_0) - S(z_0) = \sum_{k=n_\epsilon+1}^{\infty} f_k + S_{n_\epsilon}(z) - S_{n_\epsilon}(z_0) + \sum_{k=n_\epsilon+1}^{\infty} f_k(z_0)$$



и оценим ее. Получим

$$\begin{aligned}
 |S(z) - S(z_0)| &\leq \left| \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} f_k(z) \right| + \left| \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} f_k(z_0) \right| + |S_{n_\varepsilon}(z) - S_{n_\varepsilon}(z_0)| \leq \\
 &\leq 2 \left\| \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} f_k \right\| + |S_{n_\varepsilon}(z) - S_{n_\varepsilon}(z_0)| < \frac{2}{3}\varepsilon + |S_{n_\varepsilon}(z) - S_{n_\varepsilon}(z_0)|.
 \end{aligned}$$

Поскольку члены ряда являются непрерывными функциями в точке  $z_0$ , то и их конечная сумма  $S_{n_\varepsilon}$  непрерывна в этой точке. Поэтому по заданному  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что из условия  $h < \delta \forall z \in \bar{K}_h$  выполняется неравенство  $|S_{n_\varepsilon}(z) - S_{n_\varepsilon}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Объединяя полученные оценки, имеем:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что  $h < \delta \Rightarrow \forall z \in \bar{K}_h |S(z) - S(z_0)| < \varepsilon$ , т.е. сумма  $S$  равномерно сходящегося функционального ряда является непрерывной функцией в точке  $z_0$ . ►

**Следствие.** Если члены ряда  $\sum f_n$  непрерывны в области  $G$  и ряд сходится равномерно в  $G$ , то его сумма  $S$  является непрерывной функцией в этой области.

**Теорема 2** (о почленном интегрировании равномерно сходящегося функционального ряда). Пусть члены ряда  $\sum f_n$  являются непрерывными функциями в области  $G \subset \mathbb{C}$ ,  $\gamma \subset G$  — гладкая или кусочно-гладкая жорданова кривая и ряд сходится равномерно в  $G$ . Тогда его можно интегрировать почленно вдоль кривой  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}})$  и при этом

$$\int_{\Gamma} S(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_n(z) dz. \quad (1)$$

◀ Поскольку  $n$  — остаток равномерно сходящегося ряда равномерно сходится к нулю, то  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_\varepsilon \|r_n\| = \|S - S_n\| < \varepsilon$ . По теореме 1 сумма ряда  $S$  является непрерывной функцией в каждой точке кривой  $\gamma$ , поэтому интеграл  $\int_{\Gamma} S(z) dz$  существует. Из оценки

$$\left| \int_{\Gamma} (S(z) - S_n(z)) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |S(z) - S_n(z)| |dz| \leq \int_{\Gamma} \|r_n\| |dz| < \varepsilon l,$$

где  $l$  — длина кривой  $\gamma$ , следует, что

$$\int_{\Gamma} S(z) dz - \int_{\Gamma} S_n(z) dz = \int_{\Gamma} S(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma} f_k(z) dz \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ т.е.}$$

справедлива формула (1). ►

**Теорема 3** (Вейерштрасса). Пусть  $(f_k)$  — последовательность функций, аналитических в некоторой области  $D \subset \mathbb{C}$  и ряд  $\sum f_n$  равномерно сходится на любом компактном подмножестве этой области. Тогда:

- 1) сумма ряда  $f$  аналитическая в  $D$ ;
- 2) ряд можно почленно дифференцировать в каждой точке области  $D$  сколько угодно раз;
- 3) все продифференцированные ряды равномерно сходятся на любом компактном подмножестве области  $D$ .

◀ 1) Пусть  $z_0 \in D$  — любая точка. Рассмотрим круг  $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \Subset D$ . Согласно условию теоремы ряд  $\sum f_n$  равномерно сходится в круге  $K_r$  и по теореме 1 его сумма  $f$  является непрерывной функцией  $\forall z \in K_r$ . Пусть  $\partial G$  — положительно ориентированная граница треугольника  $G \subset K_r$ . Поскольку ряд  $\sum f_n$  равномерно сходится на  $\partial G$ , то согласно теореме 2 его можно почленно интегрировать:

$$\int_{\partial G} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\partial G} f_n(z) dz.$$

По теореме Коши  $\forall n \in \mathbb{N} \int_{\partial G} f_n(z) dz = 0$ , вследствие чего  $\int_{\partial G} f(z) dz = 0$ . Функция  $f$  удовлетворяет условиям теоремы Морера (см. п. 6.3, гл. 2), поэтому является аналитической в круге  $K_r$ . В силу произвольности  $K_r \subset D$  приходим к выводу, что  $f \in A(D)$ .

2) Пусть  $z_0 \in D$  — произвольная точка и  $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \Subset D$ . Для каждой точки  $z \in \partial K_r$  и  $k \in \mathbb{N}$  выполняется условие

$$\left| \frac{k!}{2\pi i (z - z_0)^{k+1}} \right| = \frac{k!}{2\pi r^{k+1}} < +\infty. \quad (2)$$

Из равномерной сходимости ряда  $\sum f_n$  и условия (2) следует равномерная сходимость ряда

$$\frac{k!}{2\pi i} \sum \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}}. \quad (3)$$

Пусть  $f$  — равномерная сумма ряда  $\sum f_n$ . Так как ряд (3) можно почленно интегрировать по кривой  $\partial K_r$  и его сумма равна  $\frac{k!}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$ , то

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial K_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial K_r} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz. \quad (4)$$

Принимая во внимание формулы для производных от интеграла Коши, имеем

$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z_0). \quad (5)$$

Поскольку  $z_0 \in D$  — произвольная точка, то формула (5) справедлива  $\forall z \in D$ .

3) Пусть  $K$  — произвольное компактное подмножество области  $D$  и  $z_0 \in K$  — любая точка. Выберем число  $d > 0$  так, чтобы выполнялось включение  $K_{2d} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < 2d\} \Subset D$ . Ряд  $\sum f_n$  сходится равномерно на окружности  $\partial K_{2d} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = 2d\}$ , т. е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ :

$$\forall (n \geq n_\varepsilon, z \in \partial K_{2d}) \quad \left| \sum_{m=n}^{\infty} f_m(z) \right| < \varepsilon \quad (6)$$

( $n$ -остаток ряда  $\sum f_n$  равномерно сходится к нулю). Имеем  $\forall z \in K_{2d}$ :

$$\sum_{m=n}^{\infty} f_m^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial K_{2d}} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{f_m(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta. \quad (7)$$

Пусть  $z \in K_d = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < d\}$  и  $\zeta \in \partial K_{2d}$ . Оценим  $n$ -остаток ряда  $\sum f_m^{(k)}$ . Приняв во внимание, что  $|\zeta - z| \geq d$ , а также неравенство (6), получим  $\forall (n \geq n_\varepsilon, \zeta \in \partial K_{2d})$  оценку

$$\left| \sum_{m=n}^{\infty} f_m^{(k)}(z) \right| \leq \frac{k! 4\pi d \varepsilon}{2\pi d^k} = \frac{2k! \varepsilon}{d^k}, \quad (8)$$

не зависящую от  $z \in K_d$ . Следовательно, ряд  $\sum f_m^{(k)}$  сходится равномерно в круге  $K_d$ , т. е. в некоторой окрестности точки  $z_0$ . Поскольку любое компактное подмножество области  $D$  согласно теореме Бореля—Лебега может быть покрыто конечным семейством окрестностей, в каждой из которых по доказанному ряд  $\sum f_m^{(k)}$  сходится равномерно, то он сходится равномерно на таком множестве. ►

**Пример.** Доказать, что ряд  $\sum \frac{\sin nz}{3^n}$  удовлетворяет условиям теоремы Вейерштрасса в области  $D = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \ln 3\}$  и найти  $f'(0)$ .

Очевидно, что  $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in A(D)$ , где  $f_n(z) = \frac{\sin n z}{3^n}$ . Принимая во внимание равенство  $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$ , при  $|y| \leq \theta \ln 3$ ,  $0 \leq \theta < 1$ , получаем оценку

$$|f_n(z)| \leq 3^{-n} + 3^{-n(1-\theta)},$$

из которой по мажорантному признаку Вейерштрасса следует равномерная сходимость ряда  $\sum f_n$  в области  $D$ . Сумма ряда  $f$  является аналитической функцией в области  $D$  и по доказанной теореме его можно почленно дифференцировать, т. е.

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n z}{3^n}, \quad f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

Применим теперь теорему Вейерштрасса к рядам определенного вида.

### 1.6. Степенные ряды.

Ряд  $\sum f_n$ , где  $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}_0$ ,  $a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a_n = \text{const}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , называется *степенным*. Частичные суммы этого ряда являются алгебраическими многочленами, и поэтому его сумму  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  можно рассматривать как дальнейшее обобщение понятия многочлена.

Члены степенного ряда являются аналитическими функциями во всей плоскости  $\mathbb{C}$ . При определении степенного ряда возникает вопрос, в какой области он сходится равномерно и, следовательно, по теореме Вейерштрасса определяет аналитическую функцию.

Каждый степенной ряд  $\sum a_n(z - z_0)^n$  обладает замечательным свойством: с ним связано число  $0 \leq R \leq +\infty$ , называемое его *радиусом сходимости*. Зная это число, можно ответить на вопросы о поточечной, равномерной и нормальной сходимости, указать свойство его членов (ограниченность, стремление к нулю). Наиболее простой задачей является исследование членов ряда

$$\sum a_n(z - z_0)^n \quad (1)$$

на ограниченность. Ее решение служит основой определения радиуса сходимости степенного ряда.

**Определение 1.** Радиусом сходимости степенного ряда (1) называется число

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid a_n r^n = O(1)\}. \quad (2)$$

Поскольку  $\{r \geq 0 \mid a_n r^n = O(1)\} \neq \emptyset$ , то точная верхняя грань этого множества в  $\overline{\mathbb{R}}$  существует.

**Теорема 1.** Пусть  $R > 0$  и  $0 < r < R$ . Тогда ряд (1) сходится нормально в круге  $K_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ .

◀ По определению точной верхней грани существует такое  $r_1$ , что  $r < r_1 \wedge a_n r_1^n = O(1)$ . Пусть  $\forall (z \in K_r, n \in \mathbb{N}) \quad f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ . Тогда

$$\|f_n\| = |a_n| r^n = |a_n r_1^n| \left(\frac{r}{r_1}\right)^n = O\left(\left(\frac{r}{r_1}\right)^n\right).$$

Так как  $0 < \frac{r}{r_1} < 1$ , то по признаку сравнения числовых рядов ряд  $\sum \|f_n\|$  сходится, что по определению означает нормальную сходимость ряда  $\sum f_n$ , т. е. степенного ряда (1) в круге  $K_r$ . ▶

**Следствие 1.** Пусть  $R > 0$ . Тогда ряд (1) поточечно сходится в круге  $K_R$ . Если  $R < +\infty$ , то ряд (1) расходится поточечно вне круга  $K_R$ , т. е. в тех точках  $z \in \mathbb{C}$ , для которых  $|z - z_0| > R$ .

**Следствие 2.** Пусть  $R > 0$  и  $|z - z_0| < R$ . Тогда  $a_n(z - z_0)^n = O(1)$ . Если  $R < +\infty$  и  $|z - z_0| > R$ , то  $a_n(z - z_0)^n \neq O(1)$ .

**Следствие 3.** Пусть  $R > 0$  и  $|z - z_0| < R$ . Тогда  $a_n(z - z_0)^n = o(1)$ . Если  $R < +\infty$  и  $|z - z_0| > R$ , то  $a_n(z - z_0)^n \neq o(1)$ .

**Следствие 4.** Пусть  $R > 0$  и  $|z - z_0| < R$ . Тогда ряд (1) сходится абсолютно в круге  $K_R$ . Если  $R < +\infty$  и  $|z - z_0| > R$ , то ряд (1) не будет абсолютно сходящимся.

**Следствие 5.** Если  $R > 0$  и  $0 < r < R$ , то ряд (1) сходится равномерно в круге  $K_r$ .

Теорема и следствия из нее не содержат никакой информации о свойствах степенного ряда на окружности  $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ . В силу формул Эйлера ряд (1) на окружности  $\gamma_R$  превращается в тригонометрический ряд. Вопрос о поведении степенного ряда на границе круга сходимости  $K_R$  требует в каждом конкретном случае специальных исследований. Может случиться, что в некоторых точках  $z \in \gamma_R$  ряд сходится, а в некоторых — расходится. Существуют также степенные ряды, сходящиеся или расходящиеся в каждой точке  $z \in \gamma_R$ .

**Теорема 2** (первая теорема Абеля). Пусть числовой ряд

$$\sum a_n(z_1 - z_0)^n \quad (3)$$

сходится и  $z_1 \neq z_0$ . Тогда степенной ряд (1) сходится в круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < |z_1 - z_0|\}$ .

Поскольку ряд (3) сходится, то, согласно следствию 1,  $|z_1 - z_0| \leq R$ . Следовательно,  $K \subset K_R$ , где  $K_R$  — круг сходимости ряда (1). ►

Из теоремы 2 и следствия 5 получаем, что ряд (1) сходится абсолютно и равномерно в круге  $\overline{K}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ , где  $r < |z_1 - z_0|$ .

**Теорема 3** (Коши—Адамара). Пусть  $R$  — радиус сходимости ряда (1) и  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ .

Тогда  $R = \frac{1}{l}$ , причем  $R = +\infty$ , если  $l = 0$  и  $R = 0$ , если  $l = +\infty$ .

Очевидно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = l|z - z_0|. \quad (4)$$

Если  $l = 0$ , то по радикальному признаку Коши  $\forall z \in \mathbb{C}$  ряд (1) сходится абсолютно. Согласно следствию 4 из теоремы 1,  $R = +\infty$ .

Если  $l = +\infty$ , то  $\forall z \neq z_0$   $a_n(z - z_0)^n \neq O(1)$ . Согласно следствию 2 из теоремы 1,  $R = 0$ .

Пусть  $0 < l < +\infty$ . По радикальному признаку Коши из равенства (4) следует, что  $\forall z \in K_{\frac{1}{l}} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \frac{1}{l}\}$  ряд (1) сходится абсолютно. Следовательно,  $K_{\frac{1}{l}} \subset K_R$  и  $\frac{1}{l} \leq R$ .

Если  $|z - z_0| > \frac{1}{l}$ , то из равенства (4) получаем, что  $a_n(z - z_0)^n \neq o(1)$ . Согласно следствию 3 из теоремы 1,  $\frac{1}{l} \geq R$ . Таким образом,  $R = \frac{1}{l}$ . ►

Если  $\forall n \in \mathbb{N} |a_n| > 0$  и существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , то, как известно из курса математического анализа,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ . В этом случае радиус сходимости степенного ряда (1) можно найти по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (5)$$

**Теорема 4** (вторая теорема Абеля). Если степенной ряд (1) с конечным радиусом сходимости  $R > 0$  сходится в некоторой точке  $z_1 \in \gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ , то его сумма

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  стремится к  $f(z_1)$  при подходе к точке  $z_1$  вдоль радиуса  $[z_0, z_1]$ .

Не ограничивая общности можем считать, что  $z_1 = (R, y_0)$ , чего можно достичь преобразованием  $w = ze^{i\alpha}$  при некотором  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\forall z \in [z_0, z_1]$   $z = (x, y_0)$ ,  $x_0 \leq x \leq R$ ,  $z - z_0 = (x - x_0, 0)$ ,  $|z - z_0| = |x - x_0|$  и  $\forall z \in [z_0, z_1]$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left( \frac{x - x_0}{R} \right)^n. \quad (6)$$

По условию теоремы числовой ряд  $\sum a_n R^n$  сходится, что равносильно его равномерной сходимости. Последовательность  $\left( \left( \frac{x - x_0}{R} \right)^n \right)$  монотонно возрастает на отрезке  $[x_0, R]$  и ограниченная, так как  $\forall x \in [x_0, R]$   $\frac{|x - x_0|}{R} = \frac{x - x_0}{R} \leq 1$ . По признаку Абеля (см. теорему 4, п. 1.4) ряд  $\sum a_n(z - z_0)^n$  сходится равномерно на отрезке  $[z_0, z_1]$ , в силу чего его сумма  $f$  является непрерывной функцией на этом отрезке (см. теорему 1, п. 1.5 и следствие из нее). Поэтому

$$f(z_1) = \lim_{\{z_0, z_1\} \ni z \rightarrow z_1} f(z). \quad \blacktriangleright$$

Немецкий математик А. Прингсхейм (1850—1941) доказал, что при выполнении условий теоремы сумма ряда  $f$  непрерывна в точке  $z_1$  вдоль любой жордановой кривой  $\gamma$ , лежащей внутри какого-либо угла раствора, меньшего  $\pi$ , с вершиной в точке  $z_1$  и с биссектрисой, совпадающей с радиусом  $[z_0, z_1]$ .

При исследовании некоторых проблем с применением степенных рядов над ними производят арифметические операции, в том числе операцию умножения степенных рядов.

В курсе алгебры *произведением многочленов*

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad Q(z) = \sum_{j=0}^m b_j z^j$$

называется *многочлен*

$$R(z) = \sum_{\nu=0}^{m+n} c_\nu z^\nu, \quad (7)$$

где  $c_\nu = \sum_{j=0}^{\nu} a_j b_{\nu-j} \quad (\nu = \overline{0, n+m})$ .

Это определение согласуется с правилом умножения конечных сумм в том смысле, что  $\forall z \in \mathbb{C}$   $P(z)Q(z) = R(z)$ .

Сформулируем правило умножения степенных рядов, обращаясь с ними, как с многочленами.

**Определение 2.** *Произведением степенных рядов*

$$a_0 + \sum a_n (z - z_0)^n, \quad b_0 + \sum b_n (z - z_0)^n \quad (8)$$

называется *степенной ряд*

$$c_0 + \sum c_n (z - z_0)^n, \quad (9)$$

где  $c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_0$ .

Полагая в рядах (8) и (9)  $z - z_0 \approx 1$ , получим правило Коши умножения числовых рядов.

Пусть  $K_{R_1}$  и  $K_{R_2}$  — соответственно круги сходимости рядов (8), а их произведение (9) имеет радиус сходимости  $R$ . Тогда  $R \geq \min\{R_1, R_2\}$  и  $\forall z \in K_{R_1} \cap K_{R_2}$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_0} c_n (z - z_0)^n \approx \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}_0} a_n (z - z_0)^n \right) \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}_0} b_n (z - z_0)^n \right).$$

Так как каждый степенной ряд  $\sum a_n (z - z_0)^n$  с ненулевым радиусом сходимости абсолютно сходится в круге сходимости, то любая его перестановка имеет ту же сумму, что и сам ряд. Этот факт отмечается записью  $\sum_{n \in \mathbb{Z}_0} a_n (z - z_0)^n$ .

По первой теореме Абеля степенной ряд  $\sum a_n (z - z_0)^n$  сходится равномерно в любом замкнутом круге  $\overline{K}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subset K_R$ . Поскольку любое компактное подмножество  $K$  круга сходимости  $K_R$  принадлежит ему, то для степенного ряда в круге сходимости выполняются все условия теоремы Вейерштрасса (теорема 3, п. 1.5). Следовательно, в круге сходимости  $K_R$  сумма степенного ряда  $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_0} a_n (z - z_0)^n$  является аналитической функцией, ряд можно почлен-

но дифференцировать сколько угодно раз и при этом степенные ряды, получаемые в результате дифференцирования, имеют тот же радиус сходимости  $R$ .

### 1.7. Теорема Тейлора.

В предыдущем пункте было показано, что сумма степенного ряда является аналитической функцией в круге сходимости. Вполне естественно поставить вопрос о возможности разложения в степенной ряд аналитической функции. Ответ на него содержится в следующем утверждении.

**Теорема** (Тейлора). Аналитическую в области  $D$  функцию  $f$  можно в окрестности каждой точки  $z_0 \in D$  представить суммой степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

радиус сходимости которого не меньше расстояния  $d$  от точки  $z_0$  до границы области  $D$ .

▲ Рассмотрим круг  $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ,  $r < d$ ,  $K_r \in D$ . По интегральной формуле Коши  $\forall z \in K_r$  имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)}. \quad (1)$$

Для каждой фиксированной точки  $z \in K_r$  выполняется неравенство

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} = q < 1,$$

если  $\zeta \in \partial K_r$ . Поэтому выражение  $\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$  можно рассматривать как сумму геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n. \quad (2)$$

Ряд  $\sum \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$  равномерно сходится на  $\partial K_r$ , поэтому его можно почленно интегрировать. Принимая во внимание (1) и (2), получим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \quad (3)$$

Таким образом,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (4)$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \quad (5)$$

Поскольку ряд  $\sum \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$  для каждой фиксированной точки  $z \in K_r$  сходится равномерно относительно  $\zeta \in \partial K_r$ , а коэффициенты  $a_n$  одни и те же для всех  $r$ , где  $0 < r < d$ , то радиус сходимости  $R$  степенного ряда  $\sum a_n (z - z_0)^n$  не меньше чем  $d$ . Действительно, предположив, что  $R < d$ , получим противоречие с определением радиуса сходимости этого ряда, так как в качестве  $r$  можно взять число, большее  $R$ . ►

Ряд  $\sum a_n (z - z_0)^n$ , коэффициенты которого вычисляются по формуле (5), называется *рядом Тейлора* функции  $f$ .

**Следствие 1.** Каждый сходящийся степенной ряд  $\sum a_n (z - z_0)^n$  является рядом Тейлора своей суммы

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

вследствие чего его коэффициенты определены однозначно и вычисляются по формуле

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

**Следствие 2** (оценка Коши для коэффициентов степенного ряда). Пусть функция  $f$  аналитическая в замкнутом круге  $\bar{K}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$  и  $M = \max_{z \in \partial K_r} |f(z)|$ . Тогда коэффициенты ряда Тейлора функции  $f$  по степеням  $z - z_0$  удовлетворяют неравенствам

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad (n \in \mathbb{Z}_0). \quad (6)$$

Действительно

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{M \cdot 2\pi r}{2\pi r^{n+1}} = \frac{M}{r^n}.$$

Напомним разложения основных элементарных функций в ряды Тейлора по степеням  $z$ . Для целых функций  $z \mapsto e^z$ ,  $z \mapsto \sin z$ ,  $z \mapsto \cos z$ ,  $z \mapsto \operatorname{sh} z$ ,  $z \mapsto \operatorname{ch} z$  имеем соответственно сходящиеся во всей плоскости  $\mathbb{C}$  разложения:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

В каждой точке  $z \in \mathbb{C}$  соответствующие ряды сходятся абсолютно, их можно почленно дифференцировать сколько угодно раз и  $\forall R > 0$ ,  $R < +\infty$  они сходятся равномерно в круге  $\bar{K}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ .

Главная ветвь  $w = \ln(1+z)$  многозначной функции  $w = \operatorname{Ln}(1+z)$  в круге  $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  также допускает представление в виде ряда Тейлора

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

Пусть  $(1+z)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+z)}$ , т.е. рассматриваем главную ветвь многозначной функции  $w = (1+z)^\alpha$ . Тогда в круге  $K_1$  справедливо разложение

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} z^n.$$

Если  $z \in K_1$ , то

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

### 1.8. Теорема единственности.

Из представления аналитической функции степенным рядом следует одно из важнейших свойств аналитической функции, выражаемое следующей теоремой единственности.

**Теорема.** Если функции  $f_1$  и  $f_2$  аналитические в области  $D$ , совпадают в ней на бесконечном множестве точек  $E$ , имеющем предельную точку в  $D$ , то эти функции тождественно равны друг другу в области  $D$ .

◀ Пусть  $z_0 \in D$  — предельная точка множества  $E$ , а последовательность  $(z_n)$  точек множества  $E$  сходится к точке  $z_0$ . Представим функции  $f_1$  и  $f_2$  в окрестности точки  $z_0$  с помощью степенных рядов:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n (z - z_0)^n, \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a''_n (z - z_0)^n.$$

Поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ , то начиная с некоторого номера  $n$  все  $z_n$  лежат в круге

$$K_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}, \quad \rho \leq d,$$



где  $d$  — расстояние от точки  $z_0$  до границы области  $D$ , т. е.  $d = \inf_{z \in \partial D} \rho(z_0, z)$ . В силу этого имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n (z_n - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a''_n (z_n - z_0)^n.$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим, что  $a'_0 = a''_0$ . Таким образом, справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n (z_n - z_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a''_n (z_n - z_0)^{n-1}.$$

При  $n \rightarrow \infty$  получим, что  $a'_1 = a''_1$ . Продолжая эти операции предельного перехода, убеждаемся в том, что  $\forall n \in \mathbb{N} \ a'_n = a''_n$  (применив метод математической индукции). Следовательно,  $\forall z \in K_\rho \ f_1(z) = f_2(z)$ .

Пусть  $z^* \in D$  — любая точка. Рассмотрим жорданову кривую  $\gamma \subset D$ , соединяющую точки  $z_0$  и  $z^*$ . Пусть  $\rho_0 > 0$  — расстояние от кривой  $\gamma$  до кривой  $\partial D$ , т. е.  $\rho_0 = \inf_{z \in \gamma, \zeta \in \partial D} \rho(z, \zeta)$ . Очевидно,

что  $\rho_0 \leq \rho$ . Пусть  $\rho_1 < \rho_0$  — некоторое положительное число. Разделим кривую  $\gamma$  на дуги точками  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = z^*$  так, чтобы  $|z_k - z_{k-1}| = \rho_1$ . Рассмотрим круги  $K_{\rho_0}^{(k)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_k| < \rho_0\}$  ( $k = \overline{0, n-1}$ ). Очевидно, что  $K_{\rho_0}^{(k-1)} \cap K_{\rho_0}^{(k)} \neq \emptyset$  и центр круга  $K_{\rho_0}^{(k)}$  принадлежит кругу  $K_{\rho_0}^{(k-1)}$ . В круге  $K_{\rho_0}^{(0)}$   $f_1 = f_2$ . Центр  $z_1$  круга  $K_{\rho_0}^{(1)}$  является предельной точкой множества, на котором  $f_1 = f_2$ , и, таким образом, повторяя предыдущие рассуждения, получим, что  $f_1 = f_2$  в  $K_{\rho_0}^{(1)}$ .

Продолжая этот процесс, после конечного числа шагов достигнем круга  $K_{\rho_0}^{(n)}$ , т. е.

$$\forall z \in K_{\rho_0}^{(n)} \quad f_1(z) = f_2(z)$$

и, в частности,  $f_1(z^*) = f_2(z^*)$ . Поскольку  $z^* \in D$  — произвольная точка, то  $\forall z \in D \ f_1(z) = f_2(z)$ . ►

**Определение.** Пусть  $A \in \mathbb{C}$  — произвольное конечное число,  $f$  — аналитическая в некоторой области  $D$  функция.  $A$ -точками функции  $f$  называются корни уравнения  $f(z) = A$ .

Из теоремы единственности следует, что в случае, когда  $f(z) \not\equiv A$ , множество  $A$ -точек не может иметь ни одной предельной точки, принадлежащей области  $D$ , поскольку допустив противное, получили бы, что  $f(z) \equiv A$ . Отсюда, в частности, следует, что любой компакт  $K \subset D$  может содержать лишь конечное число  $A$ -точек для фиксированного  $A$ . Действительно, предположив, что  $K$  содержит бесконечное множество  $A$ -точек, получим, что это множество имеет предельную точку, принадлежащую  $K$ .

Пусть  $z_0$  — какая-нибудь  $A$ -точка функции  $f$ , т. е.  $f(z_0) = A$ . В окрестности точки  $z_0$  имеем

$$f(z) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

или

$$f(z) - A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (1)$$

Если  $f(z) \not\equiv A$ , то среди коэффициентов правой части равенства (1) найдутся отличные от нуля. Пусть  $(z - z_0)^k$  — младшая степень  $z - z_0$ , коэффициент при которой отличен от нуля. Тогда равенство (1) принимает вид

$$f(z) - A = (z - z_0)^k \sum_{j=k}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^{j-k}, \quad (2)$$

где  $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ . Число  $k \in \mathbb{N}$  называется *порядком* или *кратностью*  $A$ -точки  $z_0$ .

В случае, когда  $k = 1$ ,  $A$ -точка называется *простой*, в случае, когда  $k > 1$ , — *кратной*.

Простая точка характеризуется тем, что для нее  $f(z_0) = A$  и  $f'(z_0) \neq 0$ . Кратная  $A$ -точка порядка  $k \geq 2$  характеризуется соотношениями

$$f(z_0) = A, \quad f'(z_0) = 0, \quad \dots, \quad f^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Если  $A = 0$ , то точка  $z_0$  называется нулем функции  $f$ . Она называется нулем кратности  $n$ , если

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

В последнем случае разложение функции  $f$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $z_0$  имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

откуда

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z), \quad (3)$$

где

$$\varphi(z) = \sum_{j=n}^{\infty} a_j (z - z_0)^{j-n}. \quad (4)$$

Из формул (3) и (4) следует, что аналитические функции обращаются в нуль как целые степени  $z - z_0$ , а из теоремы единственности получаем, что отличные от тождественного нуля аналитические функции не могут иметь нулей бесконечного порядка.

Рассмотрим примеры.

1. Найти область сходимости ряда  $\sum \frac{z^n}{1 - z^n}$ .

◀ При  $|z| \leq r < 1$  имеем  $\left| \frac{z^n}{1 - z^n} \right| \leq \frac{r^n}{1 - r^n} = a_n$ . Ряд  $\sum a_n$  сходится. Следовательно, исследуемый ряд абсолютно и равномерно сходится на любом компактном подмножестве единичного круга  $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . ▶

2. Доказать, что если радиусы сходимости степенных рядов  $\sum a_n z^n$ ,  $\sum b_n z^n$  соответственно равны  $R_1$ ,  $R_2$ , то:

1) радиус сходимости  $R$  степенного ряда  $\sum a_n b_n z^n$  удовлетворяет неравенству  $R \geq R_1 R_2$ ;

2) радиус сходимости  $R'$  степенного ряда  $\sum \frac{a_n}{b_n} z^n$  ( $b_n \neq 0$ ) удовлетворяет неравенству

$$R' \leq \frac{R_1}{R_2};$$

3) радиус сходимости  $R_0$  степенного ряда  $\sum (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n) z^n$  удовлетворяет неравенству  $R_0 \geq \min\{R_1, R_2\}$ .

◀ 1) Поскольку

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R_1}, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1}{R_2}, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n b_n|} = \frac{1}{R}$$

и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n b_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{|b_n|} \right) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|},$$

то

$$\frac{1}{R} \leq \frac{1}{R_1 R_2}, \quad \text{т. е.} \quad R \geq R_1 R_2.$$

Вспользовались неравенством<sup>1)</sup>  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ , выполняющимся  $\forall (x_n \geq 0, y_n \geq 0)$ .

2) Так как  $a_n = \frac{a_n}{b_n} \cdot b_n$ , то по доказанному в 1)  $R_1 \geq R' R_2$ , откуда  $R' \leq \frac{R_1}{R_2}$ .

3) Оба ряда абсолютно и равномерно сходятся в замкнутом круге  $\overline{K}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ ,  $r < \min\{R_1, R_2\}$ . Тогда радиус сходимости  $R_0$  ряда

$$\left( \sum a_n z^n \right) \left( \sum b_n z^n \right) = \sum (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + b_n a_0) z^n$$

не может быть меньше  $\min\{R_1, R_2\}$ . ▶

<sup>1)</sup> См., например, И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач. Справочное пособие по высшей математике, Москва, "УРСС", 1995, т. 1, гл. 1, пример 106.

3. Доказать, что когда сумма  $f$  степенного ряда  $\sum a_n(z-b)^n$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , принимает действительные значения в некоторой действительной окрестности точки  $b$ , то все  $a_n$  действительные.

◀ Очевидно,  $a_0 = f(b) \in \mathbb{R}$ . Поскольку

$$a_1 = f'(b) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(b + \Delta z) - f(b)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x},$$

то  $a_1 \in \mathbb{R}$ . Предположим, что  $a_n = f^{(n)}(b) \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$a_{n+1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(b + \Delta x) - f^{(n)}(b)}{\Delta x} = f^{(n+1)}(b) \in \mathbb{R}.$$

Утверждение доказано с помощью метода математической индукции. ►

4. Доказать, что для коэффициентов степенного ряда  $\sum a_n z^n$  с радиусом сходимости  $R > 0$  справедлива формула

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi + \frac{i}{\pi r^n} \int_0^{\pi} v(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi, \quad (1)$$

где  $0 < r < R$ ,  $f(z) = u + iv = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  — сумма ряда.

◀ Пусть  $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ ,  $\Gamma_r = (\gamma_r, \gamma_r^{\text{op}})$  — положительно ориентированная гладкая или кусочно-гладкая жорданова кривая. Тогда

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \frac{re^{i\varphi} i d\varphi}{r^{n+1} e^{i(n+1)\varphi}} = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (2)$$

Применив интегральную формулу Коши при  $n \geq 1$ , получим:

$$\int_{\Gamma_r} f(\zeta) \zeta^{n-1} d\zeta = \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) r^n e^{in\varphi} i d\varphi = 0,$$

или

$$\frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) e^{in\varphi} d\varphi = 0. \quad (3)$$

Складывая и вычитая (2) и (3), имеем

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \cos n\varphi d\varphi - \frac{i}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \sin n\varphi d\varphi.$$

Отсюда, полагая  $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ , находим:

$$r^n \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) \cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(r, \varphi) \sin n\varphi d\varphi,$$

$$r^n \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(r, \varphi) \cos n\varphi d\varphi = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

С помощью этих равенств получаем формулы (1)  $\forall n \in \mathbb{N}$ . В случае  $n = 0$  формулы (1) получаем сразу из (2). ►

5. Пусть сумма степенного ряда  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  с кругом сходимости  $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  удовлетворяет условию  $\operatorname{Re} f(z) > 0 \quad \forall z \in K_1$ . Доказать, что  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq 2u_0$ , где  $u_0 = \operatorname{Re} f(0)$ .

◀ Согласно формуле (1) предыдущей задачи имеем

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Оценим  $a_n$ . Получим

$$|a_n| \leq \frac{2}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) d\varphi = \frac{2u_0}{r^n}.$$

Принимая во внимание, что  $r \in (0, 1)$  — произвольное, имеем

$$|a_n| \leq 2u_0. \quad \blacktriangleright$$

6. Найти первые четыре члена, отличные от нуля, разложения функции  $z \mapsto f(z) = \sqrt{\cos z}$  ( $f(0) = 1$ ) в окрестности точки  $z = 0$ . Найти радиус сходимости ряда.

◀ Воспользуемся представлением функции  $f$  в виде

$$f(z) = \sqrt{\cos z} = (1 - (1 - \cos z))^{\frac{1}{2}} = (1 - w)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда  $\forall z \in \mathbb{C}$  получим:

$$w = 1 - \cos z = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^8}{8!} + \dots, \quad (1-w)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{w}{2} - \frac{1}{8}w^2 - \frac{1}{16}w^3 - \frac{5}{128}w^4 - \dots, \quad |w| < 1,$$

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} - \dots \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \dots \right)^2 - \frac{1}{16} \left( \frac{z^2}{2} - \dots \right)^3 - \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} - \dots \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{24} + \dots \right) - \frac{1}{16} \left( \frac{z^6}{8} - \dots \right) + \dots = \\ &= 1 - \frac{z^2}{4} - \frac{z^4}{96} - \frac{19z^6}{5760} - \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что  $R = \frac{\pi}{2}$ , т. к. точка  $z = \frac{\pi}{2}$  — ближайшая к точке  $z = 0$ , в которой нарушается аналитичность функции  $f$ . Заметим, что первые четыре члена разложения функции  $f$  в ряд можно получить непосредственно, вычисляя ее производные в точке  $z = 0$ . ▶

7. Разложить в ряд Тейлора функцию  $z \mapsto f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$  в окрестности точки  $z = 0$  и найти радиус сходимости.

◀ Имеем

$$f(z) = \frac{z}{z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} + \dots} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots + \frac{z^n}{(n+1)!} + \dots}$$

Пусть разложение функции  $f$  в окрестности точки  $z = 0$  имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Тогда

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots) \left( 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots + \frac{z^n}{(n+1)!} + \dots \right) = 1.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $z$ , получим:

$$a_0 \frac{1}{(n+1)!} + a_1 \frac{1}{n!} + \dots + a_{n-1} \frac{1}{2!} + a_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Полученные уравнения позволяют последовательно находить числа  $a_n$ . Обозначим  $B_n = n!a_n$ . Коэффициенты  $B_n$  называются *числами Бернулли*. Для их определения имеем

$$B_0 = 1; \quad \frac{1}{(n+1)!} + \frac{B_1}{1n!} + \frac{B_2}{2!(n-1)!} + \dots + \frac{B_n}{n!1!} = 0.$$

Умножив обе части последнего равенства на  $(n+1)!$  и замечая, что  $\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k$ , получаем:

$$1 + B_1 C_{n+1}^1 + B_2 C_{n+1}^2 + \dots + B_n C_{n+1}^n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

С помощью последней формулы находим:

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad \dots$$

Искомое разложение имеет вид

$$\frac{z}{e^z - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!} z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \dots + \frac{B_n}{n!} z^n + \dots$$

Радиус сходимости этого ряда  $R = 2\pi$ , так как ближайшие к началу координат точки, в которых нарушается аналитичность функции  $f - z = \pm 2\pi i$ . ►

**8.** Найти радиус сходимости и исследовать поведение на границе круга сходимости следующих степенных рядов:

$$a) \sum (-1)^n \frac{z^{3n-1}}{\ln n} \quad (n > 1); \quad б) \sum \frac{4^n}{n} z^{kn}, \quad k = \text{const}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

◀ а) Очевидно,

$$a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{\ln n}, & \text{если } k = 3n - 1, \\ 0, & \text{если } k \neq 3n - 1, \end{cases} \quad R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)^{\frac{1}{3n-1}} = 1.$$

На границе круга сходимости  $z = e^{i\theta}$  и в этих точках получаем числовой ряд

$$\sum \frac{(-1)^n}{\ln n} e^{i(3n-1)\theta} = e^{-i\theta} \sum \frac{e^{i n(3\theta - \pi)}}{\ln n}.$$

Если  $3\theta - \pi = 2m\pi$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ), то ряд расходится. Если  $3\theta - \pi \neq 2m\pi$ , то ряд сходится по признаку Дирихле.

б) Здесь

$$a_m = \begin{cases} \frac{4^n}{n}, & \text{если } m = kn, \\ 0, & \text{если } m \neq kn, \end{cases} \quad R = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4^n}{n}\right)^{\frac{1}{kn}}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{\sqrt[k]{4}}.$$

На границе круга сходимости, т. е. при  $z = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt[k]{4}}$ , получаем числовой ряд  $\sum \frac{e^{ikn\theta}}{n}$ . Если  $k\theta = 2j\pi$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ), то он расходится, поскольку превращается в гармонический ряд. Если  $k\theta \neq 2j\pi$ , то ряд сходится по признаку Дирихле. ►

**9.** Существуют ли функции  $f$ , аналитические в точке  $z = 0$ , удовлетворяющие условиям:

$$a) f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}; \quad б) f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3n+1}?$$

◀ а) Существует, это функция  $z \mapsto z^2$ .

б) Применим метод рассуждения от противоположного. Предположим, что функция  $f$  с указанным свойством существует. Рассмотрим функцию  $f_1$ , где  $f_1(z) = \frac{z}{z+3}$ . Она удовлетворяет условию  $f_1\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3n+1}$ , т. е. совпадает с функцией  $f$  на бесконечной последовательности точек  $(x_n)$ , где  $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . По теореме единственности  $f(z) \equiv f_1(z)$  в окрестности точки  $z = 0$ . Однако,  $f_1\left(-\frac{1}{n}\right) \neq \frac{1}{3n+1}$ . Получили противоречие, источник которого в предположении, что функция  $f$  с указанным свойством существует. ►

**10.** Найти радиусы сходимости следующих степенных рядов:

- 1)  $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$ ;      2)  $\sum z^{n!}$ ;      3)  $\sum z^{2^n}$ ;  
 4)  $\sum (3 + (-1)^n) z^n$ ;      5)  $\sum z^n \cos in$ ;      6)  $\sum (n + a^n) z^n$ .

◀ 1) Применим формулу (5), п. 1.6. Получим

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

2) Степенной ряд имеет вид  $\sum a_k z^k$ , где  $a_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = n!, \\ 0, & \text{если } k \neq n!, \end{cases}$  следовательно,

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}} = 1.$$

3) Аналогично случаю 2) имеем  $R = 1$ .

4) Поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(3 + (-1)^n)} = 4$ , то, согласно формуле Коши—Адамара,  $R = \frac{1}{4}$ .

5)  $a_n = \cos in = \frac{e^{in} + e^{-in}}{2}$ . Согласно формуле Коши—Адамара

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{n}{2} \sqrt{1+e^{-2n}}}}{2^{\frac{1}{2n}}}} = \frac{1}{e}.$$

6) Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n + a^n|} = \begin{cases} 1, & \text{если } |a| \leq 1, \\ |a|, & \text{если } |a| > 1, \end{cases}$  то  $R = \begin{cases} 1, & \text{если } |a| \leq 1, \\ \frac{1}{|a|}, & \text{если } |a| > 1. \end{cases}$  ▶

**11.** Исследовать поведение на границе круга сходимости степенных рядов:

- 1)  $\sum \frac{(-1)^n}{n} z^n$       2)  $\sum \frac{z^{n!}}{n^2}$ ;      3)  $\sum \frac{n}{2^n} z^n$ .

◀ 1) Согласно формуле (5), п. 1.6,  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ . На границе круга сходимости получаем числовой ряд

$$\sum \frac{(-1)^n e^{in\theta}}{n} = \sum (-1)^n \frac{\cos n\theta}{n} + i \sum (-1)^n \frac{\sin n\theta}{n}.$$

Если  $\theta = \pi$ , то ряд расходится. Для всех остальных значений  $\theta$  ряд сходится, так как оба числовых ряда сходятся по признаку Дирихле. Поскольку на границе круга сходимости  $\left| \frac{(-1)^n z^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$ , то ряд в этих точках абсолютно расходится.

2) Записав ряд в виде  $\sum a_k z^k$ , видим, что его коэффициенты равны

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & \text{если } k = n!, \\ 0, & \text{если } k \neq n!, \end{cases}$$

следовательно,

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n!]{n^2} = 1.$$

На границе круга сходимости  $|a_k z^k| = \frac{1}{n^2}$ , поэтому в точках указанной границы ряд сходится абсолютно.

3) По формуле Коши—Адамара

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}} = 2.$$

На границе круга сходимости получаем числовой ряд  $\sum n$ , очевидно, расходящийся. ▶

12. Найти сумму ряда  $\sum n z^n$ ,  $|z| < 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

◀ Пусть  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ . Рассмотрим функцию  $\varphi$ , где  $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ . Дифференцируя

функцию  $\varphi$  в круге сходимости, получим  $\varphi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$ . Умножая левую и правую части полученного равенства на  $z$ , имеем:

$$f(z) = z\varphi'(z) = \frac{z}{(1-z)^2}. \blacktriangleright$$

13. Найти сумму ряда  $\sum \frac{z^n}{n}$ .

◀ Радиус сходимости ряда  $R = 1$ . Если  $|z| < 1$ , то  $\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ . Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z). \blacktriangleright$$

14. Найти сумму ряда  $\sum \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ .

◀ Радиус сходимости ряда  $R = 1$ . Если  $|z| < 1$ , то

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}, \quad \ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Тогда

$$\ln(1+z) - \ln(1-z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}. \blacktriangleright$$

15. Разложить в степенной ряд функцию  $z \mapsto \sin^2 z$ .

◀ Воспользуемся равенством  $\sin^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2}$  и разложением в степенной ряд функции  $z \mapsto \cos z$  в п. 1.7. Получим:

$$\sin^2 z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}. \blacktriangleright$$

16. Разложить в степенной ряд функцию  $z \mapsto \operatorname{ch}^2 z$ .

◀ Принимая во внимание равенство  $\operatorname{ch}^2 z = \frac{1 + \operatorname{ch} 2z}{2}$  и разложение функции  $z \mapsto \operatorname{ch} z$  в степенной ряд в п. 1.7, имеем

$$\operatorname{ch}^2 z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} z^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}. \blacktriangleright$$

17. Разложить в степенной ряд функцию  $z \mapsto \sqrt{z+i}$ .

При выполнении неравенства  $|z| < 1$  получим (см. п. 1.7):

$$\begin{aligned} (z+i)^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{i} \left(1 + \frac{z}{i}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{z}{i} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} \left(\frac{z}{i}\right)^2 + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \dots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \left(\frac{z}{i}\right)^n + \dots\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{z}{2i} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \left(\frac{z}{i}\right)^n\right). \blacktriangleright \end{aligned}$$



**18.** Разложить в степенной ряд функцию  $z \mapsto \frac{1}{az+b}$ .

◀ При  $|z| < \left| \frac{b}{a} \right|$  имеем

$$\frac{1}{az+b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a}{b}z} = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n z^n}{b^n}. \blacktriangleright$$

**19.** Разложить в степенной ряд функцию  $z \mapsto \frac{z}{z^2 - 4z + 13}$ .

◀ Раскладывая функцию на простые дроби, получим:

$$\frac{z}{z^2 - 4z + 13} = \frac{z}{6i} \left( \frac{1}{z - 2 - 3i} - \frac{1}{z - 2 + 3i} \right) = \frac{z}{6i} \left( -\frac{1}{2 + 3i} \frac{1}{1 - \frac{z}{2+3i}} + \frac{1}{2 - 3i} \frac{1}{1 - \frac{z}{2-3i}} \right).$$

При выполнении неравенства  $|z| < \sqrt{13}$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{z}{z^2 - 4z + 13} &= \frac{z}{6i} \left( -\frac{1}{2 + 3i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2 + 3i)^n} + \frac{1}{2 - 3i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2 - 3i)^n} \right) = \\ &= \frac{z}{6i} \left( -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2 + 3i)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2 - 3i)^{n+1}} \right) = \frac{1}{6i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 + 3i)^{n+1} - (2 - 3i)^{n+1}}{13^{n+1}} z^{n+1} = \\ &= \frac{i}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 - 3i)^n - (2 + 3i)^n}{13^n} z^n. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**20.** Разложить в степенной ряд функцию  $z \mapsto \frac{z^2}{(1+z)^2}$ .

◀ При  $|z| < 1$  имеем  $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ . Дифференцируя, получим:

$$-\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1}, \quad \frac{z^2}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{n+1}. \blacktriangleright$$

**21.** Разложить в степенной ряд функцию  $z \mapsto \operatorname{Arctg} z$ .

Имеем при  $|z| < 1$

$$\operatorname{Arctg} z = \int_0^z \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^z t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}. \blacktriangleright$$

**22.** Разложить в степенной ряд  $\int_0^z e^{t^3} dt$ .

◀ Очевидно,

$$\int_0^z e^{t^3} dt = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \quad R = \infty. \blacktriangleright$$

23. Разложить в степенной ряд  $\int_0^z \frac{\sin t}{t} dt$ .

◀ Имеем

$$\int_0^z \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^z \left( \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)} \rightarrow$$

## § 2. Ряд Лорана и изолированные особые точки аналитических функций

### 2.1. Теорема Лорана.

Среди функциональных рядов, отличных от степенных, наиболее близким к степенному является ряд вида  $\sum \frac{c_n}{(z-z_0)^n}$ . Его область сходимости — внешность круга радиуса  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$  с центром в точке  $z_0$ , которая при  $r = \infty$  вырождается в бесконечно удаленную точку, при  $0 < r < \infty$  — это внешность круга в собственном смысле слова, а при  $r = 0$  совпадает с плоскостью  $\mathbb{C}$ , из которой выброшена точка  $z = z_0$ . Если  $r < \infty$ , то ряд сходится абсолютно и равномерно внутри области  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$ . Следовательно, его сумма  $f$  является аналитической функцией в  $D$  и  $f(\infty) = c_0$ . При этом говорят, что функция  $f$  аналитическая в бесконечно удаленной точке.

**Теорема 1** (Лорана). Любую функцию  $f$ , аналитическую в кольце

$$V_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}, \quad r \geq 0, \quad R \leq \infty,$$

можно представить в этом кольце как сумму сходящегося ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (1)$$

где  $a_n$  определяются по формулам

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

$\Gamma_\rho = (\gamma_\rho, \gamma_\rho^{\text{op}})$ ,  $\gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$ ,  $r < \rho < R$ .

◀ Фиксируем любую точку  $z \in V_{r,R}$  и рассмотрим кольцо

$$V_{r',R'} = \{z \in \mathbb{C} : r' < |z - z_0| < R'\} \subseteq V_{r,R}.$$

По формуле Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V_{r',R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in V_{r',R'}. \quad (3)$$

Здесь кривые  $\Gamma_{R'}$  и  $\Gamma_{r'}$  положительно ориентированы. Для любой точки  $\zeta \in \Gamma_{R'}$

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{R'} = q < 1.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \quad (4)$$

Ряд (4) абсолютно и равномерно сходится по  $\zeta \in \Gamma_{R'}$ .

Если  $\zeta \in \gamma_{r'}$ , то

$$\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{r'}{|z - z_0|} = q < 1.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(z - z_0) \left(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}. \quad (5)$$

Ряд (5) равномерно сходится относительно  $\zeta \in \gamma_{r'}$ . Подставив (4) и (5) в (3), получим:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^{-n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r'}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n}},$$

или

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{Z}_0), \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r'}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \quad (-k \in \mathbb{N}).$$

По теореме Коши интегралы по ориентированным окружностям  $\Gamma_{R'}$  и  $\Gamma_{r'}$  можно заменить интегралами по любой положительно ориентированной окружности  $\Gamma_\rho = (\gamma_\rho, \gamma_\rho^{\text{op}})$ , где  $\gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$ ,  $r' < \rho < R'$ . ►

Ряд (1), коэффициенты которого вычисляются по формулам (2), называется *рядом Лорана функции  $f$  в кольце  $V_{r,R}$* .

Рассмотрим отдельно те два ряда, из которых состоит ряд (1). Первый из них

$$\sum a_n (z - z_0)^n$$

есть обычный степенной ряд. Его областью сходимости является круг  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ , где  $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Второй ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

является степенным относительно  $z' = \frac{1}{z - z_0}$ . Выше было указано, что его областью сходимости является внешность круга радиуса  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$ .

Если  $r \geq R$ , то область сходимости ряда  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  есть пустое множество. Если же  $r < R$ , то его областью сходимости является кольцо  $V_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ . Из теоремы Абеля следует, что ряд Лорана сходится равномерно на любом компакте, принадлежащем кольцу  $V_{r,R}$ . Согласно теореме Вейерштрасса, сумма ряда Лорана является аналитической функцией в этом кольце.

Ряд  $\sum a_n (z - z_0)^n$  называется *правильной частью* ряда Лорана, а ряд  $\sum a_{-n} (z - z_0)^{-n}$  носит название его *главной части*.

Пусть  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  и ряд  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}_0} c_n (z - z_0)^n$  сходится равномерно в кольце  $V_{r,R}$ . Умножив на  $(z - z_0)^{-k-1}$  обе части равенства  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

и интегрируя полученный ряд почленно по ориентированной окружности  $\Gamma_\rho = (\gamma_\rho, \gamma_\rho^{\text{оп}})$ ,  $\gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$ ,  $r < \rho < R$ , получим:

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\Gamma_\rho} (z - z_0)^{n-k-1} dz.$$

Принимая во внимание, что

$$\int_{\Gamma_\rho} (z - z_0)^{n-k-1} dz = \int_0^{2\pi} \rho^{n-k} e^{i(n-k)t} i dt = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq k, \\ 2\pi i, & \text{если } n = k, \end{cases}$$

имеем

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

Мы доказали следующее утверждение.

**Теорема 2.** Любой ряд  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}_0} c_n (z - z_0)^n$  в кольце сходимости  $V_{r,R}$  является рядом Лорана своей суммы.

Из этой теоремы, в частности, следует, что разложение аналитической функции  $f$  в кольце  $V_{r,R}$  в ряд по целым степеням  $z - z_0$  единственное.

Формула (2) для коэффициентов ряда Лорана на практике применяется редко, поскольку требуется вычислять интегралы. Поэтому для получения лорановских разложений можно воспользоваться любым законным приемом.

## 2.2. Классификация изолированных особых точек в $\mathbb{C}$ .

**Определение.** Точка  $a \in \mathbb{C}$  называется *изолированной особой точкой функции  $f$* , если существует такая проколотая окрестность этой точки, т. е. кольцо  $V_{0,R} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < R\}$  с нулевым внутренним радиусом, в котором функция  $f$  аналитическая.

Пусть  $z = a \in \mathbb{C}$  — изолированная особая точка функции  $f$ . Рассмотрим разложение функции  $f$  в ряд Лорана в кольце  $V_{0,R}$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n. \quad (1)$$

В зависимости от вида разложения (1) различают три типа изолированных особых точек.

1) Если в разложении (1) отсутствует главная часть, т. е. члены с отрицательными степенями, то точка  $z = a$  называется *устраняемой особой точкой функции  $f$* .

2) Если в разложении (1) главная часть содержит конечное число членов, то точка  $z = a$  называется *полюсом функции  $f$* . При этом, если  $c_{-1} = c_{-2} = \dots = c_{-(n-1)} = 0$ , а  $c_{-n} \neq 0$ , то число  $n$  называется *порядком полюса*. Полюс первого порядка называют также *простым полюсом*.

3) Если в разложении (1) главная часть содержит бесконечное число членов, то точка  $z = a$  называется *существенно особой точкой*.

**Пример 1.** Функция  $z \mapsto f(z) = \frac{\sin z}{z}$  аналитическая в кольце  $V_{0,\infty} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$ . Ее разложение в ряд имеет вид

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots,$$

из которого следует, что  $z = 0$  — *устраняемая особая точка функции  $f$* .

**Пример 2.** Функция  $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z^2 + 4}$  имеет две изолированные особые точки  $z_1 = 2i$ ,  $z_2 = -2i$ . Разложим функцию  $f$  в ряд Лорана в проколотой окрестности точки  $z_1$   $V_{0,4}^{(1)} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - 2i| < 4\}$ . Получим:

$$\frac{1}{z^2 + 4} = -\frac{i}{4(z - 2i)} + \frac{i}{4(z + 2i)} = -\frac{i}{4(z - 2i)} + \frac{1}{16 \left(1 + \frac{z - 2i}{4i}\right)} = -\frac{i}{4(z - 2i)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{4^{n+2}} (z - 2i)^n.$$

Отсюда заключаем, что точка  $z = 2i$  является простым полюсом функции  $f$ .

Аналогично получим разложение функции  $f$  в ряд Лорана в проколотой окрестности точки  $z_2$ .  $V_{0,4}^{(2)} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z + 2i| < 4\}$ , с помощью которого убедимся в том, что точка  $z_2 = -2i$  также является простым полюсом функции  $f$ .

**Пример 3.** Функция  $z \mapsto f(z) = \sin \frac{1}{z-1}$  аналитическая в проколотой окрестности  $V_{0,\infty} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-1| < \infty\}$ . Разложение этой функции в ряд Лорана в  $V_{0,\infty}$  имеет вид

$$\sin \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \dots,$$

из которого следует, что  $z = 1$  — существенно особая точка функции  $f$ .

### 2.3. Поведение аналитической функции при подходе к изолированной особой точке.

Поведение аналитической функции в окрестности устранимой особой точки полностью описывается следующими двумя утверждениями.

**Теорема 1.** Если при подходе к изолированной особой точке  $z = a$  функция  $f$  ограниченная или имеет порядок роста меньше единицы, то  $z = a$  — устранимая особая точка.

◀ Пусть функция  $f$  в окрестности точки  $z = a$  удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| < \frac{M}{|z-a|^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

Тогда  $\forall n \in \mathbb{N}$  получим:

$$|c_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} f(z)(z-a)^{n-1} dz \right| \leq \frac{M}{2\pi} \rho^{n-\alpha-1} 2\pi\rho = M\rho^{n-\alpha}.$$

Принимая во внимание, что  $n-\alpha > 0$ , а  $\rho$  можно выбрать как угодно малым, имеем  $c_{-n} = 0$   $\forall n \in \mathbb{N}$ . Следовательно,  $z = a$  — устранимая особая точка. ▶

**Теорема 2.** При подходе к устранимой особой точке  $z = a$  функция  $f$  имеет конечный предел, и если его принять в качестве значения функции в точке  $z = a$ , то  $f$  становится аналитической функцией в точке  $a$ .

◀ При  $z \in V_{0,R} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < R\}$   $f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n$ , откуда  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$ .

Доопределим функцию  $f$  в точке  $z = a$  равенством  $f(a) = c_0$ . Тогда разложение  $f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n$  будет справедливым в круге  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ . Ряд Лорана преобразуется в ряд Тейлора, а функция  $f$  становится аналитической в круге  $K_R$  и, в частности, в точке  $z = a$ . ▶

В дальнейшем, как правило, будем считать устранимые особые точки точками аналитичности соответствующих функций.

Поведение функции в окрестности полюса устанавливается следующей теоремой.

**Теорема 3.** Изолированная особая точка  $z = a$  функции  $f$  является полюсом тогда и только тогда, когда

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty. \quad (1)$$

◀ Необходимость. Пусть  $z = a$  — полюс функции  $f$  порядка  $p$ . При  $z \in V_{0,R}$  имеем

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + \frac{c_{-p+1}}{(z-a)^{p-1}} + \dots = \sum_{n=-p}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad c_{-p} \neq 0.$$

Отсюда

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^p} \sum_{n=-p}^{\infty} c_n(z-a)^{p+n} = \frac{1}{(z-a)^p} \sum_{n=0}^{\infty} c'_n(z-a)^n = \frac{1}{(z-a)^p} f_1(z), \quad (2)$$

где  $f_1$  — аналитическая в круге  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$  функция,  $f_1(a) = c'_0 = c_{-p} \neq 0$ . Из (2) следует (1).

Итак, при подходе к полюсу функции  $f$  она стремится к бесконечности, и чем выше порядок полюса, тем быстрее это стремление.

**Достаточность.** Пусть  $z = a$  — изолированная особая точка функции  $f$  и  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ . Очевидно, существует проколота окрестность точки  $a$ , в которой  $f(z) \neq 0$ . Поэтому точка  $z = a$  является изолированной особой точкой функции  $z \mapsto \varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$  и  $\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = 0$ , т. е.  $a$  — устранимая особая точка функции  $\varphi$ . Устраним ее, полагая  $\varphi(0) = 0$ , и пусть  $z = a$  — нуль функции  $\varphi$  кратности  $p$ . Тогда согласно формуле (3), п. 1.8., имеем

$$\varphi(z) = (z - a)^p \varphi_1(z),$$

где  $\varphi_1(z) \neq 0$  в окрестности точки  $z = a$ . Следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{(z - a)^p \varphi_1(z)} = \frac{1}{(z - a)^p} \psi(z),$$

где  $\psi$  — аналитическая в точке  $z = a$  функция и  $\psi(a) \neq 0$ . Представим ее в окрестности точки  $z = a$  рядом Тейлора:

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad c_0 = \psi(a) \neq 0.$$

Тогда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^{n-p},$$

т. е. точка  $z = a$  — полюс функции  $f$  порядка  $p$ . ►

**Следствие.** Точка  $z = a$  является полюсом функции  $f$  порядка  $p$  тогда и только тогда, когда функция  $\varphi = \frac{1}{f}$  ( $\varphi \neq 0$ ) аналитическая в точке  $a$ , и точка  $a$  — ее нуль кратности  $p$ .

Из проведенных выше рассуждений следует такое утверждение.

**Теорема 4.** Для того чтобы изолированная особая точка  $z = a$  функции  $f$  была ее существенно особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы  $f$  не имела предела при  $z \rightarrow a$ .

Углублением и уточнением теоремы 4 является следующее утверждение.

**Теорема 5 (Сохотского).** В окрестности существенно особой точки аналитическая функция принимает значения как угодно близкие любому наперед заданному числу расширенной комплексной плоскости. Другими словами, если  $z = a$  — существенно особая точка функции  $f$ , то  $\forall A \in \overline{\mathbb{C}}$  найдется такая последовательность  $(z_n)$ ,  $z_n \rightarrow a$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ .

◀ 1) Пусть  $A = \infty$ . Функция  $f$  не может быть ограниченной в окрестности точки  $z = a$ , поскольку в противном случае точка  $a$  была бы устранимой особой точкой. Поэтому в проколота окрестности  $V_{0,R} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < R\}$  найдется такая точка  $z_1$ , что  $|f(z_1)| > 1$ . Возьмем проколотую окрестность  $V_{0, \frac{|z_1 - a|}{2}} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < \frac{|z_1 - a|}{2}\}$ . В ней найдется такая точка  $z_2$ , что  $|f(z_2)| > 2$  и т. д. В проколота окрестности  $V_{0, \frac{|z_1 - a|}{n}} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < \frac{|z_1 - a|}{n}\}$  найдется такая точка  $z_n$ , что  $|f(z_n)| > n$ . Очевидно, что  $z_n \rightarrow a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = +\infty$ .

2)  $A \neq \infty$ . Здесь возможны два случая: 1')  $A$ -точки функции  $f$  имеют  $a$  своей предельной точкой. Тогда, очевидно, найдется такая последовательность  $(z_n)$ ,  $z_n \rightarrow a$ , что  $f(z_n) \rightarrow A$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, утверждение справедливо. 2') существует проколота окрестность точки  $z = a$ , в которой  $f(z) \neq A$ . Тогда для функции  $z \mapsto \varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$  точка  $z = a$  является изолированной особой точкой. Установим ее характер. Рассмотрим возможные случаи. Допустим, что  $a$  — устранимая особая точка функции  $\varphi$ . Тогда  $\varphi$  имеет конечный предел при подходе к ней:  $\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = B$  и  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A + \frac{1}{B}$ . Отсюда следует, что если  $B \neq 0$ , то  $z = a$  является устранимой особой точкой функции  $f$ , а при  $B = 0$  точка  $z = a$  — полюс функции  $f$ . Обе возможности противоречат условию теоремы. Следовательно,  $z = a$  не может быть устранимой особой точкой функции  $\varphi$ .

Допустим теперь, что  $z = a$  — полюс функции  $\varphi$ , т. е.

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = \infty \wedge \lim_{z \rightarrow a} f(z) = A.$$

Следовательно,  $z = a$  — устранимая особая точка функции  $f$ , что снова противоречит условию теоремы. Таким образом, остается единственный возможный случай, что  $z = a$  — существенно особая точка функции  $\varphi$ . Тогда, согласно доказанному в 1), существует такая последовательность  $(z_n)$ ,  $z_n \rightarrow a$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(z_n) = \infty \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ . ►

Рассмотрим пример.

Пусть  $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$ ,  $z \in V_{0, \infty} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$ . Здесь  $a = 0$  — существенно особая точка функции  $f$ . С помощью очевидных соотношений

$$\lim_{z=x>0} e^{\frac{1}{z}} = \infty, \quad \lim_{z=x<0} e^{\frac{1}{z}} = 0$$

проверяем утверждение теоремы Сохоцкого для  $A = \infty$  и  $A = 0$ . Пусть  $A \neq \infty$ . Решим уравнение  $e^{\frac{1}{z}} = A$ :

$$\frac{1}{z} = \operatorname{Ln} A, \quad z = \frac{1}{\operatorname{Ln} A} = \frac{1}{\ln |A| + i \operatorname{Arg} A} = \frac{1}{\ln |A| + i(\arg A + 2n\pi)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть

$$z_n = \frac{1}{\ln |A| + i(\arg A + 2n\pi)}.$$

Очевидно, что  $z_n \rightarrow 0$ ,  $e^{\frac{1}{z_n}} = A$ , следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{z_n}} = A$ .

Характерным в этом примере является то, что за исключением значений 0 и  $\infty$ , все остальные значения  $A$  достигаются не в пределе, а на целой последовательности. Оказывается, что это не случайность, а общая тенденция. Об этом свидетельствует *теорема Пикара*, уточняющая теорему Сохоцкого и утверждающая, что в окрестности существенно особой точки функция  $f$  принимает, причем бесконечное число раз, любое конечное значение, за исключением, может быть, одного. Этим случаем для  $e^{\frac{1}{z}}$  является нуль.

## 2.4. Бесконечная изолированная особая точка.

Пусть  $f$  — аналитическая функция в области  $V_{R, \infty} = \{z \in \mathbb{C} \mid R < |z| < \infty\}$ . Это означает, что точка  $z = \infty$  является изолированной особой точкой функции  $f$ . Представим функцию  $f$  в окрестности бесконечности рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n. \quad (1)$$

Члены ряда  $\sum c_n z^n$  с неположительными степенями  $z$  образуют его правильную часть, а с положительными — его главную часть.

Характер особой точки  $z = \infty$  определяется, как и в случае конечной особой точки, главной частью ряда Лорана, а именно: точка  $z = \infty$  является соответственно устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой в зависимости от того, отсутствует ли главная часть в разложении (1), содержит ли главная часть конечное или бесконечное число членов.

Например, функция  $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z}$  имеет на бесконечности устранимую особую точку, функция  $z \mapsto \varphi(z) = z$  имеет на бесконечности полюс первого порядка, а функция

$$z \mapsto \psi(z) = \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

имеет на бесконечности существенно особую точку.

**Замечание 1.** Все сказанное в п. 3.2 о поведении аналитической функции вблизи конечной изолированной особой точки справедливо и в случае, когда  $z = \infty$  является изолированной особой точкой.

**Замечание 2.** Если  $z = \infty$  является изолированной особой точкой функции  $f$ , то  $\zeta = 0$  — изолированная особая точка функции  $\zeta \mapsto \varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ . Лорановское разложение которой в окрестности  $\zeta = 0$  получаем из разложения (1) заменой  $z = \frac{1}{\zeta}$ .

**Замечание 3.** Поведение аналитической функции при подходе к изолированной особой точке полностью определяет характер особенности этой точки. Это свойство можно положить в основу классификации изолированных особых точек, а именно, если при подходе к изолированной особой точке  $z = a$  функция имеет конечный предел, то эта точка называется устранимой особой точкой. Если предел существует и равен бесконечности, то  $z = a$  называется полюсом. Если же при подходе к точке  $z = a$  функция предела не имеет, то эта точка называется существенно особой.

Рассмотрим примеры.

**24.** Разложить в ряд Лорана в кольце  $V_{1,2} = \{0 < |z-1| < 2\}$  функцию  $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z(z-3)^2}$ .

◀ Очевидно, справедливо разложение функции  $f$  на простые дроби

$$\frac{1}{z(z-3)^2} = \frac{1}{9z} - \frac{1}{9(z-3)} + \frac{1}{3(z-3)^2}. \quad (1)$$

После некоторых преобразований дроби в правой части равенства (1) можно рассматривать как суммы бесконечно убывающих прогрессий. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{1}{(z-1)\left(1+\frac{1}{z-1}\right)} = \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-n-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n-1} (z-1)^n, \quad |z-1| > 1, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-1)-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (z-1)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}, \quad |z-1| < 2,$$

$$\frac{1}{(z-3)^2} = -\left(\frac{1}{z-3}\right)' = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} (z-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} (z-1)^n, \quad |z-1| < 2,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-3)^2} &= \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{9} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{9 \cdot 2^{n+1}} + \frac{n+1}{3 \cdot 2^{n+2}} \right) (z-1)^n = \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{9} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+5}{9 \cdot 2^{n+2}} (z-1)^n \quad \forall z \in V_{1,2}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**25.** Найти множество точек  $z$ , в которых сходится ряд  $\sum \frac{z^n}{3^n+1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

◀ Обозначим

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{-n}+1} \cdot \frac{1}{z^n} = f_1(z) + f_2(z),$$

предполагая, что функции  $f_1$  и  $f_2$  определены на некотором множестве. Ряд  $\sum \frac{z^n}{3^n+1}$  сходится в круге  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ , где

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n+1} = 3.$$



Областью сходимости ряда  $\sum \frac{1}{3^{-n+1}} \cdot \frac{1}{z^n}$  является множество  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ , где  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^{-n+1}}} = 1$ . Таким образом, заданный ряд сходится в кольце  $V_{1,3} = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$ . ►

**26.** Функцию  $z \mapsto f(z) = z^2 \sin \pi \frac{z+1}{z}$  разложить в ряд Лорана в кольце  $V_{0,\infty} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\}$ .

◀ Имеем

$$\begin{aligned} z^2 \sin \pi \frac{z+1}{z} &= z^2 \sin \pi \left(1 + \frac{1}{z}\right) = -z^2 \sin \frac{\pi}{z} = -z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{z}\right)^{2n+1} = \\ &= -\pi z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{-2n+1}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**27.** Функцию Бесселя 1-го рода  $n$ -го порядка  $\mathcal{J}_n(z)$  при целых  $n$  можно определить как коэффициент при  $\zeta^n$  разложения в ряд Лорана функции  $\zeta \mapsto e^{\frac{z}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})}$  в кольце  $V_{0,\infty} = \{\zeta \in \mathbb{C} : 0 < |\zeta| < \infty\}$ :

$$e^{\frac{z}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(z) \zeta^n.$$

Доказать, что

$$\mathcal{J}_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}.$$

◀ По формуле (2), п. 2.1, имеем

$$\mathcal{J}_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{e^{\frac{z}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})}}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad 0 < \rho < \infty.$$

При  $\rho = 1$  получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{e^{\frac{z}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})}}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \theta} e^{-in\theta} i d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z \sin \theta - n\theta)} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(z \sin \theta - n\theta) d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(z \sin \theta - n\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Далее,

$$e^{\frac{z}{2}\zeta} e^{-\frac{z}{2\zeta}} = \left(1 + \left(\frac{z}{2}\right)\zeta + \frac{1}{2!} \left(\frac{z}{2}\right)^2 \zeta^2 + \dots\right) \left(1 - \frac{z}{2}\zeta^{-1} + \frac{1}{2!} \left(\frac{z}{2}\right)^2 \zeta^{-2} + \dots\right).$$

Отсюда находим:

$$\mathcal{J}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}. \quad \blacktriangleright$$

**28.** Найти главную часть ряда Лорана в окрестности точки  $z_0 = \infty$  функции

$$z \mapsto (2z^3 + z) \ln \frac{z}{1-z},$$

если выбранная ветвь логарифма действительна на верхнем берегу радиуса  $[0, 1]$ .

◀ Имеем

$$\begin{aligned} (2z^3 + z) \ln \frac{z}{1-z} &= (2z^3 + z) \ln \left( \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} \right) = (2z^3 + z) \left( \ln \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} + i\pi \right) = (2z^3 + z) \left( -\ln \left( 1 - \frac{1}{z} \right) + i\pi \right) = \\ &= (2z^3 + z) \left( i\pi + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} + \dots \right) = 2i\pi z^3 + i\pi z + 2z^2 + \dots \end{aligned}$$

**29.** Найти особые точки функции  $z \mapsto f(z) = \sin \frac{1}{\cos \frac{1}{z}}$ , установить их характер и исследовать поведение функции  $f$  на бесконечности.

◀ Для функции  $\zeta \mapsto \sin \zeta$  точка  $\zeta = \infty$  является в  $\overline{\mathbb{C}}$  единственной особой точкой, а именно, существенно особой точкой. Следовательно, особые точки функции  $f$  определяются равенством  $\cos \frac{1}{z} = 0$ . Таким образом, функция  $f$  имеет бесконечное множество существенно особых точек  $\{z_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}; n \in \mathbb{Z}\}$ . Точка  $z = 0$  — предельная для указанного множества. Далее,  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \sin 1$ , поэтому  $z = \infty$  — устранимая особая точка функции  $f$ . ▶

**30.** Пусть  $z = a$  является изолированной особой точкой функции  $f$  и  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$ . Доказать, что:

1)  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ , где  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$  — произвольный замкнутый положительно ориентированный жорданов путь, лежащий в проколотой окрестности точки  $a$   $V_{0,R} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < R\}$ .

2)  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ ,  $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < r < R\}$ ,  $\Gamma_r = (\gamma_r, \gamma_r^{\text{op}})$ ,  $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$ .

◀ Точка  $a$  — устранимая особая точка функции  $f$ . Поэтому 1) следует из теоремы Коши, а 2) — из формулы Коши. ▶

**31.** Доказать, что когда  $f$  является аналитической функцией в окрестности точки  $a$   $K_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < R\}$  и не принимает в этой окрестности значений, находящихся в круге  $K_r = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - w_0| < r\}$ , то точка  $z = a$  либо устранимая особая точка, либо полюс.

◀ Справедливость утверждения следует из теоремы Сохоцкого. ▶

**32.** Доказать, что функции  $z \mapsto \text{ch } z$  и  $z \mapsto \text{sh } z$  в окрестности бесконечности принимают все значения из  $\mathbb{C}$ .

◀ Пусть  $A \in \mathbb{C}$ . Решим уравнение  $\text{ch } z = A$ :

$$e^z = A + \sqrt{A^2 - 1} \neq 0, \quad z = \text{Ln} \left( A + \sqrt{A^2 - 1} \right).$$

Пусть  $z_n = \text{Ln} \left| A + \sqrt{A^2 - 1} \right| + i \left( \arg \left( A + \sqrt{A^2 - 1} \right) + 2n\pi \right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty, \quad \text{ch } z_n = A. \quad \blacktriangleright$$

**33.** Определить характер особой точки  $z = 1$  следующих функций:

$$\text{а) } \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 5z + 4}; \quad \text{б) } \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 2z + 1}; \quad \text{в) } (z - 1)e^{\frac{1}{z-1}}.$$

◀ а) Поскольку  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 5z + 4} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-2}{z-4} = \frac{1}{3}$ , то  $z = 1$  — устранимая особая точка для данной функции.

б) В достаточно малой проколотой окрестности  $V_{0,\epsilon}$  точки  $z = 1$

$$\frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 2z + 1} = \frac{(z-1)(z-2)}{(z-1)^2} = \frac{z-2}{z-1},$$

поэтому  $z = 1$  — простой полюс заданной функции.

в) Разложение данной функции в ряд Лорана в окрестности точки  $z = 1$  имеет вид

$$(z-1)e^{\frac{1}{z-1}} = (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^{n-1}} = 1 + z - 1 + \frac{1}{2!(z-1)} + \dots + \frac{1}{n!(z-1)^{n-1}} + \dots$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное множество членов, поэтому  $z = 1$  — существенно особая точка функции  $z \mapsto (z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$ . ►

**34.** Определить характер точки  $z = \infty$  для следующих функций:

$$\text{а) } \frac{z^2 + 2}{z^{10} + 2}; \quad \text{б) } z^4 \cos \frac{1}{z}; \quad \text{в) } z^2 e^{-2z}.$$

◀ Полагая  $z = \frac{1}{\zeta}$ , получим:

$$\frac{z^2 + 2}{z^{10} + 2} = \frac{\zeta^8(1 + 2\zeta^2)}{1 + 2\zeta^{10}}, \quad z^4 \cos \frac{1}{z} = \frac{\cos \zeta}{\zeta^4}.$$

а) Точка  $\zeta = 0$  является нулем восьмого порядка функции  $\zeta \mapsto \frac{\zeta^8(1+2\zeta^2)}{1+2\zeta^{10}}$ , следовательно, точка  $z = \infty$  — нуль восьмого порядка заданной функции.

б) Точка  $\zeta = 0$  — полюс четвертого порядка функции  $\zeta \mapsto \frac{\cos \zeta}{\zeta^4}$ , поэтому точка  $z = \infty$  является полюсом четвертого порядка для данной функции.

в) Разлагая заданную функцию в степенной ряд, получим

$$z^2 e^{-2z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{z^{n+2}}{n!}.$$

Таким образом,  $z = \infty$  — существенно особая точка функции  $z \mapsto z^2 e^{-2z}$ . ►

**35.** Пусть степенной ряд  $\sum a_n z^n$  имеет своим кругом сходимости единичный круг, и на окружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  его сумма  $f$  не имеет никаких других особенностей, кроме полюсов первого порядка. Доказать, что последовательность  $(a_n)$  ограничена.

◀ Так как сумма  $f$  ряда имеет на окружности  $\gamma$  своими особенностями лишь простые полюсы, то этих полюсов может быть лишь конечное число, поскольку в противном случае  $f$  имела бы на границе круга сходимости и неизолированную особую точку. Обозначим эти полюсы через  $s_j$ , ( $j = \overline{1, m}$ ) и рассмотрим функцию

$$z \mapsto \varphi(z) = f(z) - \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{z - z_j},$$

где  $\frac{c_j}{z - z_j}$  — главная часть ряда Лорана функции  $f$  в окрестности точки  $z_j$ , ( $j = \overline{1, m}$ ). Каждая точка  $z_j$  является для функции  $\varphi$  правильной, вследствие чего  $\varphi$  аналитическая как внутри круга  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , так и на окружности  $\gamma$ , т. е. в некотором круге  $K_R$ ,  $R > 1$ . Поэтому справедливо представление

$$f(z) = \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{z - z_j} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad \text{где } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} < 1.$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^{n+1} c_j}{z_j^{n+1}} + b_n \right) z^n \quad \forall z \in K.$$

Отсюда получаем  $\forall n \geq 0$ :

$$a_n = (-1)^{n+1} \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{z_j^{n+1}} + b_n, \quad |a_n| \leq \sum_{j=1}^m |c_j| + |b_n| \leq M = \text{const.} \quad \blacktriangleright$$

36. Для всех значений  $t \in (0, 2\pi)$  найти сумму ряда  $\sum \frac{\sin nt}{n!}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

◀ Обозначив сумму ряда через  $f$ , получим:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n!} = \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int} - e^{-int}}{n!} = \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n - z^{-n}}{n!},$$

где  $z = e^{it}$ ,  $t \in (0, 2\pi)$ . Полученный ряд Лорана сходится в кольце  $V_{0,\infty} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \infty\}$ , содержащем окружность  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ , а его сумма совпадает с функцией  $z \mapsto \frac{1}{2i} (e^z - e^{\frac{1}{z}}) \quad \forall z \in V_{0,\infty}$ . Следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{2i} (e^{e^{it}} - e^{e^{-it}}) = \frac{1}{2i} (e^{\cos t + i \sin t} - e^{\cos t - i \sin t}) = e^{\cos t} \cdot \frac{e^{i \sin t} - e^{-i \sin t}}{2i} = e^{\cos t} \sin(\sin t). \blacktriangleright$$

### Упражнения для самостоятельной работы

1. Найти радиус сходимости каждого из следующих степенных рядов:

а)  $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$ ;    б)  $\sum n! z^{n^2}$ ;    в)  $\sum n^{\ln n} z^{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;

г)  $\sum \frac{(z-i)^{3n}}{3^n + n^2}$ ;    д)  $\sum (n^2 + i \cos n\varphi)(z - 1 + 2i)^n$ .

2. Найти круг сходимости каждого из следующих степенных рядов:

а)  $\sum \frac{(z+i)^n}{2+i^n}$ ;    б)  $\sum n^2 \frac{(z-1-i)^n}{3^n}$ ;    в)  $\sum z^{3^n}$ ;    г)  $\sum (1+i)^{n^2-n} z^{n!}$ ;  
 д)  $\sum (3z)^{n!}$ ;    е)  $\sum (4 + (-1)^n)^n z^n$ ;    ж)  $\sum \frac{(z+1+i)^n}{(3+(-1)^n 4n)^n}$ ;    з)  $\sum \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} z^n$ .

3. Исследовать поведение на границе круга сходимости следующих степенных рядов:

а)  $\sum \frac{z^n}{n \sqrt{n}}$ ;    б)  $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$ ;    в)  $\sum \frac{(-1)^n z^{3n}}{n \ln n}$ ;    г)  $\sum \frac{i \pi n^2}{2} z^n$ ;    д)  $\sum \frac{i \pi n^2}{\sqrt{n}} z^n$ .

4. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 0$  следующие функции:

а)  $z \mapsto \frac{1}{(1-z^2)}$ ;    б)  $z \mapsto \frac{2z-1}{4z^2-2z+1}$ ;    в)  $z \mapsto \frac{1}{(1-z^4)(1+z+z^2+z^3)}$ ;    г)  $z \mapsto \operatorname{ch} z \cos z$ .

5. Коэффициент при  $n$ -й степени в тейлоровском разложении по степеням  $z$  функции  $z \mapsto f(z) = \frac{4-z^2}{4-4z+z^2}$  ( $|t| \leq 1$ ) называется *полиномом Чебышева* и обозначается  $T_n(t)$ . Доказать, что  $T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и  $T_0(t) = 1$ .

6. Разложить в степенные ряды по степеням  $z$  следующие функции:

а)  $f(z) = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{1}{1-z} \right)^2$ ;    б)  $f(z) = \int_0^z e^{t^2} dt$ .

7. По методу неопределенных коэффициентов найти первые три отличные от нуля члена разложения следующих функций в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 0$ :

а)  $f(z) = \frac{z}{(1-z^2) \sin z}$ ;    б)  $f(z) = \frac{z}{\ln(1+z)}$ .

8. Найти разложение в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 0$  функций  $f$ , аналитических в точке  $z = 0$  и удовлетворяющих условиям:

а)  $(1+z^2)f'(z) = 1$ ,  $f(0) = 0$ ;    б)  $f''(z) + zf'(z) = 0$ ;  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$ ;  
 в)  $(1-z^2)f''(z) - 5zf'(z) - 4f(z) = 0$ ;  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$ .

9. Пусть  $f$  и  $g$  — аналитические функции в области  $D$ , причем  $\forall z \in D$  выполняется равенство  $f(z)g(z) = 0$ . Доказать, что тогда либо  $f(z) = 0$  всюду в  $D$ , либо  $g(z) = 0$  всюду в  $D$ .

10. Доказать, что если  $f$  — аналитическая функция в круге  $K_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$  и  $f^{(k)}(0) \geq 0$  ( $k \in \mathbb{Z}_0$ ), то в этом круге справедливо неравенство  $|f(z)| \leq f(|z|)$ .

11. Доказать, что для  $n \in \mathbb{N}$  и  $z \in \mathbb{C}$

$$|e^z - (1 + \frac{z}{n})^n| \leq e^{|z|} - (1 + \frac{|z|}{n})^n \leq e^{|z|} \frac{|z|^2}{2n}.$$

12. Доказать, что если функция  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  является аналитической в круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  и непрерывна на окружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , то ряд  $\sum |a_n|^2$  сходится.

13. Пусть  $a \neq 0$ . Найти области сходимости следующих рядов Лорана:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum a^n z^n &= \sum a^n z^n + \sum a^{-n} z^{-n}; & \text{б) } \sum a^{-n^2} z^n &= \sum a^{-n^2} z^n + \sum a^{-n^2} z^{-n}; \\ \text{в) } \sum a^{-|n|} z^n &= \sum a^{-n} z^n + \sum a^{-n} z^{-n}. \end{aligned}$$

14. Найти разложения в ряды Лорана в соответствующих областях по степеням  $z - z_0$  следующих функций:

$$\text{а) } z \mapsto \frac{ze^{2z}}{z-1}, \quad z_0 = 1; \quad \text{б) } z \mapsto \cos \frac{1}{z^2} + \frac{z}{z-1}, \quad z_0 = 0; \quad \text{в) } z \mapsto \frac{z}{z^2+2z+1}, \quad z_0 = 0.$$

15. Разложить в ряды Лорана в указанных областях следующие функции:

$$\begin{aligned} \text{а) } z \mapsto \frac{z}{(z^2-4)^2(z^2-1)} &\text{ при } 1 < |z| < 2; & \text{б) } z \mapsto \frac{z}{(z^2-4)^2(z^2-1)} &\text{ при } |z| > 2; \\ \text{в) } z \mapsto \operatorname{ctg} z &\text{ при } 0 < |z| < \pi; & \text{г) } z \mapsto \operatorname{ctg} z &\text{ при } \pi < |z| < 2\pi. \end{aligned}$$

16. Показать, что при всех  $z$ :  $0 < |z| < \infty$

$$\text{а) } \operatorname{ch}\left(z + \frac{1}{z}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right), \text{ где } a_n = \frac{2\pi}{1} \int_0^{2\pi} \operatorname{ch}(2 \cos \theta) \cos n\theta \, d\theta;$$

$$\text{б) } e^{z + \frac{1}{2z^2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \text{ где } a_n = \frac{e^{-\frac{6}{2}}}{2\pi c^n} \int_0^{2\pi} \cos(c \sin \theta (1 - \cos \theta) - n\theta) e^{c(\cos \theta + \cos^2 \theta)} \, d\theta.$$

17. Показать, что область сходимости ряда  $\sum \frac{1}{z^n + z^{-n}}$  состоит из внутренности и внешности единичной окружности, и что в каждой из этих частей ряд представляет одну функцию.

18. Определить характер точки  $z = 0$  для следующих функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } e^{\frac{\sin z}{z}}; & \quad \text{б) } \frac{e^z}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}; & \text{в) } (e^z - 1 - z) \operatorname{ctg}^3 z; & \quad \text{г) } \frac{\sin 2z}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}; & \quad \text{д) } e^{\frac{1}{z^2 - z}}. \end{aligned}$$

19. Определить характер точки  $z = \infty$  для следующих функций:

$$\text{а) } \frac{z^2+1}{e^z}; \quad \text{б) } \cos z - \sin z; \quad \text{в) } \frac{z^6+1}{z^3+z}; \quad \text{г) } \frac{z+2}{z^3+4z+3}.$$

20. Найти особые точки следующих функций:

$$\text{а) } \frac{1}{e^z - 1}; \quad \text{б) } \frac{1}{\sin z + \cos z}; \quad \text{в) } \frac{1 - e^z}{1 + e^z}.$$

21. Пусть сумма  $f$  степенного ряда  $\sum a_n z^n$  имеет на границе круга сходимости только одну особую точку  $z_0$  — простой полюс. Показать, что в этом случае  $\frac{a_n}{a_{n+1}} \rightarrow z_0$  и, следовательно,

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \rightarrow R, \text{ где } R \text{ — радиус сходимости ряда.}$$

22. Доказать, что когда точка  $z = a$  является существенно особой точкой функции  $f$ , то она остается существенно особой точкой и для функции  $z \mapsto P(f(z))$ , где  $P(w)$  — многочлен ( $P(w) \neq \operatorname{const}$ ).

23. Доказать, что функциональное уравнение

$$f(z) = f(kz), \quad k \neq 1,$$

не имеет решений, аналитических в точке  $z = 0$  и отличных от тождественной постоянной.

24. Пусть радиусы сходимости рядов  $\sum a_n z^n$  и  $\sum \operatorname{Re} a_n z^n$  равны единице и  $\operatorname{Re} a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_0$ . Доказать, что точка  $z = 1$  является особой для сумм этих рядов.

25. Пусть функция  $f$  — аналитическая в области  $G$  за исключением конечного числа полюсов и  $A \in \mathbb{C}$ . Доказать, что функция  $z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z) - A}$  (логарифмическая производная функции  $f - A$ ) имеет простые полюсы во всех полюсах функции  $f$  и во всех  $A$ -точках этой же функции и не имеет никаких других особых точек.

## Аналитическое продолжение

Аналитическое продолжение является одним из основных и важных понятий комплексного анализа. Оно позволяет лучше понять природу функций комплексного переменного и наиболее естественно определить многозначные аналитические функции.

Выясним, какие данные являются достаточными для определения аналитической функции во всей области ее существования, и как по этим данным можно построить аналитические выражения, определяющие функцию в этой области.

В случае целой рациональной функции степени  $n$  достаточно знать ее значения в  $n+1$  точках, чтобы определить ее на всей плоскости.

Для определения дробно-линейной функции, являющийся отношением двух целых многочленов степени  $m$  и  $n$ , достаточно задать  $m+n+1$  ее значений.

Но уже в случае целой трансцендентной функции недостаточно задать ее значения даже на бесконечном множестве дискретных точек. Например, условие  $f(z) = 0$  при  $z = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) может относиться к функциям  $f(z) = 0$ ,  $f(z) = \sin z$ ,  $f(z) = A \sin z$ ,  $A = \text{const}$ .

В случае целой трансцендентной функции достаточным является, например, задание значений функции и ее производных всех порядков в любой точке  $z_0$ , поскольку по этим данным можно построить степенной ряд

$$\sum f^{(n)}(z_0) \frac{(z - z_0)^n}{n!},$$

сходящийся во всех точках плоскости и, таким образом, определяющий в ней функцию  $f$ .

Для определения функции, аналитической в замкнутой области, достаточно, согласно формуле Коши, знать ее значения на контуре.

Для определения непрерывной функции недостаточно знать даже все ее значения в какой-то области. Например, функцию  $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$  можно продолжить за сегмент  $[a, b]$  неограниченным количеством способов, не нарушая при этом непрерывности функции.

Рассматривая класс аналитических функций, который выделяется из совокупности всех непрерывных функций требованием их дифференцируемости в области, мы увидим, что он имеет такое свойство, которое позволяет определить аналитическую функцию во всей области ее существования, зная:

а) "элемент" этой функции, т. е. степенной ряд

$$\sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

определяющий ее в круге сходимости, или

б) значения этой функции в как угодно малой области, или, наконец,

в) значения ее на как угодно малой дуге некоторой кривой.

После установления этого обстоятельства естественно поставить вопрос о том, как, имея аналитическую в некоторой области  $D$  функцию  $f$ , расширить область определения функции, т. е. построить новую область, содержащую область  $D$ , и определить в ней такую аналитическую функцию, сужение которой на область  $D$  совпадало бы с  $f$ .

Такое расширение области определения аналитической функции называется процессом ее аналитического продолжения, а полученное при этом аналитическое выражение, определяющее функцию в новой области — ее аналитическим продолжением.

Необходимость такого расширения области определения функции возникает, например, при нахождении решения дифференциального уравнения в виде ряда, сходящегося внутри некоторого круга.

# § 1. Основные понятия.

## Аналитическое продолжение вдоль пути

### 1.1. Свойство единственности аналитической функции.

#### Определение аналитического продолжения.

**Теорема.** Если функция  $f$  аналитическая в некоторой области  $D$  и обращается в нуль в некоторой ее части  $D_1$ , то  $f \equiv 0$  во всей области  $D$ .

◀ Допустим, что  $f$  отлична от нуля в точке  $z = b$  той части области  $D$ , которая лежит вне области  $D_1$ . Соединим эту точку с любой точкой  $a \in D_1$  некоторой кривой  $\gamma$ , лежащей в  $D$  (рис. 83).

На некоторой дуге этой кривой, примыкающей к точке  $a$ ,  $f(z) = 0$ , а на некоторой дуге, примыкающей к  $b$ ,  $f(z) \neq 0$ .

Тогда существует такая точка  $z_0 \in \gamma$ , что  $\forall z \in \widehat{az_0} \quad f(z) = 0$ ,

а на дуге  $\widehat{z_0b}$  есть точки, как угодно близкие к  $z_0$ , в которых  $f(z) \neq 0$ . Поскольку функция  $f$  непрерывная, то должно выполняться равенство  $f(z_0) = 0$ , т. е.  $z_0$  является неизолированным нулем функции  $f$ . Это последнее обстоятельство возможно лишь тогда, когда разложение функции  $f$  в ряд Тейлора в окрестности с центром в точке  $z_0$  тождественно равно нулю. Но тогда  $f(z)$  будет равно нулю

и на некотором отрезке дуги  $\widehat{z_0b}$ , примыкающем к точке  $z_0$ , что невозможно в силу свойства точки  $z_0$ . ▶

При доказательстве теоремы можно было бы ограничиться требованием, чтобы функция  $f$  обращалась в нуль на некоторой кривой, лежащей в  $D$ , поскольку тогда она обращается в нуль и в некотором круге с центром в одной из точек этой кривой.

**Следствие.** Если две функции  $f_1$  и  $f_2$ , аналитические в некоторой области, принимают одинаковые значения на некоторой части этой области или на отрезке кривой, лежащей в области, то  $f_1 = f_2$  во всей области.

Таким образом, задание элемента функции, аналитической в некоторой области, или, вообще, задание ее значений в как угодно малой области или на кривой, а также на бесконечном множестве точек, имеющем предельную точку, полностью определяет функцию в области ее аналитичности.

**Определение 1.** Пусть функция  $f_0$  определена на некотором множестве  $M \subset \mathbb{C}$ . Аналитическим продолжением функции  $f_0$  в область  $D \supset M$  называется аналитическая в области  $D$  функция  $f$ , сужение которой  $f|_M = f_0$ .

#### Примеры:

$$1) f_0(x) = e^x, M = \mathbb{R}; f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y, D = \mathbb{C};$$

$$2) f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, M = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}; f(z) = \frac{1}{1-z}, D = \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

Расширим понятие аналитического продолжения.

**Определение 2.** Аналитическим элементом  $P$  называется упорядоченная пара  $P = (D, f)$ , состоящая из области  $D \subset \mathbb{C}$  и аналитической в этой области функции  $f$ .

**Определение 3.** Два аналитических элемента  $P_1 = (D_1, f_1)$  и  $P_2 = (D_2, f_2)$ , области которых удовлетворяют условию  $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ , являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга через область  $\Delta$  — связную компоненту множества  $D_1 \cap D_2$ , если везде в  $\Delta$   $f_1 = f_2$ .

Заметим, что значения функций  $f_1$  и  $f_2$  в других связных компонентах пересечения  $D_1 \cap D_2$  не обязательно должны совпадать.

**Пример 1.** Пусть

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = re^{i\varphi}, -\pi < \varphi < \pi, r > 0\}, \quad f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad -\pi < \varphi < \pi,$$

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = re^{i\varphi}, \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}, r > 0\}, \quad f_2(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}.$$

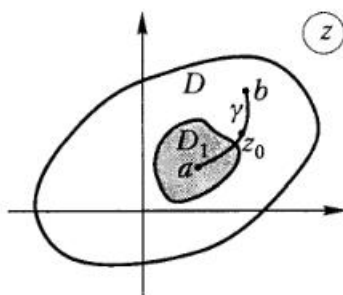


Рис. 83



Элемент  $P_1 = (D_1, f_1)$  определяет в  $z$ -плоскости с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси функцию  $f_1$ , аналитичность которой следует из таких рассуждений. Очевидно, что  $w^2 = f_1^2(z) = re^{i\varphi} = z$ , так что  $f_1(z) = \sqrt{z}$ . Поскольку  $f_1$  дает однолистное отображение области  $D_1$  на правую полуплоскость плоскости  $w$ , то существует  $f_1'(z) \forall z \in D_1$  и эту производную можно найти по правилу дифференцирования обратной функции:

$$f_1'(z) = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{2w} = \frac{1}{2f_1(z)}.$$

Таким образом, функция  $f_1$  аналитическая в области  $D_1$ . Аналогично убеждаемся в том, что  $P_2 = (D_2, f_2)$  также является аналитическим элементом.

Пересечение  $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$  состоит из двух связанных компонент  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , представляющих собой соответственно второй и третий квадранты  $z$ -плоскости.

Из определения функций  $f_1$  и  $f_2$  следует, что при  $z \in \Delta_1$   $f_1(z) = f_2(z)$  и  $f_1(z) \neq f_2(z)$ , если  $z \in \Delta_2$ .

Следовательно, элементы  $P_1$  и  $P_2$  являются аналитическими продолжениями друг друга через второй квадрант  $\Delta_1$ .

**Определение 4.** Элементы  $P = (D, f)$  и  $Q = (G, g)$  являются аналитическими продолжениями друг друга через области  $\Delta_\nu$  ( $\nu = 0, n-1$ ), если существует такая цепочка элементов  $P_\nu = (D_\nu, f_\nu)$  ( $\nu = 0, n$ ), что:

- 1)  $P_0 = P$ ,  $P_n = Q$ ;
- 2) области  $D_\nu$  и  $D_{\nu+1}$  имеют непустое пересечение и  $\Delta_\nu$  является одной из компонент этого пересечения;
- 3) элемент  $P_{\nu+1}$  является непосредственным аналитическим продолжением элемента  $P_\nu$  через  $\Delta_\nu$ .

Пусть, например,

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid z = re^{i\varphi}, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, r > 0\}, \quad f(z) = \sqrt{re^{i\frac{\varphi}{2}}}, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = re^{i\varphi}, \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}, r > 0\}, \quad g(z) = \sqrt{re^{i\frac{\varphi}{2}}}, \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}.$$

Как и в примере 1, устанавливаем, что пары  $P = (D, f)$  и  $Q = (G, g)$  являются аналитическими элементами. Цепочка элементов  $P_0, P_1, P_2$ , где  $P_0 = P$ ,  $P_2 = Q$ , а  $P_1 = (D_1, f_1)$  определяется равенствами

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = re^{i\varphi}, 0 < \varphi < \pi, r > 0\}, \quad f_1(z) = \sqrt{re^{i\frac{\varphi}{2}}}, \quad 0 < \varphi < \pi,$$

показывает, что элементы  $P$  и  $Q$  являются аналитическими продолжениями друг друга в смысле определения 4. При этом  $\Delta_0$  — первый квадрант, а  $\Delta_1$  — второй квадрант  $z$ -плоскости.

Для простоты последующих рассуждений конкретизируем понятие аналитического элемента.

**Определение 5.** Каноническим элементом с центром в точке  $a \in \mathbb{C}$  назовем пару  $P_a = (K_{R_a}, f_a)$ , где  $f_a$  — сумма сходящегося степенного ряда, а  $K_{R_a}$  — круг сходимости этого ряда с центром в точке  $z = a$ :

$$K_{R_a} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R_a\}, \quad f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n.$$

Круг  $K_{R_a}$  называется *кругом сходимости* элемента  $P_a$ .

Приведенные выше определения 3 и 4 для канонических элементов упрощаются, так как их области (круги) всегда пересекаются по связным множествам, и поэтому нет необходимости оговаривать, через какие компоненты пересечения  $\Delta_\nu$  совершается продолжение.

Рассмотрим еще несколько моментов, связанных с понятием канонического элемента.

1) Пусть  $P_a = (K_{R_a}, f_a)$  и  $P_b = (K_{R_b}, f_b)$  — два канонических элемента, являющихся непосредственным продолжением друг друга, и пусть  $b \in K_{R_a}$ . Тогда, очевидно, продолжение элемента  $P_a$  сводится к переразложению суммы степенного ряда  $f_a$  в ряд по степеням  $z - b$ :

$$f_b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_a^{(n)}(b)(z - b)^n. \quad (1)$$



2) Если два канонических элемента  $P_a$  и  $P_b$  являются непосредственным продолжением друг друга, то их круги  $K_{R_a}$  и  $K_{R_b}$  не могут компактно принадлежать друг другу. Действительно, пусть, например,  $K_{R_b} \subseteq K_{R_a}$ ,  $f_b \in A(K_{R_b})$  и  $f_b = f_a$  в  $K_{R_b}$ , однако  $f_a \in A(K_{R_a})$ . Отсюда получаем, что функция  $f_b$  аналитическая в большем круге, чем  $K_{R_b}$ , и, таким образом,  $K_{R_b}$  не может быть кругом сходимости.

Из последнего утверждения следует, что кривые  $\partial K_{R_a}$  и  $\partial K_{R_b}$  обязательно имеют общую точку, и справедливо неравенство (см. рис. 84)

$$|R_a - R_b| \leq |b - a|. \quad (2)$$

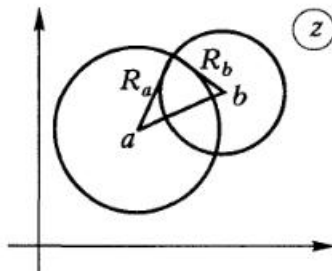


Рис. 84

3) Пусть элементы  $P_{b_1}$  и  $P_{b_2}$  являются непосредственным аналитическим продолжением одного и того же элемента  $P_a$ . Тогда  $P_{b_1} = P_{b_2}$ . Действительно, пусть  $R_{b_1} < R_{b_2}$ . Тогда функции  $f_{b_1}$  и  $f_{b_2}$  аналитические в круге  $K_{R_{b_1}}$  и совпадают в нем, поскольку  $f_{b_1} = f_a$  и  $f_{b_2} = f_a$  на пересечении  $K_{R_a} \cap K_{R_{b_1}}$ . Теперь очевидно, что  $R_{b_1} = R_{b_2}$  и, следовательно,  $P_{b_1} = P_{b_2}$ .

## 1.2. Аналитическое продолжение вдоль пути.

Пусть  $P_0 = (K_{R_0}, f_0)$  — канонический элемент с центром в точке  $z = a$ ,  $\gamma$  — непрерывная жорданова кривая с параметрическим представлением  $\varphi$ ,  $D_\varphi = I = [0, 1]$  и началом в точке  $\varphi(0) = a$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_0)$ .

**Определение.** Канонический элемент  $P_0$  аналитически продолжается вдоль кривой (пути)  $\Gamma$ , если существует семейство элементов  $(P_t)_{t \in I} = ((K_{R_t}, f_t))_{t \in I}$  с центрами в точках  $a_t = \varphi(t)$  и ненулевыми радиусами сходимости, удовлетворяющее условию: для каждой окрестности  $O_{t_0}$  точки  $t_0 \in I$ ,  $\varphi(O_{t_0}) \subset K_{R_{t_0}} \Rightarrow \forall t \in O_{t_0}$  элемент  $P_t$  является непосредственным аналитическим продолжением элемента  $P_{t_0}$ .

Если канонический элемент  $P_0$  продолжаем вдоль пути  $\Gamma$ , то говорят, что элемент  $P_1$  с центром в конечной точке  $\varphi(1) = b$  получен из  $P_0$  аналитическим продолжением вдоль  $\Gamma$ .

Следующая теорема устанавливает единственность аналитического продолжения вдоль пути.

**Теорема 1.** Если канонический элемент  $P_0$  продолжить вдоль пути  $\Gamma$ , то полученный в результате его аналитического продолжения элемент не зависит от выбора семейства, осуществляющего это продолжение.

◀ Применим метод доказательства от противного. Пусть  $P_1$  — элемент, полученный из  $P_0$  продолжением вдоль пути  $\Gamma$  с помощью семейства  $P_t$ , а  $Q_1$  — элемент, полученный из  $P_0$  продолжением вдоль  $\Gamma$  с помощью семейства  $Q_t$ . Имеем  $P_0 = Q_0$ .

Рассмотрим множество точек  $t$  из интервала  $I$ , для которых  $P_t = Q_t$ :  $E = \{t \in I \mid P_t = Q_t\}$ . Очевидно,  $E \neq \emptyset$ , поскольку  $t = 0 \in E$ . Покажем, что  $E$  — открытое множество. Пусть  $t_0 \in E$ :  $P_{t_0} = Q_{t_0}$ . Обозначим через  $O_{t_0} \subset I$  такую окрестность точки  $t_0$ , что  $\varphi(O_{t_0}) \subset K_{R_{t_0}}$ , где  $K_{R_{t_0}}$  — общий круг сходимости элементов  $P_{t_0}$  и  $Q_{t_0}$ . Тогда  $\forall t \in O_{t_0}$  элементы  $P_t$  и  $Q_t$  получаются непосредственным аналитическим продолжением одного и того же элемента  $P_{t_0} = Q_{t_0}$ . Отсюда  $P_t = Q_t$  (см. замечание 3, п. 1.1), т.е.  $O_{t_0} \subset E$  и  $E$  — открытое множество.

Теперь докажем, что  $E$  — замкнутое множество в топологии  $I$ . Пусть  $t_0$  — предельная точка множества  $E$ . Обозначим через  $K_{R_{t_0}}$  меньший из кругов сходимости элементов  $P_{t_0}$  и  $Q_{t_0}$ , и пусть  $O_{t_0}$  — такая окрестность точки  $t_0$ , что  $\varphi(O_{t_0}) \subset K_{R_{t_0}}$ . Поскольку  $t_0$  — предельная точка множества  $E$ , то в окрестности  $O_{t_0}$  обязательно найдется точка  $t_1 \in E$  и, следовательно,  $P_{t_1} = Q_{t_1}$ . В силу замечания 3, п. 1.1, имеем  $P_{t_0} = Q_{t_0}$ , т.е.  $t_0 \in E$  и  $E$  — замкнутое множество. Таким образом, непустое множество  $E$ , являющееся подмножеством множества  $I$ , одновременно открыто и замкнуто в топологии  $I$ . Поэтому  $E = I$  (см. теорему § 3, гл. 2) и, в частности,  $P_1 = Q_1$ . ▶

Нас будет интересовать следующий вопрос. Мы имеем определения аналитического продолжения вдоль цепочки элементов (определение 4, п. 1.1) и определение аналитического продолжения вдоль пути. Как они связаны между собой?

**Лемма.** Пусть  $R(t)$  — радиус элемента  $P_t$  из семейства элементов, осуществляющего аналитическое продолжение вдоль жорданова пути  $\Gamma$ , и пусть, далее, все круги  $K_{R_t}$  имеют конечные радиусы сходимости. Тогда  $R(t)$  — непрерывная функция на отрезке  $I = [0, 1]$ .

◀ Пусть  $t_0 \in I$  — любая точка. Существует такая окрестность  $O_{t_0}$  точки  $t_0$ , что  $\forall t \in O_{t_0}$  элемент  $P_t$  является непосредственным аналитическим продолжением элемента  $P_{t_0}$ . Согласно неравенству (2), п. 1.1, имеем

$$|R(t) - R(t_0)| \leq |\varphi(t) - \varphi(t_0)|,$$

где  $\varphi$  — параметрическое представление жордановой кривой  $\Gamma$ . Поскольку отображение  $\varphi$  непрерывное, то  $R(t)$  является непрерывной функцией на сегменте  $I$ . ▶

**Теорема 2.** Пусть элемент  $Q$  получен из элемента  $P$  посредством аналитического продолжения вдоль жорданова пути  $\Gamma$ . Тогда  $Q$  является аналитическим продолжением в понимании определения 4, п. 1.1.

◀ Пусть  $(P_t)_{t \in I}$  — семейство элементов, осуществляющее аналитическое продолжение вдоль кривой  $\Gamma$  ( $P_0 = P, P_1 = Q$ ). Радиус семейства  $R(t)$  является непрерывной функцией на сегменте  $I$ , и  $\forall t \in I$   $R(t) > 0$ . Отсюда следует, согласно свойству непрерывных функций, что  $\forall t \in I$   $R(t) \geq \varepsilon$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ . Поскольку параметрическое представление  $\varphi$  жордановой кривой  $\Gamma$  есть равномерно непрерывная функция на сегменте  $I$ , то существует такое разбиение  $\Pi = \{t_k; k = \overline{0, n}\}$  сегмента  $I$ , где  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ , что

$$|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| < \varepsilon \quad (k = \overline{1, n}).$$

Тогда  $\varphi(t_k) \in K_{R_{\varphi(t_{k-1})}}$  и, согласно определению 3, п. 1.1, элементы  $P_{\varphi(t_k)}$  и  $P_{\varphi(t_{k-1})}$  являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга, а элементы  $P = P_{\varphi(t_0)}$  и  $Q = P_{\varphi(t_n)}$  — аналитическим продолжением друг друга вдоль цепочки элементов  $P_{\varphi(t_k)}$  ( $k = \overline{0, n}$ ), т.е. элемент  $Q$  является аналитическим продолжением элемента  $P$  в смысле определения 4, п. 1.1. ▶

Рассмотрим, например, семейство элементов

$$P_t = (K_{R(t)}, f_t), \quad t \in I = [0, 1],$$

где

$$K_{R(t)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - e^{i\pi t}| < 1\}, \quad f_t = \sqrt[n]{re^{i\frac{\pi}{n}}}, \quad -\frac{\pi}{2} + \pi t < \varphi < \frac{\pi}{2} + \pi t.$$

Очевидно,  $w^n = f_t^n(z) = z$ , поэтому в каждой точке  $z \in K_{R(t)}$  существует  $f_t'(z) = \frac{1}{n(f_t(z))^{n-1}}$  и  $f_t'(z) \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow 0$ . Получаем, что функция  $f_t$  аналитическая в круге  $K_{R(t)}$ . Представляя ее рядом Тейлора в окрестности точки  $e^{i\pi t}$ , получим степенной ряд с кругом сходимости  $K_{R(t)}$ . Таким образом, элементы  $P_t = (K_{R(t)}, f_t)$  при  $t \in [0, 1]$  образуют семейство канонических элементов, осуществляющее аналитическое продолжение элемента  $P_0$  в элемент  $P_1$  вдоль полуокружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\pi t}, 0 \leq t \leq 1\}$ . Очевидно, элемент  $P_1$  можно также получить из элемента  $P_0$  аналитическим продолжением с помощью цепочки элементов  $P_0, P_{\frac{1}{2}}, P_1$ .

### 1.3. Инвариантность аналитического продолжения вдоль пути относительно гомотопных деформаций этого пути.

Пусть  $I = [0, 1]$ ,  $K = I \times I$ ,  $K \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$  — гомотопия жордановой кривой  $\gamma_0$  в жорданову кривую  $\gamma_1$  с общими началом и концом,  $I \xrightarrow{\varphi_0} \gamma_0$ ,  $I \xrightarrow{\varphi_1} \gamma_1$  — параметрические представления кривых  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ . Тогда  $\forall \xi \in I$   $\varphi(0, \xi) = \varphi_0(0)$ ,  $\varphi(1, \xi) = \varphi_1(1)$ , т.е. любая кривая  $\gamma_\xi$  с параметрическим представлением  $\xi \mapsto \varphi(t, \xi)$  имеет то же начало, что и  $\gamma_0$  с  $\gamma_1$  и тот же конец, что и  $\gamma_0$  с  $\gamma_1$  (см. п. 5.1, гл. 4).

**Теорема 1.** Пусть жордановы кривые  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  гомотопны как кривые с общими концами, а элемент  $P$  аналитически продолжается вдоль любой кривой  $\gamma_\xi$  с параметрическим представлением  $\xi \mapsto \varphi(t, \xi)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , где  $\varphi$  — гомотопия кривой  $\gamma_0$  в кривую  $\gamma_1$ . Тогда результаты аналитического продолжения элемента  $P$  вдоль кривых  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  совпадают, где  $\Gamma_0 = (\gamma_0, \gamma_0^{\text{оп}})$ ,  $\Gamma_1 = (\gamma_1, \gamma_1^{\text{оп}})$ .

◀ Согласно условию, аналитическое продолжение элемента  $P$  вдоль любой жордановой кривой  $\Gamma_\xi$ , имеющей общие концы с кривыми  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ , существует. Обозначим через  $Q^\xi$  результат аналитического продолжения, осуществляемого семейством элементов  $(P_t^\xi)_{t \in I}$  вдоль пути

$\Gamma_\xi = (\gamma_\xi, \gamma_\xi^{\text{op}})$ . Пусть  $E = \{\xi \in I \mid Q^\xi = Q^0\}$ . Множество  $E$  непустое, так как  $\xi = 0 \in E$ . Пусть  $\xi_0 \in E$ . По лемме п. 1.2 существует такое  $\varepsilon > 0$ , что радиусы  $R(t)$  семейства элементов  $(P_{t_k}^{\xi_0})_{t_k \in I}$ , осуществляющего аналитическое продолжение вдоль кривой  $\Gamma_{\xi_0}$ , удовлетворяют  $\forall t \in I$  неравенству  $R(t) \geq \varepsilon$ . Поскольку гомотопия  $\varphi$  является равномерно непрерывным отображением на компакте  $K$ , то в  $K$  найдется такая окрестность  $O_{\xi_0} \subset I$ , что  $\forall (\xi \in O_{\xi_0}, t \in I)$  выполняется неравенство

$$|\varphi(\xi, t) - \varphi(\xi_0, t)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Выберем точки  $t_k \in I$  ( $k = \overline{0, n}$ ) так, чтобы  $\forall k$   $\varphi_k^0 = \varphi(\xi_0, t_k)$  удовлетворяли неравенству

$$|\varphi_k^0 - \varphi_{k-1}^0| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

и элементы  $P_{t_k}^{\xi_0}, P_{t_{k-1}}^{\xi_0}$  были непосредственным аналитическим продолжением друг друга. Обозначим  $\varphi_k^\xi = \varphi(\xi, t_k)$  и заметим, что при  $\xi \in O_{\xi_0}$ , согласно (1) и (2), выполняется неравенство

$$|\varphi_k^\xi - \varphi_{k-1}^0| \leq |\varphi_k^\xi - \varphi_k^0| + |\varphi_k^0 - \varphi_{k-1}^0| < \varepsilon. \quad (3)$$

Очевидно, что элементы  $P_{t_1}^{\xi_0}$  и  $P_{t_1}^{\xi_0}$  являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга (так как  $P_{t_0}^{\xi_0}$  и  $P_{t_1}^{\xi_0}$  являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга согласно (3), и также  $P_{t_0}^{\xi_0}$  и  $P_{t_1}^{\xi_0}$  являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга, и все три элемента  $P_{t_0}^{\xi_0}, P_{t_1}^{\xi_0}, P_{t_1}^{\xi_0}$  имеют общую часть). Аналогично показываем, что элементы  $P_{t_2}^{\xi_0}$  и  $P_{t_2}^{\xi_0}$  являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга и т. д. Наконец,  $P_{t_n}^{\xi_0}$  и  $P_{t_n}^{\xi_0}$  являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга и, кроме того, имеют общий центр, вследствие чего совпадают:  $P_{t_n}^{\xi_0} = Q^\xi = P_{t_n}^{\xi_0} = Q^{\xi_0}$ . Итак,  $O_{\xi_0} \subset E$ , т. е.  $E$  — открытое множество.

Пусть  $\xi_0$  — предельная точка множества  $E$  и  $O_{\xi_0}$  — окрестность этой точки, рассмотренная выше. В этой окрестности найдется такая точка  $\xi \in E$ , что продолжение элемента  $P$  вдоль кривой  $\Gamma_\xi$  приводит к элементу  $Q^\xi = Q^0$ . Повторяя приведенные выше рассуждения, получим, что аналитические продолжения вдоль кривых  $\Gamma_\xi$  и  $\Gamma_0$  приводят к одному и тому же элементу  $Q^{\xi_0} = Q^\xi = Q^0$ , т. е.  $\xi_0 \in E$ , откуда следует, что  $E$  — замкнутое множество. Следовательно,  $E = I$  и, в частности,  $Q^1 = Q^0$ , что и требовалось доказать. ►

**Замечание.** Если хотя бы вдоль одного из путей  $\Gamma_\xi$ , определяемого гомотопией  $\varphi$ , элемент  $P$  аналитически не продолжается, то результаты его продолжения вдоль кривых  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  могут оказаться разными.

Для иллюстрации сказанного вернемся к примеру, рассмотренному в конце п. 1.2. Элемент  $P_0$  можно продолжить вдоль нижней единичной полуокружности  $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{-i\pi t}, t \in [0, 1] = I\}$  с помощью семейства элементов  $P_t^1 = (K_{R(t)}^1, f_t^1)$ , где  $K_{R(t)}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - e^{-i\pi t}| < 1\}$ ,  $f_t^1 = \sqrt[3]{re^{i\frac{\pi}{3}}}$ ,  $-\frac{\pi}{2} - \pi t < \varphi < \frac{\pi}{2} - \pi t$ . Тогда  $P_0^1 = P_0$ , но  $P_1^1 \neq P_1$ , хотя их круги сходимости одинаковы. Рассмотрим, например, значения  $f_1(z)$  и  $f_1^1(z)$  в точке  $z = -1$ :  $f_1(-1) = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ,  $f_1^1(-1) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ,  $f_1(-1) \neq f_1^1(-1)$ . Это объясняется тем, что гомотопию  $\gamma$  и  $\gamma_1$  можно осуществить лишь в области, содержащей точку  $z = 0$ , однако аналитическое продолжение элемента  $P_0$  вдоль пути, проходящего через точку  $z = 0$ , невозможно (в конце п. 1.2 показано, что  $f_1^1(z) \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow 0$ ).

**Теорема 2** (о монодромии). Пусть  $P = (K, f)$  — некоторый аналитический элемент,  $K \subset D$ , где  $D$  — такая односвязная область, что элемент  $P$  аналитически продолжается вдоль любой жордановой кривой, лежащей в  $D$ . Тогда совокупность всех аналитических продолжений определяет в области  $D$  аналитическую функцию.

► Прежде всего заметим, что любые две жордановы кривые с общими концами, лежащие в области  $D$ , гомотопны вследствие односвязности области  $D$ . Пусть  $z \in D$  — произвольная точка. Рассмотрим множество всех жордановых кривых, лежащих в  $D$ , с общими концами  $a$  и  $z$ , где  $a$  — центр заданного элемента  $P$ . Результаты аналитического продолжения вдоль этих кривых по теореме 1 совпадают. Значения этих продолжений в точке  $z$  сопоставим ей. Этот закон и определит в области  $D$  аналитическую функцию. ►

## § 2. Полные аналитические функции

### 2.1. Понятие полной аналитической функции.

**Определение 1.** Полной аналитической функцией назовем совокупность всех канонических элементов, получаемых из одного какого-нибудь элемента  $P$  аналитическими продолжениями его вдоль всех жордановых кривых, начинающихся в центре  $a$  элемента  $P$ , для которых такие продолжения возможны.

Покажем, что понятие полной аналитической функции не зависит от выбора начального элемента  $P$ . Действительно, пусть  $Q$  — любой другой элемент полной аналитической функции, определенной начальным элементом  $P$ . Это означает, что  $Q$  получаем из  $P$  продолжением вдоль некоторой кривой  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{ор}})$ . Тогда  $P$  можно получить из  $Q$  продолжением вдоль кривой  $\Gamma^- = (\gamma^-, \gamma_{\text{ор}}^-)$ .

Пусть теперь элемент  $\Phi$  получаем из элемента  $P$  продолжением вдоль пути  $\Gamma_1 = (\gamma_1, \gamma_1^{\text{ор}})$ . Тогда, очевидно, получаем  $\Phi$  из  $Q$  продолжением вдоль пути  $\Gamma^- \cup \Gamma_1$ . Принимая во внимание теорему о единственности аналитического продолжения вдоль пути, естественно дать следующее определение.

**Определение 2.** Две полные аналитические функции считаются равными, если они имеют хотя бы один общий элемент.

**Теорема 1.** Объединение кругов сходимости элементов, принадлежащих полной аналитической функции, образует область.

◀ Пусть  $D$  — это объединение. Оно открытое как объединение открытых множеств, т.е. если  $z_0 \in D$ , то  $z_0 \in K$  — кругу сходимости некоторого элемента и  $K \subset D$ . Пусть  $a$  и  $b$  — произвольные точки множества  $D$ . Тогда найдутся элементы, для которых  $a$  и  $b$  являются центрами. Эти два элемента получаем аналитическим продолжением друг друга вдоль некоторого пути  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{ор}})$ , соединяющего точки  $a$  и  $b$ . Ясно, что  $\gamma \subset D$ . Следовательно,  $D$  является связным открытым множеством, т.е. областью. Она называется естественной областью определения полной аналитической функции, или областью ее существования. ▶

Заметим, что полная аналитическая функция может не быть в области  $D$  функцией в общепринятом понимании, поскольку не будет однозначной. Сколько значений функции сопоставляется фиксированной точке из области  $D$ ? Ответ на поставленный вопрос содержится в следующем утверждении.

**Теорема 2** (Пуанкаре—Вольтерра). Полная аналитическая функция может иметь не более чем счетное множество разных элементов с центром в фиксированной точке.

◀ Пусть полная аналитическая функция определяется начальным элементом  $P_a$  с центром в точке  $a$ , и  $z$  — произвольная точка из области определения  $D$  полной аналитической функции. Пусть  $P_z$  — один из элементов с центром в точке  $z$ , принадлежащий полной аналитической функции. Его можно получить из элемента  $P_a$  с помощью конечной цепочки элементов с центрами в точках  $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z$ , в которой каждый следующий элемент является непосредственным аналитическим продолжением предыдущего. Не ограничивая общности можно считать, что точки  $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$  имеют рациональные координаты. Действительно, пусть сначала центры  $z'_1, z'_2, \dots, z'_{n-1}$  произвольные. В как угодно малой окрестности точки  $z'_k$  ( $k = \overline{1, n-1}$ ) возьмем точку  $z_k$  с рациональными координатами и заменим элемент  $P_{z'_k}$  элементом  $P_{z_k}$ . Согласно теореме об инвариантности аналитического продолжения вдоль пути относительно гомотопных деформаций путей, при достаточно малых  $|z'_k - z_k|$  результат продолжения по новой цепочке будет совпадать со старым. Множество непосредственных аналитических продолжений  $P_{z_1}$  с рациональными центрами элемента  $P_a$  счетное, точно так же счетное множество и элементов  $P_{z_2}, \dots, P_{z_{n-1}}$ . Задание  $P_{z_{n-1}}$  и точки  $z$  однозначно определяет элемент  $P_z$ . Следовательно, число различных  $P_z$  не более чем счетное. ▶

Вводя в рассмотрение понятие полной аналитической функции, не обязательно пользоваться лишь каноническими элементами. Можно брать произвольные элементы, рассматривая полную аналитическую функцию как совокупность аналитических элементов  $(D_\alpha, f_\alpha)$ , где  $\alpha$  пробегает некоторое множество индексов  $\Lambda$ . При этом каждый из этих элементов получаем из любого другого элемента аналитическим продолжением.

## 2.2. Примеры полных аналитических функций.

Функции, аналитические в  $\mathbb{C}$ , а также аналитические в  $\mathbb{C}$  за исключением счетного множества особых точек, являются, очевидно, полными аналитическими функциями.

Приведем также пример полной аналитической функции, состоящей из одного канонического элемента.

Рассмотрим канонический элемент  $P = (K, f)$ , где  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ,  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ .

Покажем, что этот элемент не может быть продолжен ни по какому пути с началом в точке  $z = 0$ .

Если бы такое аналитическое продолжение существовало, то некоторая дуга окружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  состояла бы полностью из точек аналитичности функции  $f$ . Однако на любой такой дуге содержится бесконечное множество точек вида  $z_0 = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$ , где  $p$  и  $q$  — целые положительные числа, которые не могут быть правильными точками функции  $f$ . Действительно, положим  $z = \rho z_0$ ,  $0 < \rho < 1$ . Тогда получим:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} \rho^{n!}.$$

Для любого натурального числа  $N > q$  имеем

$$|f(z)| > \sum_{n=q}^N \rho^{n!} - \sum_{n=1}^{q-1} |z|^{n!} > (N - q + 1)\rho^{N!} - (q - 1).$$

Отсюда, в силу произвольного выбора  $N > q$ , приходим к выводу, что функция  $f$  при приближении к точке  $z_0$  по радиусу стремится к бесконечности. Следовательно,  $z_0$  не может быть точкой аналитичности функции  $f$ .

Изученные в главе 3 многозначные функции  $\sqrt[n]{z}$  и  $\operatorname{Ln} z$ , которые рассматривались нами как объединение конечного или бесконечного (однако счетного) множества однозначных аналитических функций, являются полными аналитическими функциями.

Определяя  $\sqrt[n]{z}$  с помощью канонических элементов, можно в качестве начального взять элемент  $Q_0$  с центром в точке  $z = 1$ , состоящий из круга  $K_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$  и аналитической в нем функции

$$z \mapsto g_0(z) = (1 + (z - 1))^{\frac{1}{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} - 1 \right) \dots \left( \frac{1}{n} - k + 1 \right) (z - 1)^k. \quad (1)$$

При  $z = x$  функция  $g_0$  является биномиальным разложением действительной функции  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  на интервале  $(0, 2)$ , а  $g_0(z)$  является аналитическим продолжением этой функции в круг  $K_0$ . Элемент  $Q_0$  аналитически продолжается вдоль любого пути с началом в точке  $z = 1$ , не содержащего точку  $z = 0$  (см. пример п. 1.1). Итак, областью определения полной аналитической функции  $\sqrt[n]{z}$ , порожденной элементом  $Q_0$ , является область  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Функцию  $\sqrt[n]{z}$  можно также определить как совокупность аналитических элементов  $P_{\alpha} = (D_{\alpha}, f_{\alpha})$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , где

$$D_{\alpha} = \{-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}, \quad f_{\alpha}(z) = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi}{n}}, \quad -\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha.$$

Действительно, в круге  $K_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$  функция  $f_0(z)$  элемента  $P_0 = (D_0, f_0)$  совпадает с функцией  $g_0(z)$ , определенной формулой (1). Это означает, по определению 2 из предыдущего пункта, что полные аналитические функции, определенные элементами  $Q = (K_0, g_0)$  и  $P_0 = (D_0, f_0)$ , совпадают.

Аналогично, полная аналитическая функция  $\operatorname{Ln} z$  может быть определена с помощью канонических элементов, или как совокупность аналитических элементов  $P_{\alpha} = (D_{\alpha}, f_{\alpha})$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

В первом случае исходным может быть выбран элемент  $Q = (K_0, g_0)$ , где

$$g_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n!}, \quad K_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}. \quad (2)$$



Функция  $g_0$  является аналитическим продолжением в  $K_0$  из интервала  $(0, 2)$  действительной функции  $x \mapsto \ln x = \ln(1 + (x - 1))$ .

В другом случае возьмем

$$D_\alpha = \{-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}, \quad f_\alpha(z) = \ln r + i\varphi, \quad -\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha.$$

Область определения  $\operatorname{Ln} z$  совпадает с областью определения  $\sqrt[n]{z}$ :

$$D = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} D_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Примером полной аналитической функции также является общая степенная функция  $w = z^p$ ,  $p \in \mathbb{R}$  (см. п. 4.1, гл. 3). Однако общая показательная функция (см. п. 4.2, гл. 3), определенная равенством

$$w = a^z = e^{z \operatorname{Ln} a},$$

не является полной аналитической функцией, поскольку ее отдельные элементы не являются аналитическим продолжением друг друга ( $a^z$  есть совокупность различных аналитических в  $\mathbb{C}$  функций  $w_k = f_k(z) = e^{z(\operatorname{Ln} a + 2k\pi i)}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ).

### 2.3. Особые точки полной аналитической функции.

**Определение 1.** Точки границы области определения полной аналитической функции называются ее особыми точками.

Наибольший интерес представляют собой изолированные особые точки.

Пусть  $z = a$  — изолированная особая точка полной аналитической функции  $f$ ,  $V_a$  — ее проколота окрестность, расположенная в области  $D$  определения  $f$ .

**Лемма.** Если какой-нибудь канонический элемент  $P_0$ , принадлежащий  $f$ , при аналитическом продолжении вдоль некоторого замкнутого пути  $\Gamma_0 = (\gamma_0, \gamma_0^{\text{op}})$ ,  $\gamma_0 \subset V_a$ , не изменяется, то и любой элемент  $P$ , полученный из  $P_0$  аналитическим продолжением в  $V_a$ , не изменяется при продолжении вдоль любого пути  $\Gamma = (\gamma, \gamma^{\text{op}})$ , если жордановы кривые  $\gamma_0$  и  $\gamma$  гомотопны в  $V_a$ .

◀ Пусть  $\Gamma' = (\gamma', \gamma'^{\text{op}})$  — путь в  $V_a$ , переводящий  $P_0$  в  $P$ . Упорядоченный набор  $\Gamma'' = (\Gamma'^-, \Gamma_0, \Gamma')$  является ориентированной замкнутой кривой, совпадающей с  $\Gamma_0$ . Поэтому кривые  $\gamma'^- \cup \gamma_0 \cup \gamma'$  и  $\gamma$  гомотопны в  $V_a$ . Согласно теореме 1, п. 1.3, аналитические продолжения элемента  $P$  по путям  $\Gamma''$  и  $\Gamma$  совпадают. Но аналитическое продолжение вдоль  $\Gamma''$  не изменяет элемента  $P$ , поскольку  $\Gamma'^-$  переводит  $P$  в  $P_0$ ,  $\Gamma_0$  не изменяет  $P_0$ , а  $\Gamma'$  переводит  $P_0$  в  $P$ . Следовательно, элемент  $P$  не изменяется при аналитическом продолжении вдоль  $\Gamma$ . ▶

Из леммы следует, что аналитические продолжения вдоль путей, гомотопных нулю в  $V_a$ , не изменяют элементов, поскольку такие пути стягиваются в пути, лежащие в круге любого элемента аналитического продолжения вдоль которых не изменяет элементов. Поэтому в дальнейших наших исследованиях рассматриваются лишь аналитические продолжения вдоль замкнутых путей, неомотопных нулю в  $V_a$ .

**Определение 2.** Пусть  $z = a$  — изолированная особая точка полной аналитической функции  $f$ ,  $V_a$  — ее проколота окрестность, принадлежащая области определения  $f$ , и  $\gamma_0 \subset V_a$  — замкнутая жорданова кривая, охватывающая точку  $z = a$ . Тогда, если: 1) обход по кривой  $\Gamma_0 = (\gamma_0, \gamma_0^{\text{op}})$  приводит к исходному элементу, то  $z = a$  называется особой точкой однозначного характера; 2) обход  $\Gamma_0$  приводит к элементу, отличному от исходного, то  $z = a$  называется особой точкой многозначного характера или точкой разветвления.

В первом случае легко убедиться, что аналитическое продолжение исходного элемента вдоль любого пути  $\Gamma' = (\gamma', \gamma'^{\text{op}})$ ,  $\gamma' \subset V_a$ , ведущего в фиксированную точку  $z \in V_a$ , приводит к одному и тому же элементу, и, следовательно, аналитическое продолжение начального элемента вдоль путей, лежащих в множестве  $V_a$ , определяет аналитическую (однозначную) в  $V_a$  функцию, являющуюся ветвью полной аналитической функции, которую рассматриваем. Для этой ветви точка  $z = a$  будет, согласно классификации (см. п. 2.2, гл. 5) либо устранимой особой точкой, либо полюсом, либо существенно особой точкой. Заметим, что если начальный элемент канонический, то случай устранимой особой точки исключается, поскольку она уже с самого начала является устранимой.

**Определение 3.** Пусть  $z = a$  является точкой разветвления полной аналитической функции  $f$ , и  $\gamma_0 \subset V_a$  — замкнутая жорданова кривая, охватывающая точку  $z = a$ . Тогда, если: 1) существует такое целое число  $n \geq 2$ , что  $n$ -кратный обход  $\Gamma_0 = (\gamma_0, \gamma_0^{\text{оп}})$  в одном и том же направлении приводит к исходному элементу, то  $z = a$  называется точкой разветвления, а именно,  $(n-1)$ -го порядка, если  $n$  является наименьшим из всех целых чисел, имеющим указанное свойство; 2) целого числа, указанного в 1), не существует, т. е. обходы  $\Gamma_0$  в одном направлении приводят все к новым и новым элементам, то  $z = a$  называется точкой разветвления бесконечного порядка или логарифмической точкой разветвления.

**Замечание.** Легко проверить, что порядок разветвления не изменится, если кривую  $\gamma_0$  заменить любой жордановой кривой  $\gamma$ , гомотопной  $\gamma_0$  в  $V_a$ . Этим подтверждается корректность определения 3.

В качестве примера заметим, что точки  $z = 0$  и  $z = \infty$  являются точками разветвления  $(n-1)$ -го порядка для функции  $w = \sqrt[n]{z}$  и логарифмическими точками разветвления для функции  $w = \text{Ln } z$ .

## 2.4. Существование особой точки на границе круга сходимости степенного ряда.

Пусть степенной ряд  $\sum a_n(z - z_0)^n$  имеет ненулевой радиус сходимости  $R$ . При  $R = \infty$  его сумма есть аналитическая функция в  $\mathbb{C}$  и, таким образом, имеет единственную особую точку на бесконечности (граница круга сходимости). Пусть  $R < \infty$ . Тогда пара  $(K_R, f_0)$ , где  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$  — круг сходимости степенного ряда,  $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  определяет аналитический элемент  $P_0$ , порождающий некоторую полную аналитическую функцию  $f$ , которая, в частности, может совпасть с  $f_0$  (см. пример в п. 2.2).

Рассуждая от противного покажем, что на окружности  $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$  лежит по меньшей мере одна особая точка функции  $f$ . Пусть  $\Gamma_R = (\gamma_R, \gamma_R^{\text{оп}}) = \partial K_R$ ,  $\gamma_R \subset D$ , где  $D$  — область определения функции  $f$ . Тогда каждую точку  $z \in \gamma_R$  можно рассматривать как центр некоторого элемента  $P_z$ , являющегося непосредственным аналитическим продолжением элемента  $P_0 = (K_R, f_0)$ . Объединение круга  $K_R$  с кругами сходимости элементов  $P_z$ ,  $z \in \gamma_R$ , определит область  $D' \subset D$ , при этом  $K_R \in D'$ , а функции этих элементов определяют в  $D'$  аналитическую функцию. Разлагая ее в ряд Тейлора в окрестности точки  $z_0$ , мы, очевидно, получим степенной ряд с радиусом сходимости, большим чем  $R$ . Полученное противоречие и доказывает, что на границе круга сходимости степенного ряда всегда найдется по меньшей мере одна особая точка полной аналитической функции, порожденной этим рядом.

## § 3. Принципы аналитического продолжения

В связи с понятием аналитического продолжения возникают вопросы, когда оно существует и как его находить на практике. В решении этих вопросов важная роль принадлежит принципам аналитического продолжения.

**Теорема 1** (принцип непрерывности). Пусть две области  $D_1$  и  $D_2$ ,  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ , имеют общий участок границ, содержащий замкнутую или незамкнутую гладкую дугу Жордана  $\gamma_0$ . Тогда, если функции  $f_1$  и  $f_2$  аналитические соответственно в областях  $D_1$  и  $D_2$  и непрерывны вплоть до  $\gamma_0$ , причем  $\forall z \in \gamma_0$

$$f_1(z) = f_2(z), \quad (1)$$

то функция  $f$ , где

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & \text{если } z \in D_1, \\ f_2(z), & \text{если } z \in D_2, \\ f_1(z) = f_2(z), & \text{если } z \in \gamma_0, \end{cases} \quad (2)$$

аналитическая в области  $D = D_1 \cup D_2 \cup \gamma_0$ .

◀ Пусть  $K_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$  — некоторая окрестность произвольной фиксированной точки  $z_0 \in \gamma_0$ ,  $K_\delta(z_0) \subset D$ , причем считаем, что  $\delta$  меньше стандартного радиуса

кривой  $\gamma_0$  (гладкие замкнутые кривые Жордана имеют свойство: для каждой такой кривой существует число  $\delta_0 > 0$ , называемое ее стандартным радиусом и имеющее свойство, что окружность радиуса  $\delta < \delta_0$  с центром в любой точке кривой ровно два раза пересекает кривую).

Интеграл типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_\delta(z_0)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (3)$$

определяет в окрестности  $K_\delta(z_0)$  аналитическую функцию. Пусть, далее,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  соответственно границы областей  $D' = D_1 \cap K_\delta(z_0)$  и  $D'' = D_2 \cap K_\delta(z_0)$ . Принимая во внимание (1) и (2), формулу (3) запишем в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f_1(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f_2(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad \Gamma_1 = (\gamma_1, \gamma_1^{\text{op}}), \quad \Gamma_2 = (\gamma_2, \gamma_2^{\text{op}}).$$

С помощью обобщенной теоремы и формулы Коши получаем равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f_1(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} f_1(z), & \text{если } z \in D', \\ 0, & \text{если } z \in D'', \end{cases} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f_2(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 0, & \text{если } z \in D', \\ f_2(z), & \text{если } z \in D'', \end{cases}$$

из которых следует, что  $\forall z \in K_\delta(z_0) \quad F(z) = f(z)$ . ►

**Теорема 2** (принцип симметрии Римана—Шварца). Пусть область  $D$  содержит в составе своей границы некоторую дугу окружности  $\gamma$  и не содержит одновременно обеих симметричных относительно  $\gamma$  точек и пусть, далее,  $f$  является аналитической функцией в  $D$ , непрерывной вплоть до  $\gamma$  и принимает на  $\gamma$  действительные значения. Тогда существует аналитическое продолжение функции  $f$  в область  $D^*$ , симметричную области  $D$  относительно  $\gamma$ , и для его получения требуется, чтобы в точках, симметричных относительно  $\gamma$ , функция  $f$  принимала сопряженные значения.

◀ Не ограничивая общности можем считать, что  $\gamma$  совпадает с отрезком действительной оси, а область  $D$  лежит в верхней полуплоскости (этого всегда можно добиться с помощью дробно-линейного отображения). Точки области  $D^*$  будем обозначать через  $z^*$ . Каждой точке  $z^* \in D^*$  поставим в соответствие точку  $z \in D$  по закону  $z = \bar{z}^*$  и определим в области  $D^*$  функцию  $z^* \mapsto f^*(z^*)$  равенством

$$f^*(z^*) = \overline{f(z)}, \quad z = \bar{z}^*.$$

Имеем

$$\frac{f^*(z^* + \Delta z^*) - f^*(z^*)}{\Delta z^*} = \frac{\overline{f(z + \Delta z)} - \overline{f(z)}}{\overline{\Delta z}} = \overline{\left( \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right)}.$$

Отсюда, перейдя к пределу при  $\Delta z \rightarrow 0$  ( $\Delta z^* \rightarrow 0$ ), получим, что функция  $f^*$  дифференцируема в  $D^*$  и  $f^{*'}(z^*) = \overline{f'(z)}$ .

Таким образом,  $f^*$  — аналитическая в области  $D^*$  функция и, при условии доопределения ее на  $\Gamma$  равенством  $f^*(x) = f(x)$ , непрерывная в  $D^* \cup \gamma$ . Теперь к  $f$  и  $f^*$  можно применить принцип непрерывности. ►

Рассмотрим задачи.

1. Доказать, что элементы

$$P_1 = \left( K_1, \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right), \quad K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

и

$$P_2 = \left( K_2, \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-i}{1-i} \right)^n \right), \quad K_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < \sqrt{2}\},$$

являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга.

◀ Оба ряда представляют функцию  $z \mapsto \frac{1}{1-z}$  в кругах  $K_1$  и  $K_2$ . ►



## 2. Доказать, что элемент

$$P = \left( K_1, \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1-z}{2} \right)^n \right), \quad K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 2\},$$

является непосредственным аналитическим продолжением элемента

$$P_0 = \left( K_2, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n} \right), \quad K_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

◀ Оба ряда определяют разложение функции  $z \mapsto \ln(1+z)$  и  $K_2 \subset K_1$ . ▶

## 3. Доказать, что элементы

$$P_1 = \left( K_1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \right), \quad K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

и

$$P_2 = \left( K_2, \pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (z-2)^n \right), \quad K_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 1\},$$

не имеют общей области сходимости, однако являются аналитическими продолжениями друг друга в понимании определения 4, п. 1.1.

◀ Элементы  $P_1$  и  $P_2$  являются аналитическими продолжениями друг друга вдоль любого пути, лежащего в верхней полуплоскости с концами в точках 0 и 2. Эти продолжения определяют в верхней полуплоскости функцию  $z \mapsto -\ln(1-z)$ . ▶

4. Доказать, что сумма  $g$  степенного ряда  $\sum z^{2^n}$  является полной аналитической функцией.

◀ Имеем  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ . В точках  $z_{km} = e^{2\pi i m 2^{-k}}$ , плотно размещенных на окружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , являющейся границей круга сходимости ряда, функция  $g$  не имеет конечного радиального предела. ▶

5. Привести пример полной аналитической функции  $f$ , областью определения которой является единичный круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , непрерывный в замыкании  $\bar{K}$ .

◀ Такой функцией является  $z \mapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{2^n}$ . Если бы  $f$  аналитически продолжалась за единичный круг, то такое же свойство имела бы и ее производная  $f'$ , что противоречит задаче 4. ▶

6. Доказать, что когда радиус сходимости степенного ряда  $\sum a_n z^n$  равен единице и все  $a_n \geq 0$ , то такой ряд не может быть продолжен в точку  $z = 1$  (теорема Прингсхейма).

◀ Пусть  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . Рассуждаем от противного. Пусть существует такое число  $h \in (0, 1)$ , что ряд  $\sum \frac{f^{(n)}(h)}{n!} (z-h)^n$  сходится в круге  $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z-h| < r\}$  и  $h+r > 1$ . Согласно равенству  $|f^{(n)}(he^{i\theta})| = f^{(n)}(h)$  ряд  $\sum \frac{f^{(n)}(he^{i\theta})}{n!} (z-he^{i\theta})^n$  будет сходящимся для каждого  $\theta$  в круге  $K'_r = \{z \in \mathbb{C} : |z-he^{i\theta}| < r\}$ , а сама функция  $f$ , следовательно, будет аналитической в круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < h+r\}$  радиуса, большего единицы, что противоречит условию задачи. ▶

7. Доказать, что функция  $f$ , определенная рядом

$$\sum \frac{az^n}{(a-z)^{n+1}}, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

является непосредственным аналитическим продолжением функции

$$z \mapsto g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2z}{a} \right)^n.$$

◀ Функция  $g$  является суммой степенного ряда с кругом сходимости  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{|a|}{2}\}$  и этот ряд является рядом Тейлора функции  $z \mapsto \frac{a}{a-2z}$  в окрестности точки  $z = 0$ . Область сходимости первого ряда определяется неравенством  $|\frac{z}{a-2z}| < 1$  и представляет собой полуплоскость  $D$ , содержащую начало координат, ограниченную срединным перпендикуляром к отрезку  $[0, a]$ . Находим сумму ряда в точке  $z \in D$ :

$$f(z) = \frac{a}{a-z} \left( 1 + \frac{z}{a-z} + \dots + \left( \frac{z}{a-z} \right)^n + \dots \right) = \frac{a}{a-z} \frac{1}{1 - \frac{z}{a-z}} = \frac{a}{a-2z}.$$

Таким образом,  $K \subset D$  и  $f(z) = g(z) \forall z \in K$ . ▶

**8.** Привести пример функций  $f_1$  и  $f_2$ , аналитических соответственно в областях  $D_1$  и  $D_2$ , причем  $D_1 \cap D_2 = D = \Delta_1 \cup \Delta_2$  и  $f_1(z) = f_2(z)$ , если  $z \in \Delta_1$ ,  $f_1(z) \neq f_2(z)$ , если  $z \in \Delta_2$ .

◀ Пусть  $f_1(z) = \ln|z| + i \arg z$ ,  $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$ ,  $f_2(z) = \ln|z| + i \arg z$ ,  $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2}\}$ ,  $\Delta_1$  — первый квадрант,  $\Delta_2$  — третий квадрант  $z$ -плоскости (см. также пример перед определением 4, п. 1.1). Функции  $f_1$  и  $f_2$  удовлетворяют поставленным требованиям. ▶

**9.** Доказать, что когда функция  $f \in A(\mathbb{C})$  удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Im} f(z)|_{y=0} = \operatorname{Re} f(z)|_{x=0} = 0,$$

то она нечетная, т. е.  $f(-z) = -f(z)$ .

◀ Принимая во внимание равенство  $\operatorname{Im} f(z)|_{y=0} = 0$ , по принципу симметрии имеем

$$f(z) = \overline{f(\bar{z})}. \quad (1)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$z \mapsto F(z) = if(z).$$

Тогда

$$\operatorname{Im} F(z)|_{x=0} = \operatorname{Re} f(z)|_{x=0} = 0,$$

и, принимая во внимание, что точки  $z$  и  $-\bar{z}$  симметричны относительно мнимой оси, получаем

$$F(z) = \overline{F(-\bar{z})},$$

или

$$f(z) = -\overline{f(-\bar{z})}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует нечетность функции  $f$ . ▶

**10.** Построить четыре элемента функции  $z \mapsto \frac{1}{z}$  с центрами в точках  $z = 1$ ,  $z = i$ ,  $z = -1$ ,  $z = -i$  и выяснить, какие из них являются непосредственными аналитическими продолжениями друг друга.

◀ Непосредственно получаем четыре разложения

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n, \quad |z-1| < 1; & \frac{1}{z} &= \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} (z-i)^n, \quad |z-i| < 1; \\ \frac{1}{z} &= -\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n, \quad |z+1| < 1; & \frac{1}{z} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n-1} (z+i)^n, \quad |z+i| < 1. \end{aligned}$$

Второе из этих разложений является непосредственным аналитическим продолжением первого, третье — второго, четвертое — третьего и первое — четвертого. ▶

### Упражнения для самостоятельной работы

**1.** Функцию  $z \mapsto f(z) = \frac{1}{1+z}$  с интервала  $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$  аналитически продолжить методом степенных рядов сперва в круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , а затем в круг  $K' = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < 2\}$ .

**2.** Пусть  $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2 \wedge \operatorname{Im} z > 0\}$ , а  $f(z) = \ln z = \ln|z| + i \arg z$ . Найти аналитическое продолжение функции  $f$  из  $D_1$  в область  $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2 \wedge \operatorname{Im} z < 0\}$  через интервалы  $(-2, -1)$  и  $(1, 2)$ .

3. Пусть  $\mathbb{C}$  — комплексная плоскость с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси,  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$ ,

$$f_1(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n, \quad z \in K.$$

Доказать, что  $f_1$  и  $f_2$  являются аналитическими продолжениями одной и той же функции.

4. Пусть функция  $\varphi$  аналитическая в кольце  $\bar{K}_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R\}$ . Доказать, что функцию  $f$ , определенную в круге  $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$  соотношением

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} (\zeta - z)^m \varphi(\zeta) d\zeta \quad (m \in \mathbb{Z}), \quad \Gamma_r = (\gamma_r, \gamma_r^{\text{op}}), \quad \gamma_r = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = r\},$$

можно аналитически продолжить в круг  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$  и что это аналитическое продолжение  $F(z)$  можно задать формулой

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} (\zeta - z)^m \varphi(\zeta) d\zeta \quad (m \in \mathbb{Z}), \quad \Gamma_R = (\gamma_R, \gamma_R^{\text{op}}), \quad \gamma_R = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = R\}.$$

5. Доказать, что функции

$$z \mapsto f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1) \quad \text{и} \quad z \mapsto f_2(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-z)} dt \quad (\operatorname{Re} z < 1)$$

являются аналитическими продолжениями друг друга.

6. Найти аналитическое продолжение функции  $x \mapsto \arcsin x$  из интервала  $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$  в круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

7. Пусть на интервале  $(-1, 1)$  определена функция  $f$ , где

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Можно ли аналитически продолжить ее в  $\mathbb{C}$ ?

8. Доказать, что функции

$$z \mapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} \quad \text{и} \quad z \mapsto f_0(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

являются аналитическими продолжениями друг друга.

9. Какие функции определяются рядом

$$\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) + \sum \left( z - \frac{1}{z} \right) \left( \frac{1}{1+z^n} - \frac{1}{1+z^{n-1}} \right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

в областях  $K_{\delta,1} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \delta < |z| < 1\}$  и  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ ? Являются ли они аналитическими продолжениями друг друга?

10. Пусть

$$f(z) = \int_{\Gamma} e^{\zeta + \frac{1}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}}), \quad \gamma = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}.$$

Доказать, что эту функцию можно аналитически продолжить в  $\mathbb{C}$ .

11. Доказать, что функцию  $f$ , где

$$f(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)(1+e^{z\zeta})}$$

можно аналитически продолжить в область  $D = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi\}$ .

12. Доказать, что если функция  $f$  является аналитической в единичном круге и в каждой точке его границы, то она аналитически продолжается и в некоторый круг  $K_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$ , где  $\rho > 1$ .

13. Пусть  $f$  — аналитическая в окрестности точки  $z = 0$  функция, а последовательность  $(f^{(n)}(z))$  сходится там равномерно и  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(0) = 1$ . Доказать, что предельная функция этой последовательности аналитически продолжается в  $\mathbb{C}$ .

## Вычеты и их применения

### § 1. Определение вычета. Основная теорема

#### 1.1. Вычет относительно изолированной конечной точки.

**Определение.** Вычетом аналитической функции  $f$  относительно ее изолированной особой точки  $z = a \in \mathbb{C}$  называется коэффициент  $c_{-1}$  при первой отрицательной степени разложения функции  $f$  в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Обозначение вычета<sup>1)</sup>:

$$c_{-1} = \operatorname{res}_a f(z).$$

Принимая во внимание формулу (2), п. 2.1, гл. 5 для коэффициентов ряда Лорана, имеем

$$\operatorname{res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} f(z) dz, \quad \Gamma_\rho = (\gamma_\rho, \gamma_\rho^{\text{op}}), \quad (1)$$

где  $\gamma_\rho$  — окружность радиуса  $\rho$  с центром в точке  $z = a$ ,  $\gamma_\rho \subset O_a$  ( $O_a$  — окрестность точки  $a$ ).

Заметим, что в случае, когда  $z = a$  — устранимая особая точка,  $\operatorname{res}_a f = 0$ . Если  $z = a$  — полюс первого порядка, то  $\operatorname{res}_a f \neq 0$ . В остальных случаях  $\operatorname{res}_a f$  может быть равным, а может и не быть равным нулю, например:

$$\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z} = 0, \quad \operatorname{res}_2 \frac{1}{z-2} = 1, \quad \operatorname{res}_0 e^{\frac{1}{z^2}} = 0.$$

Получим формулы для вычисления вычета относительно полюса.

Пусть  $z = a$  — полюс функции  $f$  порядка  $p$ . Разложение функции  $f$  в ряд Лорана в проколотой окрестности точки  $z = a$  имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Отсюда получаем:

$$f(z)(z-a)^p = c_{-p} + c_{-p+1}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{p-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+p},$$

$$\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} (f(z)(z-a)^p) = c_{-1}(p-1)! + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+p) \dots (n+2)(z-a)^{n+1},$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} (f(z)(z-a)^p) = c_{-1}(p-1)!.$$

Имеем формулу для вычисления вычета функции  $f$  относительно полюса  $p$ -го порядка:

$$\operatorname{res}_a f(z) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} (f(z)(z-a)^p). \quad (2)$$

<sup>1)</sup>  $\operatorname{res}$  — начальные буквы слова *residu* (франц.) — *вычет*.

В частности, при  $p = 1$  формула (2) принимает вид

$$\operatorname{res}_a f(z) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a). \quad (3)$$

На практике оказывается полезной небольшая модификация последней формулы.

Пусть функция  $f$  в окрестности простого полюса  $z = a$  имеет вид

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad (4)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — аналитические в точке  $z = a$  функции, причем  $\varphi(a) \neq 0$ ,  $\psi(a) = 0$ ,  $\psi'(a) \neq 0$ . В соответствии с формулой (3) имеем

$$\operatorname{res}_a f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)(z - a)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(a)}{z - a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)},$$

т. е.

$$\operatorname{res}_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \quad (5)$$

Например,  $\operatorname{res}_{k\pi} \operatorname{ctg} z = \operatorname{res}_{k\pi} \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{\cos k\pi}{\cos k\pi} = 1$ .

В случае, когда функция  $f$  определена формулой (4), а функции  $\varphi$  и  $\psi$  имеют в точке  $z = a$  нули порядка выше первого, для вычисления вычета удобно заменить функции  $\varphi$  и  $\psi$  несколькими членами разложения их в ряд Тейлора.

Например,

$$\operatorname{res}_0 \frac{\sin 3z - 3 \sin z}{\sin z(\sin z - z)} = \operatorname{res}_0 \frac{3z - \frac{9}{2}z^3 + \dots - 3z + \frac{z^3}{2}}{\left(z - \frac{z^3}{6} + \dots\right) \left(-\frac{z^3}{6} + \dots\right)} = \operatorname{res}_0 \frac{-4z^3 + \dots}{-\frac{z^4}{6} + \dots} = 24.$$

## 1.2. Вычет относительно бесконечности.

Пусть  $z = \infty$  — изолированная особая точка функции  $f$ . Разложение функции  $f$  в окрестности бесконечности  $O_\infty = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < \infty\}$  имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n.$$

Проинтегрируем это равенство по окружности  $\Gamma_R^- = (\gamma_R^-, \gamma_R^{op-})$ , ориентированной в направлении хода часовой стрелки (при этом бесконечность остается слева). Тогда получим:

$$\int_{\Gamma^-} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\Gamma^-} z^n dz = -2\pi i c_{-1}, \quad (1)$$

так как

$$\int_{\Gamma^-} z^n dz = 0 \quad \text{при} \quad n \neq -1.$$

**Определение.** Вычетом функции  $f$  относительно бесконечности называется коэффициент при первой отрицательной степени разложения функции  $f$  в окрестности бесконечности, умноженный на  $-1$ .

Принимая во внимание (1), имеем

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = -c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} f(z) dz. \quad (2)$$

Заметим, что в соответствии с данным определением  $\operatorname{res}_\infty f(z)$  определяется коэффициентом правильной части ряда Лорана и поэтому может быть отличным от нуля и в том случае, когда бесконечность является устранимой особой точкой функции  $f$ , например,  $\operatorname{res}_\infty \frac{1}{z} = -1$ .

Пусть бесконечность является устранимой особой точкой функции  $f$ . Введем обозначение  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(\infty)$ . Тогда

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z (f(\infty) - f(z)). \quad (3)$$

Действительно, разложение функции  $f$  в ряд в окрестности бесконечности в этом случае имеет вид

$$f(z) = f(\infty) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k},$$

откуда

$$z(f(z) - f(\infty)) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k+1}.$$

Совершив в последнем равенстве предельный переход при  $z \rightarrow \infty$ , получим формулу (3).

Легко можно получить следующую формулу

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = -\varphi'(0), \quad (4)$$

где  $\varphi\left(\frac{1}{z}\right) = f(z)$  и  $\varphi(z)$  — аналитическая функция в точке  $z = 0$ .

### 1.3. Теорема о вычетах.

**Теорема 1 (Коши).** Если функция  $f$  аналитическая в  $D \cup \partial D \subset \mathbb{C}$ , за исключением некоторого множества изолированных особых точек  $\{a_k; k = \overline{1, n}\}$ , принадлежащих области  $D$  (но не  $\partial D$ ), то справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} f(z). \quad (1)$$

Рассмотрим окружности  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  ( $\bigcap_{k=1}^n \gamma_k = \emptyset$ ) радиуса  $\rho_k$  с центром в точках  $a_k$ , причем  $\rho_k$  выбираем настолько малыми, чтобы круги  $K_{\rho_k}$  с границами  $\gamma_k$  компактно принадлежали области  $D$ . Рассмотрим область  $D \setminus \{\overline{K}_{\rho_k}; k = \overline{1, n}\}$  и применим формулу Коши для односвязной области (см. теорему 4, п. 5.3, гл. 4):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} f(z), \quad \Gamma_k = (\gamma_k, \gamma_k^{\text{op}}). \blacktriangleright$$

Эта теорема имеет большое принципиальное значение. Она сводит вычисление глобальной величины, которой является интеграл от аналитической функции по границе области, к вычислению величин локальных вычетов функции в ее особых точках. Например, вычислим интеграл

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}, \quad D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1-i| < 2\}.$$

Подынтегральная функция  $f$  аналитическая в замыкании  $\overline{D}$ , за исключением точек  $z_1 = 1$  (полюс второго порядка),  $z_2 = i$  (полюс первого порядка). С помощью формулы (1) получаем:

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} = 2\pi i \left( \operatorname{res}_1 f(z) + \operatorname{res}_i f(z) \right) = 2\pi i \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi i}{2}.$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть  $f \in A(\mathbb{C} \setminus \{a_k; k = \overline{1, n}\})$ . Тогда сумма вычетов функции  $f$  во всех ее конечных особых точках и вычета на бесконечности равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} f(z) + \operatorname{res}_{\infty} f(z) = 0. \quad (2)$$

◀ Пусть  $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$  — окружность столь большого радиуса  $R$ , что она охватывает все конечные особые точки  $a_k$ . Тогда согласно формуле (1) и формуле (2), п. 1.2, получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} f(z) = -\operatorname{res}_{\infty} f(z). \blacktriangleright$$

Доказанная теорема может оказаться полезной при вычислении интегралов по контуру. В качестве примера рассмотрим интеграл

$$I = \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}}), \quad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}.$$

Согласно теореме 1 имеем

$$I = 2\pi i \left( \operatorname{res}_0 \frac{1}{z^3(z^{10}-2)} + \sum_{k=1}^{10} \operatorname{res}_{\zeta_k} \frac{1}{z^3(z^{10}-2)} \right),$$

где  $\zeta_k$  ( $k = \overline{1, 10}$ ) — корни уравнения  $z^{10} - 2 = 0$ , или, воспользовавшись формулой (2),

$$I = -2\pi i \operatorname{res}_{\infty} \frac{1}{z^3(z^{10}-2)} = 0.$$

Рассмотрим примеры.

Найти вычеты указанных функций относительно всех изолированных особых точек и относительно бесконечно удаленной точки (если она не является предельной для особых точек).

1.  $f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)}.$

◀ Особыми точками функции  $f$  являются  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ ,  $z_3 = \infty$ . По формуле (2), п. 1.1, находим:

$$\operatorname{res}_0 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left( \frac{z^2 + z - 1}{z-1} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 - 2z}{(z-1)^2} = 0$$

(принято во внимание, что точка  $z_1 = 0$  — полюс второго порядка функции  $f$ ).

Точка  $z_2 = 1$  является полюсом первого порядка функции  $f$ , поэтому для вычисления вычета в этой точке применим формулу (3), п. 1.1. Получим

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} f(z)(z-1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 + z - 1}{z^2} = 1.$$

Согласно формуле (2), п. 1.3, имеем

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) + \operatorname{res}_{z=1} f(z) + \operatorname{res}_{\infty} f(z) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = -1. \blacktriangleright$$

2.  $f(z) = \frac{1}{\sin z}.$

◀ В точках  $z_k = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) функция  $f$  имеет простые полюсы. Воспользуемся формулой (5), п. 1.1, в которой  $\varphi \equiv 1$ ,  $\psi(z) = \sin z$ . Тогда  $\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{\cos z_k} = \frac{1}{\cos k\pi} = (-1)^k$ . Бесконечно удаленная точка является предельной для особых точек. ▶

3.  $f(z) = \cos \frac{1}{z-2}.$

◀ Точка  $z = 2$  — существенно особая для функции  $f$ . Ее разложение в ряд Лорана в окрестности точки  $z = 2$  имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left( \frac{1}{z-2} \right)^{2n} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-2} \right)^2 + \dots$$

Коэффициент при  $(z-2)^{-1}$  равен нулю, следовательно,  $\operatorname{res}_2 f(z) = 0$ .

Согласно формуле (2), п. 1.3,  $\operatorname{res}_2 f(z) + \operatorname{res}_\infty f(z) = 0$ , откуда  $\operatorname{res}_\infty f(z) = 0$ . ►

$$4. f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2}.$$

◀ Как и в предыдущем примере,  $z = 2$  — существенно особая точка для функции  $f$ . Поскольку

$$z^3 = (2 + (z-2))^3 = 8 + 12(z-2) + 6(z-2)^2 + (z-2)^3,$$

$$\cos \frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left( \frac{1}{z-2} \right)^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} \left( \frac{1}{z-2} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left( \frac{1}{z-2} \right)^4 - \dots,$$

то

$$z^3 \cos \frac{1}{z-2} = (8 + 12(z-2) + 6(z-2)^2 + (z-2)^3) \left( 1 - \frac{1}{2!(z-2)^2} + \frac{1}{4!(z-2)^4} - \dots \right).$$

Очевидно, что коэффициент при  $(z-2)^{-1}$  равен  $-6 + \frac{1}{24} = -\frac{143}{24}$ . Следовательно,  $\operatorname{res}_2 f(z) = -\frac{143}{24}$ .

Согласно формуле (2), п. 1.3,  $\operatorname{res}_2 f(z) + \operatorname{res}_\infty f(z) = 0$ , откуда  $\operatorname{res}_\infty f(z) = \frac{143}{24}$ . ►

$$5. f(z) = z^n \sin \frac{1}{z} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

◀ Точка  $z = 0$  — существенно особая для функции  $f$ . Ряд Лорана функции  $f$  в окрестности точки  $z = 0$  имеет вид

$$f(z) = z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{2k-n+1}}.$$

Равенство  $2k - n + 1 = 1$  невозможно, если  $n < 0$  или если  $n \in \mathbb{Z}$  — нечетное. В указанных случаях  $\operatorname{res}_0 f(z) = \operatorname{res}_\infty f(z) = 0$ .

Если  $n = 2m$  ( $m \geq 0$ ), то главная часть ряда Лорана функции  $f$  будет содержать член

$$\frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{-1} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} z^{-1}.$$

Следовательно, для всех четных  $n \in \mathbb{Z}_0$   $\operatorname{res}_0 f(z) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}$ . В частности, при  $n = 0$   $\operatorname{res}_0 f(z) = 1$ .

Применив формулу (2), п. 1.3, получим, что для всех четных  $n \in \mathbb{Z}_0$

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = -\operatorname{res}_0 f(z) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{(n+1)!}.$$

В частности, при  $n = 0$   $\operatorname{res}_\infty f(z) = -1$ . ►

$$6. f(z) = \frac{15z^3 - 11z^2 + 4z + 6}{2z^2(z^2 - 1)}.$$

◀ Представляя функцию  $f$  в виде суммы простых дробей, получим:

$$f(z) = \frac{2}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{4}{z+1} + \frac{3}{2(z-1)}.$$

Особыми точками функции  $f$  являются  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = -1$ ,  $z_3 = 1$ ,  $z_4 = \infty$ . Поскольку точки  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  — простые полюсы функции  $f$ , то  $\operatorname{res}_0 f(z) = 2$ ,  $\operatorname{res}_{-1} f(z) = 4$ ,  $\operatorname{res}_1 f(z) = \frac{3}{2}$ . Согласно формуле (2), п. 1.3,

$$\operatorname{res}_0 f(z) + \operatorname{res}_{-1} f(z) + \operatorname{res}_1 f(z) + \operatorname{res}_\infty f(z) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = - \left( \operatorname{res}_0 f(z) + \operatorname{res}_{-1} f(z) + \operatorname{res}_1 f(z) \right) = -7,5. \quad \blacktriangleright$$



## 7. Найти вычеты всех ветвей многозначной функции

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{z} + \sqrt{z+1}}$$

во всех ее конечных точках однозначного характера.

◀ Из представления функции

$$f(z) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{z} - \sqrt{z+1}}{z-1}$$

видно, что она четырехзначная и что конечной особой точкой однозначного характера для каждой из ее ветвей является простой полюс  $z_1 = 1$ . Точки  $z_2 = 0$  и  $z_3 = -1$  являются точками разветвления, т. е. особыми точками неоднозначного характера.

Выделим четыре однозначные ветви функции  $f$  в области  $\mathbb{C}$  (плоскости  $\mathbb{C}$  с выброшенной отрицательной действительной полуосью) их значениями в фиксированной точке, например, в точке  $z = 2$ :

$$f_1(2) = 2 - \sqrt{3}, \quad f_2(2) = -2 - \sqrt{3}, \quad f_3(2) = 2 + \sqrt{3}, \quad f_4(2) = -2 + \sqrt{3}.$$

Тогда получим:

$$f_1(z) = \frac{1}{z-1} \left( \sqrt{2|z|} \left( \cos \frac{\arg z}{2} + i \sin \frac{\arg z}{2} \right) - \sqrt{|z+1|} \left( \cos \frac{\arg(z+1)}{2} + i \sin \frac{\arg(z+1)}{2} \right) \right),$$

$$f_2(z) = \frac{1}{z-1} \left( -\sqrt{2|z|} \left( \cos \frac{\arg z}{2} + i \sin \frac{\arg z}{2} \right) - \sqrt{|z+1|} \left( \cos \frac{\arg(z+1)}{2} + i \sin \frac{\arg(z+1)}{2} \right) \right),$$

$$f_3(z) = -f_2(z), \quad f_4(z) = -f_1(z).$$

Таким образом,

$$\operatorname{res}_1 f_1(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f_1(z) = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0, \quad \operatorname{res}_1 f_2(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f_2(z) = -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2},$$

$$\operatorname{res}_1 f_3(z) = 2\sqrt{2}, \quad \operatorname{res}_1 f_4(z) = 0. \quad \blacktriangleright$$

8. Доказать, что если  $z_\nu$  является полюсом функции  $z \mapsto f(z) = \frac{z}{z^4 - a^4}$ , то  $\operatorname{res}_{z_\nu} f(z) = \frac{z_\nu^2}{4a^4}$ .

◀ Воспользуемся формулой (3), п. 1.1, и правилом Лопиталя раскрытия неопределенностей вида  $\frac{0}{0}$ . Получим:

$$\operatorname{res}_{z_\nu} \frac{z}{z^4 - a^4} = \lim_{z \rightarrow z_\nu} \frac{z(z - z_\nu)}{z^4 - a^4} = \lim_{z \rightarrow z_\nu} \frac{2z - z_\nu}{4z^3} = \frac{1}{4} \lim_{z \rightarrow z_\nu} \frac{2z^2 - z_\nu z}{z^4 - a^4 + a^4} = \frac{1}{4} \frac{2z_\nu^2 - z_\nu^2}{a^4} = \frac{z_\nu^2}{4a^4}. \quad \blacktriangleright$$

9. Найти: а)  $\operatorname{res}_\infty \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ ; б)  $\operatorname{res}_\infty \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

◀ а) Согласно формуле (2), п. 1.3, имеем:

$$\operatorname{res}_\infty \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = -\operatorname{res}_1 \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^2}{dz^2} e^{2z} = -2e^2.$$

б) Аналогично,

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_\infty \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} &= - \left( \operatorname{res}_{z=ia} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} + \operatorname{res}_{z=-ia} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} \right) = - \left( \lim_{z \rightarrow ia} \frac{e^{iz}}{z + ia} + \lim_{z \rightarrow -ia} \frac{e^{iz}}{z - ia} \right) = \\ &= - \left( \frac{e^{-a}}{2ia} - \frac{e^a}{2ia} \right) = -\frac{1}{a} \frac{e^{i(ia)} - e^{-i(ia)}}{2i} = -\frac{\sin ia}{a}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**10.** Найти вычеты следующих функций относительно всех конечных изолированных точек и на бесконечности, когда она является изолированной особой точкой:

$$\text{а) } f(z) = \sin \frac{z}{z+1}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{1}{z(1-e^{-hz})} \quad (h \neq 0);$$

$$\text{в) } f(z) = \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{1+z} + \frac{1}{(1+z)^2} + \dots + \frac{1}{(1+z)^n} \right).$$

◀ а) Воспользуемся формулой (3), п. 1.2:

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \sin \frac{z}{z+1} &= \lim_{z \rightarrow \infty} z \left( \sin 1 - \sin \frac{z}{z+1} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} 2z \sin \frac{1 - \frac{z}{z+1}}{2} \cos \frac{1 + \frac{z}{z+1}}{2} = \\ &= \cos 1 \lim_{z \rightarrow \infty} z \left( 1 - \frac{z}{z+1} \right) = \cos 1 \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z+1} = \cos 1. \end{aligned}$$

Согласно формуле (2), п. 1.3, имеем

$$\operatorname{res}_{-1} \sin \frac{z}{z+1} = -\operatorname{res}_{\infty} \sin \frac{z}{z+1} = -\cos 1.$$

б) Особыми точками функции  $f$  являются  $z_k = \frac{2k\pi i}{h}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Точка  $z = 0$  — полюс второго порядка, а точки  $z_k$  при  $k \neq 0$  — полюсы первого порядка. Применяв формулу (2), п. 1.1, получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_0 f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{1-e^{-hz}} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1-e^{-hz}(1+hz)}{(1-e^{-hz})^2} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1-(1+hz)\left(1-hz+\frac{h^2}{2}z^2+o(z^2)\right)}{(1-1+hz+o(z))^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1-1+h^2z^2-\frac{h^2}{2}z^2+o(z^2)}{h^2z^2+o(z^2)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Для вычисления вычетов функции  $f$  в точках  $z_k$  ( $k \neq 0$ ) воспользуемся формулой (5), п. 1.1, полагая  $\varphi(z) = \frac{1}{z}$ ,  $\psi(z) = 1 - e^{-hz}$ . Тогда

$$\operatorname{res}_{z_k} f(z) = \frac{\varphi\left(\frac{2k\pi i}{h}\right)}{\psi'(z)|_{z=z_k}} = \frac{1}{\frac{2k\pi i}{h} \cdot h e^{-\frac{2k\pi i}{h}} h} = \frac{1}{2k\pi i}, \quad k \neq 0.$$

$$\text{в) При } |z+1| < 1 \text{ имеем } \frac{1}{z} = -\frac{1}{1-(z+1)} = -\sum_{k=0}^{\infty} (1+z)^k,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{-1} \left( \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{1+z} + \dots + \frac{1}{(1+z)^n} \right) \right) &= \\ &= \operatorname{res}_{-1} \left( \left( -1 - (1+z) - (1+z)^2 - \dots \right) \left( 1 + \frac{1}{1+z} + \dots + \frac{1}{(1+z)^n} \right) \right) = \\ &= \operatorname{res}_{-1} \left( -\frac{1}{(1+z)^n} - \frac{2}{(1+z)^{n-1}} - \dots - \frac{n}{1+z} - (n+1) + \dots \right) = -n. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_0 \left( \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{1+z} + \dots + \frac{1}{(1+z)^n} \right) \right) &= \left( 1 + \frac{1}{1+z} + \dots + \frac{1}{(1+z)^n} \right)_{z=0} = n+1, \\ \operatorname{res}_{\infty} \left( \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{1+z} + \dots + \frac{1}{(1+z)^n} \right) \right) &= n - n - 1 = -1. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**11.** Вычислить интегралы:

$$а) \int_{\Gamma_R} \frac{z dz}{e^{2\pi i z^2} - 1}, \quad \Gamma_R = (\gamma_R, \gamma_R^{\text{op}}), \quad \gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}, \quad n < R^2 < n+1, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$б) \int_{\Gamma_r} \sqrt{\frac{z}{z+2}} dz, \quad \Gamma_r = (\gamma_r, \gamma_r^{\text{op}}), \quad \gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}, \quad r > 2 \text{ и при больших } |z| \quad \sqrt{\frac{z}{z+1}} = 1 + o(1).$$

◀ Окружность  $\gamma_R$  охватывает  $4n+1$  полюсов подынтегральной функции: точку  $z=0$  и на каждой окружности  $\gamma_{\sqrt{k}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{k}\}$  ( $k = \overline{1, n}$ ) лежит четыре полюса  $z_m = \sqrt{k} e^{\frac{i\pi m}{2}}$  ( $m = 0, 1, 2, 3$ ). Согласно формуле (1), п. 1.3, получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} \frac{z dz}{e^{2\pi i z^2} - 1} &= 2\pi i \left( \operatorname{res}_0 \frac{z}{e^{2\pi i z^2} - 1} + \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^3 \operatorname{res}_{z_m} \frac{z}{e^{2\pi i z^2} - 1} \right) = \\ &= 2\pi i \left( \frac{1}{2\pi i} + \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^3 \frac{1}{4\pi i e^{(-1)^m 2\pi i k}} \right) = 2\pi i \left( \frac{1}{2\pi i} + \frac{n}{\pi i} \right) = 2n+1. \end{aligned}$$

б) Воспользуемся формулой (2), п. 1.2:

$$\int_{\Gamma_r^-} \sqrt{\frac{z}{z+2}} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{\infty} \sqrt{\frac{z}{z+2}}.$$

Тогда

$$\int_{\Gamma_r} \sqrt{\frac{z}{z+2}} dz = -2\pi i \operatorname{res}_{\infty} \sqrt{\frac{z}{z+2}} = -2\pi i \operatorname{res}_{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{z}\right)^{\frac{1}{2}}} = -2\pi i \operatorname{res}_{\infty} \left(1 - \frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right) = -2\pi i. \blacktriangleright$$

**12.** Доказать равенство

$$I = \int_{\Gamma_r} \frac{(z^4 + 1) dz}{z^2(\bar{z} - a)(b - \bar{z})} = 2\pi i \frac{r^8 + b^4}{b^4 r^2(b - a)}.$$

Здесь  $\Gamma_r = (\gamma_r, \gamma_r^{\text{op}})$ ,  $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ ,  $0 < |a| < r < |b|$ .

◀ Поскольку  $z \in \gamma_r \Rightarrow z\bar{z} = r^2$ ,  $\bar{z} = \frac{r^2}{z}$ , то

$$I = \int_{\Gamma_r} \frac{(z^4 + 1) dz}{(r^2 - az)(bz - r^2)}.$$

Подынтегральная функция имеет два простых полюса  $z_1 = \frac{r^2}{a}$  и  $z_2 = \frac{r^2}{b}$ , причем полюс  $z_2$  охватывается кривой  $\gamma_r$ . Поэтому

$$I = 2\pi i \operatorname{res}_{\frac{r^2}{b}} \frac{z^4 + 1}{(r^2 - az)(bz - r^2)} = \frac{2\pi i}{b} \lim_{z \rightarrow \frac{r^2}{b}} \frac{z^4 + 1}{r^2 - az} = 2\pi i \frac{r^8 + b^4}{b^4 r^2(b - a)}. \blacktriangleright$$

$$13. \text{ Вычислить } \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}}), \quad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}.$$

◀ Окружность  $\gamma$  охватывает одну особую точку подынтегральной функции  $|z|=1$ , следовательно, точки  $z_k = e^{\frac{2k\pi i}{5}}$  ( $k = \overline{0, 4}$ ) — ее простые полюсы. Согласно формуле (1), п. 1.3,

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)} = 2\pi i \sum_{k=0}^4 \operatorname{res}_{z_k} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)}.$$

Поскольку

$$\sum_{k=0}^4 \operatorname{res}_{z_k} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} + \operatorname{res}_3 \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} + \operatorname{res}_{\infty} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = 0,$$

то

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)} = -2\pi i \left( \operatorname{res}_3 \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} + \operatorname{res}_{\infty} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} \right).$$

В окрестности  $z = \infty$  имеем

$$\frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = \frac{1}{z^6} \left( 1 + \frac{3}{z} + \left(\frac{3}{z}\right)^2 + \dots \right) \left( 1 + \frac{1}{z^5} + \dots \right),$$

следовательно,  $\operatorname{res}_{\infty} \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = 0$ , поэтому

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)} = -2\pi i \operatorname{res}_3 \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)} = -2\pi i \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{z^5-1} = -\frac{2\pi i}{242} = -\frac{\pi i}{121}.$$

Применив формулу (2), п. 1.3, мы избежали громоздких вычислений. ►

**14.** Вычислить  $I = \int_{\Gamma} \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = \frac{1}{2}\}$ .

◀ Окружность  $\gamma$  охватывает одну изолированную особую точку  $z = 2$  подынтегральной функции  $f$ , являющуюся ее полюсом второго порядка. Следовательно,

$$I = 2\pi i \operatorname{res}_2 f(z) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \left( \frac{(z-2)^2 z}{(z-1)(z-2)^2} \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2} \frac{-1}{(z-1)^2} = -2\pi i. \blacktriangleright$$

**15.** Вычислить  $I = \int_{\Gamma} \frac{z^3 dz}{2z^4 + 1}$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

◀ Подынтегральная функция  $f$  имеет простые полюсы в точках

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \frac{\pi+2k\pi}{4}} \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Согласно формуле (1), п. 1.3, имеем

$$I = 2\pi i \sum_{k=0}^3 \operatorname{res}_{z_k} f(z).$$

Поскольку  $\sum_{k=0}^3 \operatorname{res}_{z_k} f(z) + \operatorname{res}_{\infty} f(z) = 0$ , то  $I = -2\pi i \operatorname{res}_{\infty} f(z)$ . Из разложения

$$f(z) = \frac{1}{2z} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{2z^4}} \right) = \frac{1}{2z} \left( 1 - \frac{1}{2z^4} + \dots \right)$$

следует, что  $\operatorname{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1} = -\frac{1}{2}$  (см. формулу (2), п. 1.2). Следовательно,  $I = \pi i$ . ►

**16.** Вычислить  $I = \int_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)} dz$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

◀ Подынтегральная функция  $f$  имеет полюс второго порядка в точке  $z_1 = 0$  и простые полюсы в точках  $z_2 = -3$ ,  $z_3 = 3$ , однако окружность  $\gamma$  охватывает лишь точку  $z_1$ , поэтому

$$I = 2\pi i \operatorname{res}_0 f(z) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left( \frac{e^z}{z^2-9} \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z(z^2-2z-9)}{(z^2-9)^2} = -\frac{2\pi i}{9}. \blacktriangleright$$

17. Вычислить  $I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \sin \frac{1}{z} dz$ ,  $\Gamma_r = (\gamma_r, \gamma_r^{\text{op}})$ ,  $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ .

◀ Точка  $z = 0$  является существенно особой для подынтегральной функции. Поскольку

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n+1}},$$

то  $\operatorname{res}_0 f(z) = 1$ ,  $I = \operatorname{res}_0 f(z) = 1$ . ▶

18. Вычислить  $I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \sin^2 \frac{1}{z} dz$ ,  $\Gamma = (\gamma_r, \gamma_r^{\text{op}})$ ,  $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ .

◀ Поскольку в разложении в ряд Лорана

$$\sin^2 \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2}{z} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left( \frac{2}{z} \right)^{2n}$$

отсутствует член вида  $c_{-1} z^{-1}$ , то  $\operatorname{res}_0 \sin^2 \frac{1}{z} = 0$ ,  $I = \operatorname{res}_0 \sin^2 \frac{1}{z} = 0$ . ▶

19. Вычислить  $I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} z^n e^{\frac{2}{z}} dz$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\Gamma_r = (\gamma_r, \gamma_r^{\text{op}})$ ,  $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ .

◀ Поскольку

$$z^n e^{\frac{2}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k! z^{k-n}},$$

то при  $n = k - 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}_0$ , т.е. при  $n \geq -1$   $\operatorname{res}_0 z^n e^{\frac{2}{z}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ , а при  $n < -1$   $\operatorname{res}_0 z^n e^{\frac{2}{z}} = 0$ . Следовательно,

$$I = \operatorname{res}_0 z^n e^{\frac{2}{z}} = \begin{cases} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, & \text{если } n \geq -1, \\ 0, & \text{если } n < -1. \end{cases}$$

20. Вычислить  $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi}$  ( $a > 1$ ).

◀ Произведем в интеграле замену переменной  $e^{i\varphi} = z$ . Тогда

$$d\varphi = \frac{dz}{iz}, \quad \frac{1}{a + \cos \varphi} = \frac{2z}{z^2 + 2az + 1}, \quad I = \frac{2}{i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{top}}), \quad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Уравнение  $z^2 + 2az + 1 = 0$  имеет корни  $z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ , причем лишь точка  $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$  охватывается окружностью  $\gamma$  (т.к.  $|\sqrt{a^2 - 1} - a| = \left| -\frac{1}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \right| < 1$ ). По формуле (1), п. 1.3, имеем

$$I = \frac{2}{i} 2\pi i \operatorname{res}_{z_1} \frac{1}{z^2 + 2az + 1} = 4\pi \frac{1}{2z + 2a} \Big|_{z=z_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \quad \blacktriangleright$$

21. Вычислить  $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos \varphi)^2}$  ( $a > b > 0$ ).

◀ Воспользуемся решением предыдущего примера. Для этого представим интеграл  $I$  в виде

$$I = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{a d\varphi}{(a + b \cos \varphi)^2} = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} - \frac{b}{a} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a + b \cos \varphi)^2} = \frac{1}{a} \left( \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} + b \frac{d}{db} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} \right).$$

Согласно решению примера 20 имеем

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} = \frac{1}{b} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\frac{a}{b} + \cos \varphi} = \frac{1}{b} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

$$\frac{d}{db} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} = \frac{d}{db} \left( \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right) = \frac{2\pi b}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$I = \frac{1}{a} \left( \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{2\pi b^2}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{2\pi}{a(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} (a^2 - b^2 + b^2) = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}. \blacktriangleright$$

22. Вычислить  $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos^2 \varphi)^2}$ .

◀ Аналогично предыдущему, представим  $I$  в виде

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos^2 \varphi} - \frac{b}{a} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(a + b \cos^2 \varphi)^2} = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos^2 \varphi} + \frac{b}{a} \frac{d}{db} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos^2 \varphi} = \\ &= \frac{1}{a} \left( \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos^2 \varphi} + b \frac{d}{db} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos^2 \varphi} \right). \end{aligned}$$

Полагая  $2\varphi = t$ , получим:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos^2 \varphi} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{A + B \cos 2\varphi} = \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \frac{dt}{A + B \cos t}, \quad \text{где } A = a + \frac{b}{2}, B = \frac{b}{2}.$$

Принимая во внимание решение предыдущего примера, а также то обстоятельство, что при изменении  $t$  от 0 до  $4\pi$  замкнутый контур, охватывающий полюсы подынтегральной функции, обходит два раза, получим

$$\frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \frac{dt}{A + B \cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2 - B^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + ab}}.$$

Поскольку

$$b \frac{d}{db} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos^2 \varphi} = b \frac{d}{db} \left( \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + ab}} \right) = -\frac{\pi ab}{(a^2 + ab)^{\frac{3}{2}}},$$

то

$$I = \frac{1}{a} \left( \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + ab}} - \frac{\pi ab}{(a^2 + ab)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{\pi}{a(a^2 + ab)^{\frac{3}{2}}} (2(a^2 + ab) - ab) = \frac{\pi(2a + b)}{a^{\frac{3}{2}}(a + b)^{\frac{3}{2}}}. \blacktriangleright$$

$$23. \text{ Вычислить } I = \int_0^{2\pi} e^{\cos \varphi} \cos(n\varphi - \sin \varphi) d\varphi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

◀ Воспользуемся формулами Эйлера для преобразования подынтегральной функции. Имеем

$$e^{\cos \varphi} \cos(n\varphi - \sin \varphi) = \frac{1}{2} e^{\cos \varphi} (e^{i(n\varphi - \sin \varphi)} + e^{-i(n\varphi - \sin \varphi)}) = \frac{1}{2} (e^{in\varphi} e^{e^{-i\varphi}} + e^{-in\varphi} e^{e^{i\varphi}}).$$

Произведя в интеграле замену  $e^{i\varphi} = t$ , получим:

$$I = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} (t^{n-1} e^{\frac{1}{t}} + t^{-n-1} e^t) dt, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}}), \quad \gamma = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}.$$

Согласно формуле (1), п. 1.3, находим:

$$I = 0, \quad \text{если } n < 0, \\ I = \pi \operatorname{res}_0 \left( t^{n-1} e^{\frac{1}{t}} + t^{-n-1} e^t \right) = \pi \left( \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \right) = \frac{2\pi}{n!}, \quad \text{если } n \geq 0. \blacktriangleright$$

$$24. \text{ Вычислить } I = \int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x + i\alpha) dx.$$

◀ Преобразуем подынтегральную функцию с помощью формул Эйлера:

$$\operatorname{tg}(x + i\alpha) = \frac{e^{i(x+i\alpha)} - e^{-i(x+i\alpha)}}{i(e^{i(x+i\alpha)} + e^{-i(x+i\alpha)})} = \frac{1}{i} \frac{e^{i2x} - e^{2\alpha}}{e^{i2x} + e^{2\alpha}}.$$

Полагая  $e^{i2x} = t$ , после замены переменной в интеграле получим:

$$I = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{t - e^{2\alpha}}{t(t + e^{2\alpha})} dt, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}}), \quad \gamma = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}.$$

Если  $\alpha > 0$ , то окружность  $\gamma$  охватывает лишь точку  $t = 0$  — простой полюс подынтегральной функции. В этом случае имеем

$$I = -\pi i \operatorname{res}_0 \frac{t - e^{2\alpha}}{t(t + e^{2\alpha})} = -\pi i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - e^{2\alpha}}{t + e^{2\alpha}} = \pi i.$$

Если  $\alpha < 0$ , то кроме полюса  $t = 0$  кривая  $\gamma$  охватывает и полюс  $t = -e^{2\alpha}$  подынтегральной функции. В этом случае

$$\operatorname{res}_{-e^{2\alpha}} \frac{t - e^{2\alpha}}{t(t + e^{2\alpha})} = \lim_{t \rightarrow -e^{2\alpha}} \frac{t - e^{2\alpha}}{t} = -\frac{2e^{2\alpha}}{-e^{2\alpha}} = 2, \\ I = -\pi i \left( \operatorname{res}_0 \frac{t - e^{2\alpha}}{t(t + e^{2\alpha})} + \operatorname{res}_{-e^{2\alpha}} \frac{t - e^{2\alpha}}{t(t + e^{2\alpha})} \right) = -\pi i(-1 + 2) = -\pi i.$$

Оба рассмотренных случая объединяются в один:  $I = \pi i \operatorname{sgn} \alpha$ .

При  $\alpha = 0$  данный интеграл рассматриваем в смысле главного значения:

$$I = \text{v. p.} \int_0^{\pi} \operatorname{tg} x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \operatorname{tg} x dx + \int_{\frac{\pi}{2} + \varepsilon}^{\pi} \operatorname{tg} x dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \ln \cos x \Big|_{x=\frac{\pi}{2} - \varepsilon}^{x=0} + \ln \cos x \Big|_{x=\pi}^{x=\frac{\pi}{2} + \varepsilon} \right) = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (-\ln \sin \varepsilon + \ln(-\sin \varepsilon) - \ln(-1)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \ln \left( \frac{-\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon} \right) - \ln(-1) \right) = \ln(-1) - \ln(-1) = 0. \blacktriangleright$$



## § 2. Целые и мероморфные функции

### 2.1. Целые функции.

**Определение.** Функция  $f$ , аналитическая во всей плоскости  $\mathbb{C}$ , называется *целой*.

Из определения следует, что целая функция не имеет конечных особых точек. Точка  $z = \infty$  является изолированной особой точкой целой функции. Если  $z = \infty$  — устранимая особая точка, то по теореме Лиувилля целая функция является постоянной.

Пусть  $z = \infty$  — полюс целой функции  $f$ . Тогда ее разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечности имеет вид

$$f(z) = c_n z^n + \dots + c_1 z + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} = P_n(z) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n}.$$

Функция  $f - P_n$  удовлетворяет условиям теоремы Лиувилля, так как

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) - P_n(z)) = 0.$$

Отсюда имеем  $f(z) - P_n(z) = 0$ , или  $f(z) = P_n(z)$ .

Итак если функция  $f$  целая и имеет на бесконечности полюс, то она является многочленом, т. е. целой рациональной функцией.

Целые функции с существенной особенностью на бесконечности называются *целыми трансцендентными функциями*. Примерами таких функций являются  $z \mapsto e^z$ ,  $z \mapsto \cos z$ ,  $z \mapsto \sin z$ .

### 2.2. Мероморфные функции. Теорема Миттаг-Леффлера.

**Определение.** Функция  $f$ , аналитическая в  $\mathbb{C}$ , за исключением лишь полюсов, называется *мероморфной*.

Из определения следует, что у мероморфной функции  $f$  в плоскости  $\mathbb{C}$  нет никаких иных особенностей, кроме полюсов.

Целые функции образуют подкласс класса мероморфных функций. Поскольку каждый полюс является изолированной особой точкой, то мероморфная функция  $f$  не может иметь в  $\mathbb{C}$  более чем счетное множество полюсов. Действительно, в каждом круге  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ ,  $R = \text{const}$ , полюсов может быть лишь конечное число, в противном случае существовала бы их конечная предельная точка, которая была бы неизоллированной особой точкой, а не полюсом.

Таким образом, все полюсы мероморфной функции можно пересчитать, например, в порядке возрастания их абсолютных величин.

Рассмотрим два случая. Пусть функция  $f$  имеет:

- 1) конечное множество полюсов;
- 2) бесконечное (счетное) множество полюсов.

В случае 1) бесконечность является изолированной особой точкой. Пусть  $\{b_j; j = \overline{1, m}\}$  — множество полюсов функции  $f$ ,  $\beta_j$  — порядок полюса  $b_j$ ,

$$g_j(z) = \frac{c_{-1}^{(j)}}{z - b_j} + \frac{c_{-2}^{(j)}}{(z - b_j)^2} + \dots + \frac{c_{-\beta_j}^{(j)}}{(z - b_j)^{\beta_j}},$$

— главная часть лорановского разложения функции  $f$  в окрестности полюса  $b_j$ . Рассмотрим функцию

$$z \mapsto \varphi(z) = f(z) - \sum_{j=1}^m g_j(z),$$

которая является целой, поскольку ее устранимые точки  $b_j$  можно считать устраненными. Так как

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m g_j(z) = 0,$$

то функции  $f$  и  $\varphi$  при подходе к бесконечности ведут себя одинаково.

Пусть  $f$  (а значит и  $\varphi$ ) имеет на бесконечности устранимую особую точку или полюс. Тогда

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k + \sum_{j=1}^m g_j(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)},$$

где  $P_1$  и  $P_2$  — некоторые многочлены.

Доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** Если мероморфная функция  $f$  имеет на бесконечности устранимую особую точку или полюс, то она является рациональной функцией.

Если же у мероморфной функции  $f$  бесконечность является существенно особой точкой, то такую функцию можно представить в виде

$$f(z) = \varphi(z) + \sum_{j=1}^m g_j(z), \quad (1)$$

где  $\varphi$  — некоторая целая функция, отличная от полинома.

Рассмотрим теперь случай 2), когда мероморфная функция  $f$  имеет бесконечное множество полюсов. Такими функциями, например, являются  $z \mapsto \operatorname{tg} z$ ,  $z \mapsto \operatorname{ctg} z$ . Покажем, что и в этом случае для функции  $f$  можно получить формулу, аналогичную (1).

**Определение.** Ряд мероморфных функций  $\sum g_n$  называется сходящимся (равномерно сходящимся) на множестве  $M \subset \mathbb{C}$ , если лишь конечное число членов этого ряда имеют полюсы на  $M$  и после устранения этих членов ряд сходится (равномерно сходится) на  $M$ .

**Теорема 2** (Миттаг-Леффлера). Какой бы ни была последовательность точек  $(b_i)$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i = \infty$ ,  $|b_1| \leq |b_2| \leq \dots$  и последовательность функций  $(g_i)$  вида

$$g_i(z) = \sum_{n=1}^{\beta_j} \frac{c_{-n}^{(j)}}{(z - b_i)^n},$$

существует мероморфная функция  $f$ , имеющая полюсы в точках  $b_i$  с главными частями в них, равными  $g_i(z)$ .

◀ Не ограничивая общности считаем, что  $b_1 \neq 0$ . Функция  $g_i$  является аналитической в круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |b_i|\}$  и, следовательно, может быть представлена в нем степенным рядом

$$g_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_i^{(k)}(0)}{k!} z^k. \quad (2)$$

Фиксируем  $q \in \mathbb{R}$ , где  $0 < q < 1$ . Круг  $K_j = \{z \in \mathbb{C} : |z| < q|b_j|\}$  компактно принадлежит кругу  $K$ , в силу чего ряд (2) сходится в нем абсолютно и равномерно. Поэтому существует такое  $n_j \in \mathbb{N}$ , что

$$\left| g_j(z) - \sum_{k=0}^{n_j} \frac{g_j^{(k)}(0)}{k!} z^k \right| < \frac{1}{2^j} \quad \forall z \in \overline{K}_j.$$

Обозначим

$$P_j(z) = \sum_{k=0}^{n_j} \frac{g_j^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

Тогда

$$|g_j(z) - P_j(z)| < \frac{1}{2^j} \quad \forall z \in \overline{K}_j.$$

Рассмотрим ряд  $\sum (g_j - P_j)$ . Он равномерно сходится на любом компакте  $\tilde{K} \subset \mathbb{C}$  в смысле данного выше определения. Действительно,

$$\forall \tilde{K} \subset \mathbb{C} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad \tilde{K} \subset K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| < q|b_n|\}.$$

Рассмотрим ряд  $\sum (g_j - P_j)$ ,  $j \geq N$ . Его члены являются аналитическими функциями на  $\tilde{K}$  и мажорируются геометрической прогрессией  $\sum \frac{1}{2^j}$ ,  $j \geq N$ . Следовательно, его сумма  $f_N(z)$  — аналитическая функция в круге  $\tilde{K}$ .

Пусть функция  $f$  определена равенством

$$f(z) = \sum_{j=1}^{N-1} (g_j - P_j) + f_N(z).$$

Функция  $f$  аналитическая в круге  $\bar{K}$ , за исключением полюсов  $b_j$  ( $j = \overline{1, N-1}$ ) и имеет в  $b_j$  главные части  $g_j(z)$ . Поскольку  $\bar{K}$  — произвольный компакт, то функция  $f$  мероморфная, имеет в  $\mathbb{C}$  заданные полюсы  $b_j$  с главными частями  $g_j$ . ►

**Следствие.** Любую мероморфную функцию  $f$  можно представить суммой ряда

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(z) - P_n(z)), \quad (3)$$

равномерно сходящегося на каждом компакте, где  $h$  — целая функция,  $g_n$  — главные части лорановских разложений  $f$  в окрестности  $b_n$  (полюсы  $b_n$  занумерованы в порядке возрастания их абсолютных величин,  $b_1 \neq 0$ ),  $P_n$  — некоторые многочлены.

◀ По теореме Миттаг-Леффлера строим функцию  $f_0$ , где

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(z) - P_n(z)).$$

Она имеет те же полюсы и те же главные части в них, что и  $f$ . Следовательно,  $f - f_0 = h$  — целая функция. ►

**Замечание.** Если функция  $f$  имеет полюс в точке  $z = 0$  с главной частью  $g_0$ , то в наших рассуждениях везде  $f$  заменим на  $f - g_0$ .

Иногда термин “мероморфная функция” используется в более общем понимании. Именно, функцию  $f$  называют мероморфной в области, если  $f$  не имеет в ней кроме полюсов других особенностей. Такая функция также не может иметь более чем счетное множество полюсов. Если это множество бесконечное, то предельные точки множества полюсов принадлежат границе области.

### 2.3. Разложение мероморфных функций на простейшие дроби.

Пусть  $\zeta \mapsto f(\zeta)$  — любая мероморфная функция,  $\gamma$  — замкнутая жорданова кривая, окружающая начало координат и не проходящая через полюсы функции  $f$ . Пусть  $\{b_k; k = \overline{1, n}\}$  — множество полюсов функции  $f$ , принадлежащее внутренности  $\gamma$ ,  $\forall k = \overline{1, n}$   $b_k \neq 0$ ,  $g_k$  — главные части лорановских разложений функции  $f$  в окрестности полюса  $b_k$ . Если  $\zeta = 0$  — полюс функции  $f$ , то главную часть лорановского разложения в его окрестности обозначим  $g_0$  (если  $\zeta = 0$  не является полюсом, то считаем  $g_0 \equiv 0$ ).

Пусть  $z$  — любая фиксированная точка, принадлежащая внутренности  $\gamma$ . Рассмотрим функцию

$$\zeta \mapsto \frac{\sum_{k=0}^n g_k(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Она рациональная в  $\mathbb{C}$ , имеет на бесконечности по меньшей мере нуль второго порядка и, следовательно, ее вычет на бесконечности равен нулю.

Воспользуемся теоремой Коши для односвязной области, а также определением вычета на бесконечности. Получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sum_{k=0}^n g_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\sum_{k=0}^n g_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -\operatorname{res}_{\infty} \frac{\sum_{k=0}^n g_k(\zeta)}{\zeta - z} = 0$$

(здесь  $\Gamma_R = (\gamma_R, \gamma_R^{\text{op}})$ ,  $\gamma_R = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = R\}$  — окружность, охватывающая  $\gamma$ ). Отсюда следует равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - \sum_{k=0}^n g_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}}).$$

Функция  $f - \sum_{k=0}^n g_k$  аналитическая в области, ограниченной кривой  $\gamma$  (устранимые особенности этой функции считаем устраненными). Согласно теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - \sum_{k=0}^n g_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) - \sum_{k=0}^n g_k(z).$$

В результате получим равенство

$$f(z) = \sum_{k=0}^n g_k(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1)$$

Допустим, что существует последовательность  $(\gamma_m)$  замкнутых жордановых кривых, окружающих начало координат и не проходящих через полюсы функции  $f$ , с такими свойствами:

- 1)  $\forall m \in \mathbb{N}$   $\gamma_m$  принадлежит внутренности  $\gamma_{m+1}$ ;
  - 2)  $r_m \rightarrow \infty$  при  $m \rightarrow \infty$ , где  $r_m$  — расстояние от начала координат до кривой  $\gamma_m$ .
- Из этого, в частности, следует, что  $\forall R > 0$  существует такое  $m_0 \in \mathbb{N}$ , что круг  $K_R = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < R\}$   $\forall m > m_0(R)$  принадлежит внутренности  $\gamma_m$ .

$$3) \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_m} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0, \quad \Gamma_m = (\gamma_m, \gamma_m^{\text{op}}), \quad |z| < R. \quad (2)$$

Запишем формулу (1) для  $\Gamma_m$ . Обозначим через  $n_m$  число полюсов, охватываемых кривой  $\gamma_m$ . Получим:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n_m} g_k(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad m > m_0(R). \quad (3)$$

Перейдем в (3) к пределу при  $m \rightarrow \infty$ . Принимая во внимание формулу (2), имеем

$$f(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_m} g_k(z). \quad (4)$$

Таким образом, функция  $f$  в круге  $K_R$  представлена в виде предела последовательности сумм главных частей ее лорановских разложений относительно полюсов, принадлежащих внутренности  $\gamma_m$ .

Укажем достаточные условия справедливости формулы (2). Из оценки

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right| < \frac{1}{2\pi(r_m - R)} \int_{\gamma_m} |f(\zeta)| |d\zeta|$$

следует, что для выполнения соотношения (2) достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{m \rightarrow \infty}} \int_{\gamma_m} |f(\zeta)| |d\zeta| = M, \quad M < \infty. \quad (5)$$

Покажем, что разложение функции  $f$  можно получить и при более слабых ограничениях, чем (2).

Пусть существует такое целое неотрицательное число  $p$ , что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{p+1}(\zeta - z)} d\zeta = 0, \quad |z| < R. \quad (6)$$

Достаточным условием соотношения (6) является следующее:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_m} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta^{p+1}} \right| |d\zeta| < \infty. \quad (7)$$

При  $|z| < |\zeta|$  имеем

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \sum_{n=0}^p \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} = \sum_{n=0}^p \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} + \frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+2} (1 - \frac{z}{\zeta})} = \sum_{n=0}^p \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} + \frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}(\zeta - z)}.$$

Подставим полученное разложение  $\frac{1}{\zeta - z}$  в (3):

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n_m} g_k(z) + \sum_{n=0}^p z^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta + \frac{z^{p+1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta^{p+1}(\zeta - z)}.$$

Принимая во внимание равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \sum_{k=0}^{n_m} \operatorname{res}_{b_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n_m} A_k^{(n)},$$

имеем

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n_m} g_k(z) + \sum_{k=0}^{n_m} \sum_{n=0}^p A_k^{(n)} z^n + \frac{z^{p+1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{p+1}(\zeta - z)} d\zeta,$$

или

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n_m} (g_k(z) + P_k(z)) + \frac{z^{p+1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{p+1}(\zeta - z)} d\zeta, \quad (8)$$

где  $P_k(z) = \sum_{n=0}^p A_k^{(n)} z^n$  — многочлен степени не выше  $p$ .

Переходя в (8) к пределу при  $m \rightarrow \infty$  и принимая во внимание (6), имеем

$$f(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n_m} (g_k(z) + p_k(z)), \quad |z| < R. \quad (9)$$

Равенство (4) (или (9)) и является искомым разложением мероморфной функции на простые дроби.

**Пример.** Найти разложение функции  $z \mapsto \operatorname{ctg} z$  на простые дроби.

Имеем  $b_k = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ),  $g_k = \frac{1}{z - k\pi}$ . Пусть  $\gamma_m$  — границы квадратов с центрами в начале координат и сторонами длиной  $(2m+1)\pi$ , параллельными координатным осям. Оценим  $\operatorname{ctg} z$  на сторонах квадрата: 1) параллельных мнимой оси; 2) параллельных действительной оси.

$$1) z = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2} + iy,$$

$$|\operatorname{ctg} z| = \left| \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} \right| = \left| \frac{e^{\pm i(2m+1)\pi} e^{-2y} + 1}{e^{\pm i(2m+1)\pi} e^{-2y} - 1} \right| = \left| \frac{1 - e^{-2y}}{1 + e^{-2y}} \right| < 1;$$

$$2) z = x \pm i\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

$$|\operatorname{ctg} z| = \left| \frac{e^{2iz} e^{\mp(2m+1)\pi} + 1}{e^{2iz} e^{\mp(2m+1)\pi} - 1} \right| < \frac{e^{\mp(2m+1)\pi} + 1}{|e^{\mp(2m+1)\pi} - 1|} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}.$$

Принимая во внимание, что  $\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} > 1$ , получаем:

$$|\operatorname{ctg} z| \leq \frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}, \quad z \in \gamma_m. \quad (10)$$

Условие (7) выполняется для  $\operatorname{ctg} z$  при  $p = 0$ . Действительно,

$$\int_{\gamma_m} \frac{|\operatorname{ctg} z|}{|z|} |dz| \leq \frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} \cdot \frac{4(2m+1)\pi}{(m+\frac{1}{2})\pi} \rightarrow \frac{8(1+e^{-\pi})}{1-e^{-\pi}} \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Таким образом,  $P_k(z)$  являются постоянными (многочлены нулевой степени):

$$P_k(z) = A_k^0 = \operatorname{res}_{k\pi} \frac{\operatorname{ctg} \zeta}{\zeta}.$$

Отсюда

$$P_0(z) = 0, \quad P_k(z) = \frac{1}{k\pi}.$$

По формуле (9) получаем разложение  $\operatorname{ctg} z$  на простые дроби

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=-m}^m' \left( \frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) \right),$$

или

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}' \left( \frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) \quad (11)$$

(символ  $\sum'$  указывает, что  $k$  принимает все значения из множества  $\mathbb{Z}$ , за исключением  $k = 0$ ).

Принимая во внимание абсолютную и равномерную сходимость ряда (11), последнюю формулу можно также записать в виде

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}. \quad (12)$$

**Замечание.** В качестве  $\gamma_m$  можно было взять окружности  $\gamma_m = \{z \in \mathbb{C} : |z| = m + \frac{1}{2}\}$ . При этом оценка (10) остается прежней.

Рассмотрим задачи.

**25.** С помощью теоремы Миттаг-Леффлера найти общий вид мероморфной функции  $f$ , имеющей полюсы второго порядка в точках  $b_k = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) с главными частями в них

$$g_n(z) = \frac{1}{(z - n\pi)^2}.$$

◀ Очевидно, ряд из главных частей  $\sum \frac{1}{(z - n\pi)^2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , равномерно сходится на любом компакте (в смысле определения п. 2.2.), так как мажорируется в любом круге  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$  сходящимся рядом  $\sum \frac{1}{(n\pi - R)^2}$ . Поэтому по формуле (3), п. 2.2, полагая в ней  $P_n(z) = 0$ , получаем:

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}. \quad \blacktriangleright$$

**26.** В условиях задачи 25 найти функцию  $h$ , если  $f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$ .

◀ Функция  $z \mapsto h(z) = \frac{1}{\sin^2 z} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}$  периодическая, с периодом  $\pi$ . Изучим ее в полосе  $G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z \leq \pi\}$ . Имеем  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|z - n\pi| \geq n\pi - |z| \geq \pi(n-1).$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2} \right| \leq \frac{1}{|z|^2} + \sum_{n=-m}^m \frac{1}{|z - n\pi|^2} + 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2 \pi^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Поскольку  $|\sin^2 z| = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow \infty$ ,  $0 < \operatorname{Re} z \leq \pi$ , то функция  $h$  ограничена в полосе  $G$  и, в силу периодичности, она ограничена и в плоскости  $\mathbb{C}$ . Согласно теореме Лиувилля,  $h(z) \equiv 0$ . Таким образом,

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}. \blacktriangleright$$

**27.** С помощью теоремы Миттаг-Леффлера найти общий вид мероморфной функции  $f$ , имеющей полюсы первого порядка в точках  $b_n = n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) с вычетами в них соответственно равными  $n$ .

◀ Имеем

$$g_n(z) = \frac{n}{z-n} = -\frac{1}{1-\frac{z}{n}} = -\left(1 + \frac{z}{n} + \left(\frac{z}{n}\right)^2 + \dots\right), \quad |z| < n,$$

$$g_n(z) + 1 + \frac{z}{n} = -\left(\frac{z}{n}\right)^2 - \left(\frac{z}{n}\right)^3 - \dots = -\frac{\left(\frac{z}{n}\right)^2}{1-\frac{z}{n}} = -\frac{z^2}{n(n-z)} = \frac{z^2}{n(z-n)}.$$

Принимая во внимание, что

$$\left| \frac{z^2}{n(z-n)} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}(n-\sqrt[4]{n})} \quad \forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < \sqrt[4]{n}\},$$

делаем вывод о том, что ряд  $\sum \frac{z^2}{n(z-n)}$  равномерно сходится на любом компакте  $K \subset \mathbb{C}$  в смысле определения п. 2.2. Итак, согласно формуле (2), п. 2.2, имеем

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n(z-n)}. \blacktriangleright$$

**28.** Доказать равенство

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2z}{z^2 - n^2 \pi^2}, \quad z \neq n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

◀ Функция  $z \mapsto \frac{1}{\sin z}$  имеет простые полюсы в точках  $b_n = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ),

$$g_n(z) = \frac{(-1)^n}{z - n\pi}.$$

В качестве  $\gamma_m$  возьмем границу квадрата с вершинами в точках  $(m + \frac{1}{2})\pi(\pm 1 \pm i)$ . Оценим  $\frac{1}{\sin z}$ : 1) на сторонах квадрата, параллельных мнимой оси; 2) на сторонах квадрата, параллельных действительной оси. Имеем

$$1) \quad z = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi + iy, \quad \frac{1}{|\sin z|} = \frac{2}{\left|e^{\pm(m+\frac{1}{2})\pi i} e^{-y} - e^{\mp(m+\frac{1}{2})\pi i} e^y\right|} = \frac{2}{e^y + e^{-y}} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} \leq 1;$$

$$2) \quad z = x \pm i \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

$$\frac{1}{|\sin z|} = \frac{2}{\left|e^{ix} e^{-(m+\frac{1}{2})\pi} - e^{-ix} e^{(m+\frac{1}{2})\pi}\right|} \leq \frac{2}{e^{(m+\frac{1}{2})\pi} - e^{-(m+\frac{1}{2})\pi}} = \frac{1}{\operatorname{sh} \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi} \leq \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}} \leq 1.$$

Таким образом, оценка (7), п. 2.3., выполняется при  $p = 0$ ,  $P_n(z) = A_n^0 = \operatorname{res}_{n\pi} \frac{1}{z \sin z}$ . Отсюда  $P_0(z) = 0$ ,  $P_n(z) = \frac{1}{n\pi}$ . По формуле (9), п. 2.3, находим:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2z}{z^2 - n^2\pi^2}. \blacktriangleright$$

**29.** Доказать справедливость разложения

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 + 4n^2\pi^2}.$$

◀ Заменяя в (12), п. 2.3,  $z$  на  $iz$  и сократив на  $-i$ , получим:

$$\operatorname{cth} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + n^2\pi^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{z}{e^z - 1} = -\frac{z}{2} + \frac{z}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2} = -\frac{z}{2} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 + 4n^2\pi^2}. \blacktriangleright$$

**30.** Найти разложение мероморфной функции  $z \mapsto f(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi z$  без использования формулы (12), п. 2.3.

◀ Рассмотрим ряд Фурье функции  $x \mapsto \varphi(x) = \cos \alpha x$ ,  $-\pi < x < \pi$ . Имеем

$$\cos \alpha x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \text{где} \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos nx \, dx = (-1)^n \frac{2\alpha}{\pi} \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha^2 - n^2}, \quad n \in \mathbb{Z}_0.$$

Поэтому

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{\alpha^2 - n^2}.$$

При  $x = \pi$  получаем:

$$\pi \operatorname{ctg} \alpha \pi = \pi \frac{\cos \alpha \pi}{\sin \alpha \pi} = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}.$$

Если продолжить аналитически это соотношение с действительной оси в комплексную плоскость, то получим решение задачи в виде

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}. \blacktriangleright$$

### § 3. Бесконечные произведения

Изучение функций в комплексной плоскости позволяет установить не только новые, иногда неожиданные их свойства (например, связь между показательной и тригонометрическими функциями), но и выделить отдельные классы функций. Целесообразность выделения таких классов должна быть подтверждена их значением для развития самой теории функций и ее применений.



### 3.1. Числовые бесконечные произведения

Предполагается, что читатель знаком с понятием бесконечного произведения действительных чисел и некоторыми результатами соответствующей теории.

Пусть  $(z_n)$  — произвольная последовательность комплексных чисел.

**Определение 1.** Бесконечное произведение

$$\prod (1 + z_n) \quad (1)$$

называется *сходящимся*, если последовательность  $(P_n)$  частичных произведений, где

$$P_n = \prod_{k=1}^n (1 + z_k),$$

сходится к конечному и отличному от нуля предельному значению  $P : P_n \rightarrow P, 0 < |P| < \infty$ , которое

называется *значением бесконечного произведения* (1) и обозначается через  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z_n)$ .

Если среди множителей  $(1 + z_n)$  есть конечное число равных нулю, то бесконечное произведение называется *сходящимся* или *расходящимся* в зависимости от того, каким является бесконечное произведение, полученное из данного путем извлечения из него нулевых множителей. В случае, когда среди множителей  $(1 + z_n)$  есть бесконечное множество нулевых, бесконечное произведение называется *расходящимся*.

В соответствии с данными определениями исследование сходимости бесконечного произведения сводится к исследованию сходимости бесконечного произведения, все сомножители которого отличны от нуля. Очевидно, для сходимости бесконечного произведения (1) необходимо, чтобы  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ . Действительно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1$ , следовательно,  $z_n \rightarrow 0$ .

**Теорема 1** (о равносходимости бесконечного произведения и числового ряда). Бесконечное произведение  $\prod (1 + z_n)$  и ряд  $\sum \ln(1 + z_n)$ ,  $-\pi < \operatorname{Im} \ln(1 + z_n) \leq \pi$ , одновременно *сходятся* или *расходятся*.

◀ Пусть бесконечное произведение  $\prod_n (1 + z_n)$  сходится. Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P, P \neq 0, P \neq \infty$ ,

где  $P_n = \sum_{k=1}^n (1 + z_k), P = re^{i\varphi}$ . Если  $P_n = r_n e^{i\varphi_n}, -\pi < \varphi_n \leq \pi, 1 + z_k = \rho_k e^{i\theta_k}, \pi < \theta_k \leq \pi$ ,

то  $\varphi_n \rightarrow \varphi, \theta_k \rightarrow 0$  при  $z_k \rightarrow 0$ . Обозначим  $S_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + z_k)$  Тогда

$$S_n = \ln P_n + 2m_n \pi i, \quad (2)$$

где  $m_n$  — целое число. Очевидно,  $2m_n \pi = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n - \varphi_n$  и, таким образом,

$$2\pi(m_{n+1} - m_n) = \theta_{n+1} - (\varphi_{n+1} - \varphi_n).$$

Поскольку  $\theta_{n+1} \rightarrow 0, \varphi_{n+1} - \varphi_n \rightarrow 0$ , то  $|2\pi(m_{n+1} - m_n)| < 2\pi$  при достаточно большом  $n$ . Поэтому  $m_{n+1} = m_n = m$  для указанных  $n$  и  $S_n = \ln P_n + 2m\pi i$ . Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + z_n) = \ln P + 2m\pi i,$$

т. е. ряд  $\sum \ln(1 + z_n)$  сходится.

Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + z_n) = S$ . Из равенства (2) получаем  $e^{S_n} = P_n$ , откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \exp \left( \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right) = e^S = P,$$

т. е. бесконечное произведение  $\prod (1 + z_n)$  сходится.

Если бесконечное произведение  $\prod (1 + z_n)$  расходится, то и ряд  $\sum \ln(1 + z_n)$  расходится. Допустив, что этот ряд сходится, получили бы противоречие с доказанным выше. Аналогично, из расходимости ряда  $\sum \ln(1 + z_n)$  следует расходимость бесконечного произведения  $\prod (1 + z_n)$ .

**Определение 2.** Бесконечное произведение (1) называется абсолютно сходящимся, если бесконечное произведение

$$\prod (1 + |z_n|) \quad (3)$$

сходится.

Бесконечное произведение (1) и ряд  $\sum z_n$  одновременно абсолютно сходятся или расходятся. Действительно, из оценки  $1 + |z_j| \leq e^{|z_j|}$  следуют неравенства, выполняющиеся  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| \leq (1 + |z_1|)(1 + |z_2|) \dots (1 + |z_n|) \leq e^{|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|}. \quad (4)$$

Частичные произведения  $\prod_{k=1}^n (1 + |z_k|)$  и частичные суммы  $\sum_{k=1}^n |z_k|$  соответствующих бесконечного произведения и числового ряда образуют монотонно возрастающие последовательности, которые, согласно неравенствам (4), одновременно ограничены сверху или неограничены.

**Теорема 2.** Абсолютно сходящееся бесконечное произведение сходится.

◀ Пусть бесконечное произведение (3) сходится,  $\tilde{P}_n$  — его  $n$ -частичное произведение,  $\tilde{P}_n \rightarrow \tilde{P}$ . Для частичных произведений бесконечного произведения (1) имеем

$$P_n - P_{n-1} = P_{n-1} z_n,$$

$$|P_n - P_{n-1}| = |P_{n-1}| |z_n| = |1 + z_1| |1 + z_2| \dots |1 + z_{n-1}| |z_n| \leq (1 + |z_1|) \dots (1 + |z_{n-1}|) |z_n| = \tilde{P}_n - \tilde{P}_{n-1},$$

так как

$$\tilde{P}_n = \prod_{k=1}^n (1 + |z_k|), \quad \tilde{P}_n - \tilde{P}_{n-1} = (1 + |z_1|) \dots (1 + |z_{n-1}|) |z_n|, \quad n \geq 2.$$

Поскольку  $\tilde{P}_n \rightarrow \tilde{P}$ , то ряд  $\sum (\tilde{P}_n - \tilde{P}_{n-1})$  ( $n \geq 2$ ) сходится и, согласно теореме сравнения рядов, будет сходящимся ряд  $\sum (P_n - P_{n-1})$  ( $n \geq 2$ ). Это означает, что  $P_n \rightarrow P_0$ ,  $P_0 \neq \infty$ . Осталось доказать, что  $P_0 \neq 0$ .

Согласно теореме 1, ряд  $\sum |z_n|$  сходится. Поскольку начиная с некоторого номера модули  $|1 + z_n|$  ограничены снизу, то ряд  $\sum \left| \frac{z_n}{1 + z_n} \right|$  сходится. Поэтому, по теореме 1, бесконечное произведение  $\prod (1 + \left| \frac{z_n}{1 + z_n} \right|)$  сходится, а вместе с ним и бесконечное произведение  $\prod q_n$ , где  $q_n = \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{z_k}{1 + z_k} \right)$  (чтобы убедиться в этом, полагаем выше  $P'_n = q_n$ ,  $\tilde{P}'_n = \prod_{k=1}^n \left( 1 + \left| \frac{z_k}{1 + z_k} \right| \right)$ ).

Таким образом, существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q_0 \neq 0$ . Так как  $q_n = \frac{1}{\tilde{P}_n}$ , то  $P_n \rightarrow P_0 \neq 0$ . ▶

Значение абсолютно сходящегося бесконечного произведения не зависит от порядка сомножителей. Действительно, в этом случае сходится ряд  $\sum |z_n|$  (по теореме 1). Пусть  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Тогда существует такое  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , что  $\forall n \geq n_\varepsilon$   $|z_n| < \frac{1}{2}$  (т.к.  $|z_n| \rightarrow 0$  в силу необходимого условия сходимости ряда). Для указанных  $n$  получаем оценку

$$\begin{aligned} \left| \frac{\ln(1 + z_n)}{z_n} \right| &= \left| \frac{1}{z_n} \left( z_n - \frac{z_n^2}{2} + \frac{z_n^3}{3} - \dots \right) \right| = \left| 1 - \frac{z_n}{2} + \frac{z_n^2}{3} - \dots \right| \leq \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \dots \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots = 2, \end{aligned}$$

из которой следует, что  $\forall n \geq n_\varepsilon$   $|\ln(1 + z_n)| \leq 2|z_n|$ . Следовательно, ряд  $\sum \ln(1 + z_n)$  абсолютно сходится. Теперь утверждение о независимости значения абсолютно сходящегося бесконечного произведения (1) является следствием равенства

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z_n) = \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + z_n) \right)$$

(см. теорему 1), поскольку для абсолютно сходящихся рядов выполняется свойство коммутативности.

### 3.2. Равномерно сходящиеся бесконечные произведения

Пусть  $(f_n)$  — последовательность функций  $f_n : C \rightarrow C$ , и  $\forall n \in \mathbb{N} D_{f_n} = G$ , где  $G \subset C$  — некоторая область. Тогда  $\forall z \in G$  можно рассматривать бесконечное произведение  $\prod (1 + f_n(z))$ . В случае его сходимости оно называется поточечно сходящимся в области  $G$ . При этом оно определяет в  $G$  некоторую функцию  $z \mapsto P(z)$ . Если последовательность  $(P_n)$  частичных произведений  $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + f_k)$  равномерно сходится на любом компакте  $K \subset G$  к функции  $P$  ( $P_n \rightrightarrows P$ ), то бесконечное произведение  $\prod (1 + f_n)$  называется *равномерно сходящимся в области  $G$* . Согласно теореме 6, п. 1.3, гл. 5, бесконечное произведение  $\prod (1 + f_n)$  сходится равномерно в области  $G$  тогда и только тогда, когда последовательность  $(P_n)$  его частичных произведений равномерно фундаментальна в  $G$ .

**Теорема** (достаточные условия равномерной сходимости бесконечного произведения). Для равномерной сходимости бесконечного произведения  $\prod (1 + f_n)$  достаточно существования такой числовой последовательности  $(a_n)$ , чтобы выполнялись условия:

- 1)  $\forall n \in \mathbb{N} \|f_n\| \leq a_n$
- 2) бесконечное произведение  $\prod (1 + a_n)$  сходится.

◀ Поскольку бесконечное произведение  $\prod (1 + a_n)$  сходится, то последовательность  $(P_n)$  его частичных произведений  $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$  фундаментальна:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall (n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbb{N}) \quad P_{n+p} - P_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k) \left( \prod_{k=n+1}^{n+p} (1 + a_k) - 1 \right) < \varepsilon.$$

Оценим

$$\left\| \prod_{k=1}^{n+p} (1 + f_k) - \prod_{k=1}^n (1 + f_k) \right\| = \left\| \prod_{k=1}^n (1 + f_k) \left( \prod_{k=n+1}^{n+p} (1 + f_k) - 1 \right) \right\|$$

для  $n \geq n_\varepsilon$  и всех  $p \in \mathbb{N}$ . Из свойств равномерной нормы имеем

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{k=1}^n (1 + f_k) \left( \prod_{k=n+1}^{n+p} (1 + f_k) - 1 \right) \right\| &\leq \left\| \prod_{k=1}^n (1 + f_k) \right\| \cdot \left\| \prod_{k=n+1}^{n+p} (1 + f_k) - 1 \right\| \leq \\ &\leq \prod_{k=1}^n (1 + \|f_k\|) \left( \prod_{k=n+1}^{n+p} (1 + \|f_k\|) - 1 \right). \end{aligned}$$

Обозначим  $\tilde{P}_n = \prod_{k=1}^n (1 + f_k)$ . Принимая во внимание условие 1), получаем  $\forall (n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbb{N})$ :

$$\|\tilde{P}_{n+p} - \tilde{P}_n\| \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k) \left( \prod_{k=n+1}^{n+p} (1 + a_k) - 1 \right) < \varepsilon,$$

т. е. последовательность  $(\tilde{P}_n)$  равномерно фундаментальна и бесконечное произведение

$$\prod (1 + f_n)$$

сходится равномерно в области  $G$ . ▶

### 3.3. Представление целой функции в виде бесконечного произведения.

Пусть задана некоторая последовательность  $(a_n)$ , модули членов которой образуют неубывающую последовательность, причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $a_n \neq 0$  и среди чисел  $a_n$  может быть конечное множество равных друг другу.

Рассмотрим бесконечное произведение  $P$ , где

$$P(z) = \prod \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left( \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p_n} \left( \frac{z}{a_n} \right)^{p_n} \right), \quad (1)$$

где числа  $p_n \in \mathbb{Z}_0$  такие, что ряд

$$\sum \left( \frac{z}{a_n} \right)^{p_n+1} \quad (2)$$

абсолютно и равномерно сходится в любом круге  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$  (в качестве  $p_n$  можно взять, например,  $p_n = n - 1$ ).

Покажем, что бесконечное произведение (1) равномерно сходится на любом компакте  $K \subset \mathbb{C}$ .

Введем в рассмотрение функцию  $g_n$ , где

$$g_n(z) = \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left( \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p_n} \left( \frac{z}{a_n} \right)^{p_n} \right).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \ln g_n(z) &= \ln \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) + \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p_n} \left( \frac{z}{a_n} \right)^{p_n} = \\ &= -\frac{1}{p_n+1} \left( \frac{z}{a_n} \right)^{p_n+1} - \frac{1}{p_n+2} \left( \frac{z}{a_n} \right)^{p_n+2} - \frac{1}{p_n+3} \left( \frac{z}{a_n} \right)^{p_n+3} - \dots \end{aligned}$$

При  $\left| \frac{z}{a_n} \right| \leq q < 1$  получаем оценку

$$|\ln g_n(z)| \leq \left| \frac{z}{a_n} \right|^{p_n+1} \cdot \frac{1}{1-q}. \quad (3)$$

Для любого компакта  $K \subset \mathbb{C}$  найдется такой номер  $n_0$ , что  $\forall n \geq n_0$   $K \subset K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq q|a_n|\}$ . Следовательно, ряд

$$\sum \ln g_n(z) \quad (n \geq n_0)$$

мажорируется на компакте  $K$  равномерно сходящимся рядом (2), и поэтому его сумма является аналитической функцией  $g_{n_0}$ .

Отсюда следует сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} g_n(z) = f_{n_0}(z) = e^{g_{n_0}(z)}, \quad (4)$$

где  $f_{n_0}$  — аналитическая функция на компакте  $K$ , отличная от нуля. Бесконечное произведение (1) отличается от  $f_{n_0}(z)$  множителем  $\prod_{n=1}^{n_0-1} g_n(z)$ , который обращается в нуль в точках  $a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}$  и только в этих точках. Поскольку  $K$  — произвольный компакт, то  $z \mapsto P(z)$  — целая функция с нулями  $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ ,  $a_n \neq 0$ , причем кратность нуля функции  $P$  в точке  $a_k$  такая же, как и количество членов последовательности  $(a_n)$ , равных числу  $a_k$ . Бесконечное произведение (1) называется *бесконечным произведением Вейерштрасса*.

Очевидно, функция  $z \mapsto \varphi(z) = z^\lambda P(z)$  является целой, имеющей в точке  $a_0 = 0$  нуль кратности  $\lambda$  и последовательность нулей  $(a_n)$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

Теперь легко доказать теорему Вейерштрасса о представлении целой функции в виде бесконечного произведения.

**Теорема** (Вейерштрасса). Любую целую функцию  $f$ , имеющую бесконечное множество нулей, причем  $z = 0$  — нуль порядка  $\lambda$  и  $(a_n)$  — последовательность остальных нулей,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , можно представить бесконечным произведением, соответствующим ее нулям:

$$f(z) = z^\lambda e^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left( \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p_n} \left( \frac{z}{a_n} \right)^{p_n} \right), \quad (5)$$

где  $h$  — некоторая целая функция, а числа  $p_n$  выбраны так, чтобы сходился ряд (2).

Поскольку функция  $z \mapsto \varphi(z) = z^\lambda P(z)$  является целой и ее нули совпадают с нулями функции  $f$ , то функция  $\frac{f}{\varphi}$  также является целой (ее устранимые особые точки считаем устранимыми) и не имеет нулей в плоскости  $\mathbb{C}$ . По теореме монодромии (см. теорему 2, п. 1.3, гл. 6), функция  $z \mapsto h(z) = \ln \frac{f(z)}{\varphi(z)}$  также является целой и, следовательно,

$$f(z) = e^{h(z)} \varphi(z) = z^\lambda e^{h(z)} P(z). \quad \blacktriangleright$$

### 3.4. Разложение $\sin z$ в бесконечное произведение.

В качестве примера получим разложение целой функции  $z \mapsto \sin z$  в бесконечное произведение. Она имеет простой нуль в точке  $z = 0$ , а также простые нули в точках  $a_n = n\pi$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Поскольку ряд  $\sum_{n \neq 0} \left( \frac{z}{n\pi} \right)^2$  сходится на любом компакте, то в бесконечном произведении (1), п. 3.3, можно взять  $\forall n \ P_n = 1$ . Таким образом, согласно формуле (5), имеем

$$\sin z = z e^{h(z)} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{n\pi} \right)^{\frac{z}{n\pi}},$$

где  $h$  — некоторая целая функция. Символ  $\prod'$  обозначает отсутствие множителя, отвечающего значению  $n = 0$ .

Пусть  $K \subset \mathbb{C}$  — произвольный компакт, не содержащий нулей синуса. Для  $z \in K$  получаем:

$$\begin{aligned} \ln \sin z &= h(z) + \ln z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \ln \left( 1 + \frac{z}{n\pi} \right) + \frac{z}{n\pi} \right), \\ \frac{d}{dz} \ln \sin z &= \operatorname{ctg} z = h'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right). \end{aligned}$$

Сравнивая полученное равенство с разложением  $\operatorname{ctg} z$  на простые дроби (формула (11), п. 2.3.), имеем  $h(z) = \operatorname{const}$ . Таким образом,

$$\sin z = Cz \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{n\pi} \right) e^{\frac{z}{n\pi}}.$$

Из предельного соотношения  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$  находим:  $C = 1$ . Искомое разложение  $\sin z$  в бесконечное произведение окончательно принимает вид

$$\sin z = z \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{n\pi} \right)^{\frac{z}{n\pi}} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

В связи с абсолютной сходимостью ряда  $\sum \left( 1 - \frac{z}{n\pi} \right)^{\frac{z}{n\pi}}$  появилась возможность объединить множители с индексами  $-n$  и  $n$ .

### 3.5. Род и порядок целой функции.

Пусть последовательность  $(a_n)$  нулей целой функции  $f$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  такая, что ряд (2), п. 3.3, сходится при  $p_n = \rho$ , где  $\rho$  — некоторое неотрицательное целое число, причем оно наименьшее из всех неотрицательных целых чисел, при которых ряд сходится. Тогда это число  $\rho$  называется *родом бесконечного произведения*

$$P(z) = \prod \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left( \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{\rho} \left( \frac{z}{a_n} \right)^\rho \right)$$

(формула (1), п. 3.3, при  $p_n = \rho$ ). При этом формула (5), п. 3.3, принимает вид

$$f(z) = z^\lambda e^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left( \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{\rho} \left( \frac{z}{a_n} \right)^\rho \right). \quad (1)$$

В случае, когда  $h$  — полином степени  $\rho_1$ , говорят, что функция  $f$  является *функцией конечного рода*, и этот род равен  $\max\{\rho, \rho_1\}$ .

В случае отсутствия нулей  $a_n$  род функции  $f$  равен  $\rho_1$ , т. е. степени полинома  $h$ .

Например,  $\sin z$  является целой функцией первого рода ( $\rho = 1$ ,  $\rho_1 = 0$ ).

В других случаях, когда  $h$  — целая трансцендентная функция или ряд  $\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho+1}}$  не сходится ни при каком неотрицательном  $\rho$ , функция  $f$  называется *целой функцией бесконечного рода*.

Пусть  $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ . Если  $f(z) \neq \text{const}$ , то по теореме Лиувилля  $\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = \infty$ . Для

целых функций конечного рода некоторое представление о характере стремления к бесконечности содержится в следующей теореме, выходящей за рамки книги.

**Теорема 1** (Пуанкаре). Если  $f$  — целая функция рода  $\rho$  и  $\alpha$  — произвольное положительное число, то для всех достаточно больших  $r$  выполняется оценка

$$M(r) < e^{\alpha r^{\rho+1}}. \quad (2)$$

В случае, когда число нулей функции  $f$  конечно, оценка (2) очевидна.

Число

$$q = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} \quad (3)$$

называется *порядком целой функции*.

Из определения верхнего предела следует, что если  $q$  конечное, то  $\forall \varepsilon > 0 \exists r_0 > 0$  такое, что  $\forall r \geq r_0$  справедлива оценка

$$M(r) < e^{r^{q+\varepsilon}}. \quad (4)$$

Связь между родом и порядком целой функции  $f$  устанавливает следующая теорема.

**Теорема 2.** Если род  $\rho$  целой функции  $f$  конечен, то конечен и ее порядок  $q$ , и наоборот, причем

$$\rho \leq q \leq \rho + 1. \quad (5)$$

◀ Справедливость первой части утверждения и неравенства<sup>1)</sup>  $q \leq \rho + 1$  непосредственно следует из определения порядка целой функции и из неравенства (2) при  $\alpha = 1$ . ▶

### 3.6. Мероморфная функция как отношение двух целых функций.

Пусть  $F$  — мероморфная функция, а функция  $z \mapsto \varphi(z) = z^\lambda P(z)$  — целая, представленная бесконечным произведением, нули которой и их кратность совпадают с полюсами и, соответственно, их порядками функции  $F$  ( $\lambda$  — порядок полюса  $F$  в точке  $z = 0$ ; если  $z_0 = 0$  — точка аналитичности функции  $F$ , то полагаем  $\lambda = 0$ ).

Функция  $\psi = F\varphi$  является целой, поскольку полюсы функции  $F$  устраняются нулями функции  $\varphi$ . Поэтому

$$F = \frac{\psi}{\varphi}.$$

<sup>1)</sup> Полное доказательство этой теоремы, а также теоремы Пуанкаре заинтересованный читатель найдет в книге Бицадзе А. В., "Основы теории аналитических функций комплексного переменного", М., "Наука", 1972.

Итак, любая мероморфная функция является частным двух целых функций. Очевидно, справедливо и обратное утверждение: частное двух целых функций есть мероморфная функция. Отсюда следует второе определение мероморфной функции (первое определение дано в п. 2.2): *функция  $F$  называется мероморфной, если она является частным двух целых функций.*

Рассмотрим примеры.

31. Доказать равенства: а)  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) = 2$ ; б)  $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}$ .

◀ а) Поскольку

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \frac{((n+1)!)^2 \cdot 2}{n!(n+2)!} = \frac{2(n+1)}{n+2},$$

то

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 2;$$

б) Имеем

$$P_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{(k+1)(k^2 - k + 1)} = \frac{2(n-1)!}{(n+1)!} \prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k + 1}{(k-1)^2 + (k-1) + 1} = \frac{2}{n(n+1)} \frac{n^2 + n + 1}{3},$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{2}{3}. \blacktriangleright$$

32. Исследовать на сходимость произведения  $\prod \left(1 + \frac{i}{n}\right)$  и  $\prod \left|1 + \frac{i}{n}\right|$ .

◀ Согласно теореме 1, п. 3.1, указанные бесконечные произведения сходятся или расходятся вместе с рядами

$$\sum \ln \left(1 + \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{2} \sum \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + i \sum \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \sum \ln \left|1 + \frac{i}{n}\right| = \frac{1}{2} \sum \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

Поскольку ряд

$$\sum \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

сходится ( $\ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ ), а ряд

$$\sum \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$$

расходится ( $\operatorname{arctg} \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ ), то первое бесконечное произведение расходится, а второе — сходится. ▶

33. Найти области сходимости бесконечных произведений:

а)  $\prod \left(1 + \frac{z^n}{3^n}\right)$ ; б)  $\prod \left(1 + \frac{z^n}{n^2}\right)$ ; в)  $\prod \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$ .

◀ а) Поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n \neq 0$ , если  $|z| \geq 3$ , то для этих значений  $z$  бесконечное произведение расходится. Если  $|z| < 3$ , то указанное бесконечное произведение сходится абсолютно, так как ряд  $\sum \frac{|z|^n}{3^n}$  сходится. При этом сходимость равномерная в любом круге  $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r < 3\}$ . Следовательно, данное бесконечное произведение определяет в круге  $K_r$  аналитическую функцию  $P$ .

б) Бесконечное произведение сходится в  $\mathbb{C}$  и является целой функцией. Это следует из абсолютной и равномерной сходимости ряда  $\sum \frac{z^n}{n^2}$  в любом круге  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R \leq 1\}$ .

в) Данное произведение является бесконечным произведением Вейерштрасса при  $a_n = -n$  и  $p_n = 1$ . Следовательно, оно сходится в  $\mathbb{C}$  и является аналитической функцией в  $\mathbb{C}$ . ▶

**34.** Исследовать на абсолютную сходимость бесконечное произведение

$$\prod \left( 1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \frac{1}{z^n} \right), \quad n \geq 2.$$

◀ Согласно теореме 1, п. 3.1, данное бесконечное произведение сходится или расходится абсолютно вместе с рядом

$$\sum \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \frac{1}{|z|^n}, \quad n \geq 2.$$

Этот ряд по степеням  $\frac{1}{|z|}$  сходится лишь при  $|z| > 1$ . Следовательно, областью абсолютной сходимости бесконечного произведения является множество  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ . ▶

**35.** Доказать, что бесконечное произведение  $\prod \left( 1 - \frac{z}{c+n} \right) e^{\frac{z}{n}}$  абсолютно сходится при всех  $z$ , если только  $c$  не является отрицательным целым числом.

◀ Пусть  $z \in \mathbb{C}$  — фиксированное. При больших  $n$  получаем асимптотическую формулу

$$\begin{aligned} \left| 1 - \left( 1 - \frac{z}{c+n} \right) e^{\frac{z}{n}} \right| &= \left| 1 - \left( 1 - \frac{z}{c+n} \right) \left( 1 + \frac{z}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right| = \\ &= \left| \frac{z}{c+n} - \frac{z}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| = \frac{|cz|}{|n+c|n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Если  $c$  не является отрицательным целым числом, то ряд

$$\sum \left( 1 - \left( 1 - \frac{z}{c+n} \right) e^{\frac{z}{n}} \right)$$

абсолютно сходится, поскольку сходится ряд

$$\sum \left( \frac{|cz|}{|n+c|n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right).$$

Согласно теореме 1, п. 3.1, данное бесконечное произведение абсолютно сходится, если  $c \neq -n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . ▶

**36.** Пусть  $(z_n)$  — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям:

a)  $\forall n \in \mathbb{N} \ 0 < |z_n| < 1$  и  $|z_n| < |z_{n+1}|$ ;

b) ряд

$$\sum (1 - |z_n|) \tag{1}$$

сходится.

Доказать, что бесконечное произведение

$$\prod \frac{z_n - z}{1 - z \bar{z}_n} \cdot \bar{z}_n \tag{2}$$

сходится в круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  и представляет в этом круге аналитическую функцию  $P$ , обращающуюся в нуль лишь в точках  $z_1, z_2, \dots$  и удовлетворяющую неравенству  $|P(z)| < 1$ .

◀ Рассмотрим в круге  $K_{|z_k|} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |z_k|\}$  функцию

$$z \mapsto \prod_{n=k}^{\infty} \frac{z_n - z}{1 - z \bar{z}_n} \bar{z}_n. \tag{3}$$

Все сомножители в (3) отличны от нуля. Из оценки

$$|u_n(z)| = \left| \frac{(z_n - z) \bar{z}_n}{1 - z \bar{z}_n} - 1 \right| = \frac{1 - |z_n|^2}{|1 - z \bar{z}_n|} < \frac{2(1 - |z_n|)}{1 - |z_k|}$$

и сходимости ряда (1) делаем вывод о том, что бесконечное произведение (3) равномерно сходится к функции, аналитической в круге  $K_{|z_k|}$  и отличной от нуля в этом круге, а бесконечное



произведение (2) является функцией  $P$ , аналитической в круге  $K_{|z_k|}$ , обращающейся в нуль лишь в точках  $z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$ . Так как  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 1$  (это следует из сходимости ряда (1)), то  $P$  является функцией, аналитической в круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , обращающейся в нуль лишь в точках  $z_1, z_2, \dots$ .

Оценим модуль произвольного сомножителя бесконечного произведения (2) при  $|z| < 1$ :

$$\left| \frac{z_n - z}{1 - z \bar{z}_n} \bar{z}_n \right| < |\bar{z}_n| < 1.$$

Следовательно,  $|P(z)| < 1 \forall z \in K$ . ►

**37.** Доказать равенство

$$e^{az} - e^{bz} = (a-b)ze^{\frac{a+b}{2}z} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{4n^2 \pi^2} \right).$$

◀ Воспользуемся формулой разложения синуса в бесконечное произведение (см. п. 3.4). Получим после некоторых преобразований:

$$\begin{aligned} e^{az} - e^{bz} &= e^{\frac{a+b}{2}z} \left( e^{\frac{a-b}{2}z} - e^{-\frac{a-b}{2}z} \right) = 2e^{\frac{a+b}{2}z} \operatorname{sh} \frac{a-b}{2} z = -2ie^{\frac{a+b}{2}z} \sin \frac{(a-b)iz}{2} = \\ &= -2ie^{\frac{a+b}{2}z} \frac{i(a-b)}{2} z \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{4\pi^2 n^2} \right) = (a-b)ze^{\frac{a+b}{2}z} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{4n^2 \pi^2} \right). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**38.** Пусть  $a_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $a_{2n} = -\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ . Доказать, что бесконечное произведение  $\prod (1 + a_n)$  сходится, а ряды  $\sum a_n$  и  $\sum a_n^2$  расходятся.

◀ Если  $a_{2n-1} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ,  $a_{2n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ,  $a_{2n-1}^2 = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  $a_{2n}^2 = O\left(\frac{1}{n}\right)$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ,  $a_n^2 = O\left(\frac{1}{n}\right)$  при  $n \rightarrow \infty$  и ряды  $\sum a_n$ ,  $\sum a_n^2$  расходятся по признаку сравнения с гармоническим рядом.

Необходимое условие сходимости бесконечного произведения  $\prod (1 + a_n)$  выполнено. Оно сходится тогда и только тогда, когда сходится  $\prod (1 + a_{2n-1})(1 + a_{2n})$ . Поскольку

$$(1 + a_{2n-1})(1 + a_{2n}) = \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

и ряд  $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$  сходится, то вместе с ним сходится и данное бесконечное произведение. ►

**39.** Найти порядок функции  $z \mapsto f(z) = \cos az^2$ , где  $a \in \mathbb{C}$ .

◀ Поскольку

$$M(r) = \max_{|z|=r} |\cos az^2| = \max_{|z|=r} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} a^{2n} z^{4n} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a|^{2n} r^{4n}}{(2n)!} = \frac{e^{|a|r^2} + e^{-|a|r^2}}{2} = \operatorname{ch} |a|r^2$$

и в точке  $z_0 = \sqrt{\frac{2}{|a|}} re^{-i\frac{\arg a}{2}}$   $f(z_0) = \operatorname{ch} |a|r^2$ , то

$$M(r) = \frac{e^{|a|r^2} + e^{-|a|r^2}}{2}.$$

Поэтому, применив формулу (4), п. 3.5, получим:

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \left( \frac{e^{|a|r^2} + e^{-|a|r^2}}{2} \right)}{\ln r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln(|a|r^2) + \ln(1 + e^{-2|a|r^2}) - \ln 2}{\ln r} = 2. \quad \blacktriangleright$$

## § 4. Применение вычетов

### для вычисления интегралов и сумм рядов

#### 4.1. Применение вычетов для вычисления определенных интегралов.

Основная теорема о вычетах (см. теорему 1, п. 1.3) позволяет свести вычисление интеграла по замкнутой кривой к вычислению суммы вычетов подынтегральной функции относительно ее особых точек, охватываемых кривой. Иногда с помощью этого же метода удается вычислять интегралы по незамкнутым кривым и, в частности, некоторые определенные интегралы от функций действительной переменной. При этом специальными преобразованиями вычисление таких интегралов сводится к вычислению интегралов по замкнутым кривым, к которым можно применять теорему Коши о вычетах.

1) Пусть  $(x, y) \mapsto R(x, y)$  — рациональная функция от  $x$  и  $y$ , не имеющая особых точек на окружности  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ . Тогда справедлива формула

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt = 2\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} \left( \frac{1}{z} R \left( \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right) \right), \quad (1)$$

где  $\{z_k; k = \overline{1, n}\}$  — полюсы функции

$$z \mapsto \frac{1}{z} R \left( \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right),$$

размещенные в единичном круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

Для получения формулы (1) следует в интеграле перейти к комплексному переменному интегрирования  $z = e^{it}$ . Тогда

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt = \int_{\Gamma} R \left( \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right) \frac{dz}{iz}, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}}).$$

Осталось применить теорему Коши о вычетах, в результате чего получим формулу (1).

2) Пусть функция  $f$  аналитическая в верхней полуплоскости, включая и действительную ось, за исключением конечного множества точек  $\{z_k; k = \overline{1, n}\}$ , лежащих в верхней полуплоскости ( $\operatorname{Im} z_k > 0 \forall k = \overline{1, n}$ ). Пусть, далее

$$\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : z = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi\}, \quad M(R) = \max_{z \in \gamma_R} |f(z)|, \quad R > \max_{1 \leq k \leq n} |z_k|$$

и

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} RM(R) = 0. \quad (2)$$

Тогда справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z). \quad (3)$$

◀ Пусть  $\gamma = [-R, R] \cup \gamma_R$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{оп}}) = (\Gamma_1, \Gamma_R)$  — положительно ориентированная кусочно-гладкая замкнутая кривая (рис. 85). Согласно основной теореме о вычетах выполняется равенство

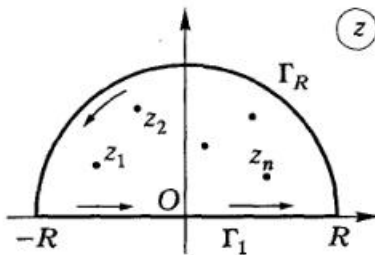


Рис. 85

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z).$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при  $R \rightarrow +\infty$ , приняв во внимание соотношение (2). Получим формулу (3). ▶

3) **Лемма (Жордана).** Пусть функция  $f$  аналитическая в верхней полуплоскости  $Z^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$  за исключением конечного множества изолированных особых точек и

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0. \quad (4)$$

(или  $\lim_{R_n \rightarrow \infty} M(R_n) = 0$ , где  $(R_n)$  — такая последовательность чисел, что полуокружности  $\gamma_{R_n}$  с центром в начале координат не содержат особых точек функции  $f$ ). Тогда  $\forall \lambda > 0$  выполняется предельное соотношение

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0, \quad \Gamma_R = (\gamma_R, \gamma_R^{\text{op}}) \quad \left( \lim_{R_n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{R_n}} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0, \quad \Gamma_{R_n} = (\gamma_{R_n}, \gamma_{R_n}^{\text{op}}) \right). \quad (5)$$

◀ Оценим интеграл в левой части формулы (5), используя известное равенство  $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$ , выполняющееся  $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(Re^{it}) e^{i\lambda R \cos t} \cdot e^{-\lambda R \sin t} Re^{it} i dt \right| \leq RM(R) \int_0^\pi e^{-\lambda R \sin t} dt = \\ &= 2RM(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R \sin t} dt \leq 2RM(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\lambda R}{\pi} t} dt = \frac{\pi M(R)}{\lambda} (1 - e^{-\lambda R}). \end{aligned}$$

Из условия (4) и полученной оценки следует справедливость соотношения (5). ▶

**Замечание 1.** Анализируя доказательство леммы Жордана, убеждаемся в том, что условие аналитичности функции  $f$  не является существенным.

**Замечание 2.** Лемма Жордана, доказанная для верхней полуплоскости, может быть сформулирована и доказана без всяких затруднений и для других полуплоскостей.

Считая во всех случаях  $\lambda > 0$ , а полуокружность  $\gamma_R$  лежащей в соответствующей полуплоскости, запишем формулу (5) для случаев:

$$\text{а) } Z^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \leq 0\}, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{-i\lambda z} dz = 0; \quad (6)$$

$$\text{б) } Z_{\Pi} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{-\lambda z} dz = 0; \quad (7)$$

$$\text{в) } Z_{\Pi} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{\lambda z} dz = 0. \quad (8)$$

Если функция  $f$  удовлетворяет условиям леммы Жордана и имеет в полуплоскости  $Z_{\Pi}$  конечное множество особых точек  $\{a_k; k = \overline{1, n}\}$ ,  $\operatorname{Im} a_k > 0$ , то, повторяя рассуждения, проведенные в 2), получим  $\forall \lambda > 0$  формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} (f(z) e^{i\lambda z}). \quad (9)$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx = \operatorname{Re} \left( 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} (f(z) e^{i\lambda z}) \right), \quad (10)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx = \operatorname{Im} \left( 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} (f(z) e^{i\lambda z}) \right). \quad (11)$$

**Пример.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \lambda x}{1+x^2} \, dx = \operatorname{Im} 2\pi i \operatorname{res}_i \frac{ze^{i\lambda z}}{1+z^2} = \operatorname{Im} \frac{2\pi i \cdot ie^{-\lambda}}{2i} = \pi e^{-\lambda}.$$

4) Пусть функция  $f$  удовлетворяет условиям 2) и, сверх того, имеет конечное множество простых полюсов  $\{b_j; j = \overline{1, m}\}$  на действительной оси, т.е.  $\operatorname{Im} b_j = 0$ . Тогда справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = 2\pi i \left( \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} f(z) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \operatorname{res}_{b_j} f(z) \right), \quad (12)$$

где интеграл вычисляется в смысле главного значения относительно всех точек  $b_j$  и  $\infty$ .

◀ Рассмотрим замкнутую жорданову кривую

$$\gamma_{Rr} = [-R, R] \setminus \bigcup_{j=1}^m (b_j - r < x < b_j + r) \cup \gamma_R \bigcup_{j=1}^m \gamma_{jr},$$

где  $\gamma_{jr}$  — верхняя полуокружность радиуса  $r$  с центром в точке  $b_j$  и  $r$  достаточно малое,  $\gamma_R$  — верхняя полуокружность с центром в начале координат и  $R$  достаточно большое, а кривая  $\gamma_{Rr}$  охватывает все особые точки  $a_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Рассмотрим кусочно-гладкую положительно ориентированную замкнутую кривую  $\Gamma_{Rr} = (\Gamma_1, \Gamma_{1r}^-, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{mr}^-, \Gamma_{m+1}, \Gamma_R)$ , состоящую из упорядоченного набора ориентированных гладких кривых (рис. 86).

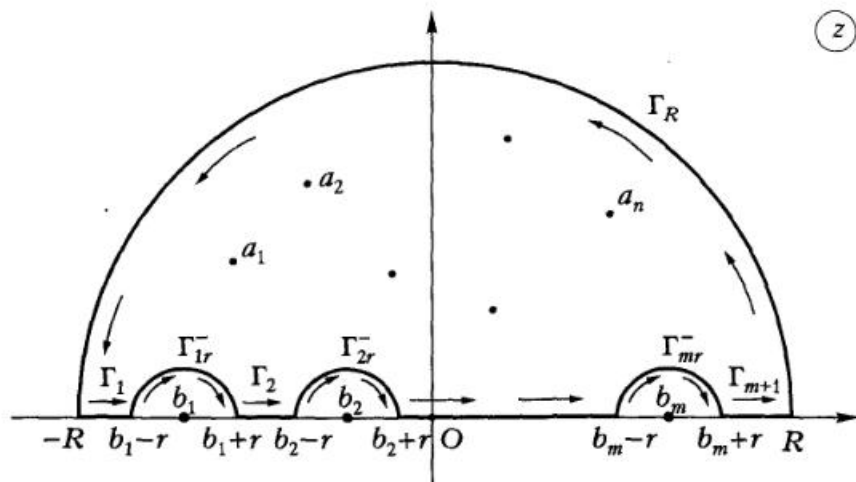


Рис. 86

Применив теорему Коши о вычетах, имеем

$$\int_{\Gamma_{Rr}} f(z) \, dz = \sum_{j=1}^{m+1} \int_{\Gamma_j} f(z) \, dz + \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_{jr}^-} f(z) \, dz + \int_{\Gamma_R} f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} f(z).$$

Перейдем в полученном равенстве к пределу при  $R \rightarrow \infty$  и  $r \rightarrow 0$ . Принимая во внимание предельные соотношения

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r^-} f(z) dz = -\frac{1}{2} \operatorname{res}_{b_j} f(z),$$

получаем формулу (12). ►

Аналогично может быть обобщена и формула (9), которая при наличии у функции  $f$  простых полюсов  $b_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) на действительной оси принимает вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} f(z) e^{i\lambda z} + \pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{res}_{b_j} f(z) e^{i\lambda z}. \quad (13)$$

**Пример.** Главное значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x} dx \quad (t > 0)$$

равно  $\pi i \operatorname{res}_0 \frac{e^{itx}}{x} = \pi i$ .

5) Пусть  $f$  — рациональная функция,

$$\{a_k; k = \overline{1, n}\}$$

— множество ее полюсов, ни один из которых не лежит на действительной положительной полуоси. Пусть, далее,  $p$  и  $q$  — такие целые числа ( $p < q$ ), что

$$\begin{aligned} f(z) &= O\left(\frac{1}{z^p}\right), \quad z \rightarrow 0, \\ f(z) &= O\left(\frac{1}{z^q}\right), \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим функцию  $z \mapsto z^{\alpha-1} f(z)$ , где  $p < \alpha < q$  не равно целому числу в  $z$  — плоскости с разрезом вдоль луча  $(0, +\infty)$  и при этом ветвь  $z^{\alpha-1}$  фиксируется равенством

$$z^{\alpha-1} = \exp((\alpha-1)(\ln|z| + i \arg z)), \quad 0 < \arg z < 2\pi.$$

Упорядоченный набор гладких ориентированных кривых (рис. 87)  $\Gamma_{Rr} = (\Gamma_1, \Gamma_R, \Gamma_1^-, \Gamma_r^-)$  является кусочно-гладкой положительно ориентированной замкнутой кривой, охватывающей точки  $a_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Применив основную теорему о вычетах, получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{Rr}} z^{\alpha-1} f(z) dz &= \int_r^R x^{\alpha-1} f(x) dx + \int_{\Gamma_R} z^{\alpha-1} f(z) dz + \int_R^r x^{\alpha-1} f(x) e^{(\alpha-1)2\pi i} dx + \int_{\Gamma_r^-} z^{\alpha-1} f(z) dz = \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} z^{\alpha-1} f(z). \end{aligned}$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при  $R \rightarrow +\infty$  и  $r \rightarrow 0$ . Из условий (14) следует, что

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} z^{\alpha-1} f(z) dz = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r^-} z^{\alpha-1} f(z) dz = 0,$$

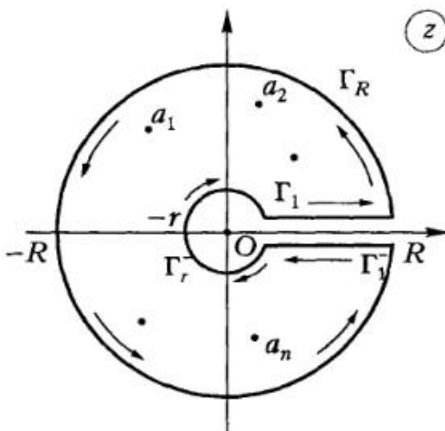


Рис. 87

вследствие чего имеем

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} f(x) dx = -e^{(\alpha-1)2\pi i} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} z^{\alpha-1} f(z).$$

Таким образом, интеграл  $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} f(x) dx$  существует и

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} z^{\alpha-1} f(z). \quad (15)$$

**Пример.** Вычислить  $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+4)}$ . Здесь  $p = 0$ ,  $q = 2$ ,  $\alpha = \frac{2}{3}$  и условие  $p < \alpha < q$  выполняется. Согласно формуле (15) имеем

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{i\frac{4}{3}\pi}} \left( \operatorname{res}_{2i} \frac{1}{\sqrt{z}(z^2+4)} + \operatorname{res}_{-2i} \frac{1}{\sqrt{z}(z^2+4)} \right) = \frac{\pi \left( e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{2}} \right)}{2^{\frac{4}{3}} \left( 1 - e^{i\frac{4}{3}\pi} \right)} = \frac{\pi \left( e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}} \right)}{2^{\frac{4}{3}} \left( e^{-i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)} = \frac{\pi}{2^{\frac{4}{3}} \sqrt{3}}.$$

## 4.2. Применение вычетов к вычислению сумм рядов.

Пусть  $f$  — мероморфная функция, имеющая конечное множество полюсов  $\{a_k; k = \overline{1, n}\}$ , среди которых нет целых чисел. Пусть, далее,  $(\gamma_m)$  — последовательность замкнутых жордановых кривых, окружающих начало координат и не проходящих через целые точки  $z = n$ , а также через полюсы функции  $f$  и таких, что  $r_m \rightarrow \infty$  при  $m \rightarrow \infty$ , где  $r_m$  — расстояние от начала координат до кривой  $\gamma_m$ . Тогда, если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_m} f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz = 0, \quad \Gamma_m = (\gamma_m, \gamma_m^{\text{op}}), \quad (1)$$

или

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_m} \frac{f(z) dz}{\sin \pi z} = 0, \quad (2)$$

и соответствующие ряды сходятся, то справедливы соответственно следующие равенства:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} f(z) \operatorname{ctg} \pi z, \quad (3)$$

$$\sum_{n=l}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} \frac{f(z)}{\sin \pi z}. \quad (4)$$

◀ Докажем справедливость формулы (3). Для простоты считаем, что кривая  $\gamma_m$  симметрична относительно мнимой оси. Выберем  $m$  настолько большим, чтобы все полюсы  $a_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) охватывались кривой  $\gamma_m$ , и обозначим через  $2P_m$  количество целых точек, охватываемых этой кривой. Тогда, согласно теореме о вычетах, имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} \pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z + \sum_{j=-P_m}^{P_m} \operatorname{res}_j \pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} \pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z + \sum_{j=-P_m}^{P_m} f(j).$$

Перейдя в этом равенстве к пределу при  $m \rightarrow \infty$  и приняв во внимание соотношение (1), получим формулу (3).

Формулу (4) получим аналогично с помощью соотношения (2), приняв во внимание, что  $\operatorname{res}_j \frac{\pi f(z)}{\sin \pi z} = (-1)^j f(j)$ . Условия (1) и (2) выполняются, если  $f(z) = O(z^2)$  при  $z \rightarrow \infty$ , а  $\gamma_m = \{z \in \mathbb{C} : |z| = m + \frac{1}{2}\}$ , так как в этом случае  $\forall z \in \gamma_m$

$$|\operatorname{ctg} \pi z| \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}, \quad |\sin \pi z| \leq \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}}.$$

**Пример.** Найти сумму ряда  $\sum \frac{1}{(a+nb)^2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Имеем  $f(z) = \frac{1}{(a+bz)^2}$ ,  $z = -\frac{a}{b}$  — полюс второго порядка функции  $f$ ,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+nb)^2} = -\operatorname{res}_{-\frac{a}{b}} \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{(a+bz)^2} = \lim_{z \rightarrow -\frac{a}{b}} \frac{d}{dz} \left( \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z \cdot (z + \frac{a}{b})^2}{(a+bz)^2} \right) = -\lim_{z \rightarrow -\frac{a}{b}} \frac{\pi}{b^2} \frac{d}{dz} \operatorname{ctg} \pi z = \frac{\pi^2}{b^2 \sin^2 \frac{\pi a}{b}}.$$

Рассмотрим задачи.

**40.** Доказать равенство

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a - ib \cos t} = \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & \text{если } a > 0, \\ -\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

◀ В соответствии с формулой (1), п. 4.1, рассмотрим функцию

$$\frac{1}{z \left( a - ib \cdot \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right)} = \frac{2i}{bz^2 + b + i2az} = \frac{2i}{b(z - z_1)(z - z_2)},$$

где  $z_1 = \frac{i}{b}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})$ ,  $z_2 = \frac{i}{b}(-a - \sqrt{a^2 + b^2})$ .

Если  $a > 0$ , то точка  $z_1$  охватывается окружностью  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , а точка  $z_2$  лежит вне  $\gamma$  и по формуле (1), п. 4.1, получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a - ib \cos t} = 2\pi \operatorname{res}_{z_1} \frac{2i}{b(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{4\pi i}{b(z_1 - z_2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Если  $a < 0$ , то точка  $z_1$  находится вне окружности  $\gamma$ , а точка  $z_2$  охватывается ею, в силу чего, применив упомянутую формулу, имеем

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a - ib \cos t} = \frac{4\pi i}{b(z_2 - z_1)} = -\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \blacktriangleright$$

**41.** Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos mx}{1 - 2a \cos x + a^2} dx, \quad a \in \mathbb{R}, \quad |a| \neq 1, \quad m \in \mathbb{N}.$$

◀ Поскольку функция  $x \mapsto \varphi(x) = \frac{\sin mx}{1 - 2a \cos x + a^2}$ ,  $D_\varphi = [-\pi, \pi]$ , нечетная, то  $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = 0$ , в

силу чего

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imx} dx}{1 - 2a \cos x + a^2}.$$

С помощью замены переменной  $e^{iz} = z$  преобразуем интеграл  $I$  в интеграл по положительно ориентированной окружности  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{ор}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ :

$$I = \frac{i}{a} \int_{\Gamma} \frac{z^m dz}{(z-a)(z-\frac{1}{a})}.$$

Если  $|a| < 1$ , то

$$I = \frac{i}{a} \frac{2\pi i a^m}{a - \frac{1}{a}} = \frac{2\pi a^m}{1 - a^2}.$$

Если  $|a| > 1$ , то

$$I = \frac{2\pi}{a^m(a^2 - 1)}. \blacktriangleright$$

#### 42. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

◀ Поскольку  $I \in \mathbb{R}$ ,  $I_1 \in \mathbb{R}$ , где  $I_1 = \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \sin nx \, dx$ , то

$$I + iI_1 = \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) e^{inx} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{\cos x + i \sin x} (e^{i \sin x} + e^{-i \sin x}) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{iz} (e^{iz} + e^{-iz}) \, dz.$$

Легко убедиться в том, что  $I_1 = 0$ . Полагая в интеграле  $e^{iz} = z$ , получим:

$$I = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} z^{n-1} (e^z + e^{\frac{1}{z}}) dz, \quad \Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{ор}}), \quad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Так как функция  $z \mapsto z^{n-1} e^z$  аналитическая, то по теореме Коши

$$\int_{\Gamma} z^{n-1} e^z dz = 0,$$

поэтому

$$I = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} z^{n-1} e^{\frac{1}{z}} dz.$$

По основной теореме о вычетах имеем

$$I = \pi \operatorname{res}_0 z^{n-1} e^{\frac{1}{z}} = \frac{\pi}{n!}. \blacktriangleright$$

#### 43. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^6 dx}{x^8 + 1}.$$

◀ Функция  $z \mapsto f(z) = \frac{z^6}{1+z^8}$  имеет в плоскости  $\mathbb{C}$  восемь простых полюсов

$$z_k = e^{i \frac{(2k+1)\pi}{8}} \quad (k = \overline{0, 7}),$$



из которых первые четыре принадлежат верхней полуплоскости. Применяв формулу (3), п. 4.1, получим (приняв во внимание четность функции  $\varphi(x) = \frac{x^6}{1+x^8}$ ,  $D_\varphi = (-\infty, +\infty)$ ):

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6}{1+x^8} dx = \pi i \sum_{k=0}^3 \operatorname{res}_{z_k} \frac{z^6}{1+z^8} = \frac{\pi i}{8} \sum_{k=0}^3 \frac{1}{z_k} = \frac{\pi i}{8} (e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{3\pi}{8}} + e^{-i\frac{5\pi}{8}} + e^{-i\frac{7\pi}{8}}) = \\ &= \frac{\pi i}{8} ((e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{7\pi}{8}}) + (e^{-i\frac{3\pi}{8}} + e^{-i\frac{5\pi}{8}})) = \frac{\pi i}{8} ((e^{-i\frac{\pi}{8}} - e^{i\frac{\pi}{8}}) + (e^{-i\frac{3\pi}{8}} - e^{i\frac{3\pi}{8}})) = \\ &= \frac{\pi}{4} \left( \sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} \right) = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

#### 44. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^4 + x^2 + 1} dx \quad (a > 0).$$

◀ Находим особые точки функции  $z \mapsto \frac{e^{iaz}}{x^4 + x^2 + 1}$ , принадлежащие верхней полуплоскости:

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По формуле (10), п. 4.1, получаем:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^4 + x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iaz}}{x^4 + x^2 + 1} dx = \pi i \left( \operatorname{res}_{z_1} \frac{e^{iaz}}{x^4 + x^2 + 1} + \operatorname{res}_{z_2} \frac{e^{iaz}}{x^4 + x^2 + 1} \right) = \\ &= \pi i \left( \frac{e^{iaz_1}}{4z_1^3 + 2z_1} + \frac{e^{iaz_2}}{4z_2^3 + 2z_2} \right) = \frac{\pi e^{-i\frac{a\sqrt{3}}{2}}}{2} \left( \frac{e^{i\frac{a}{2}}}{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{e^{-i\frac{a}{2}}}{\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = \\ &= -\frac{\pi e^{-i\frac{a\sqrt{3}}{2}}}{6} \left( e^{i\frac{a}{2}} \left( \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + e^{-i\frac{a}{2}} \left( -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \\ &= -\frac{\pi i}{2\sqrt{3}} e^{-a\frac{\sqrt{3}}{2}} \left( e^{i\frac{a}{2}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) + e^{-i\frac{a}{2}} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) \right) = \\ &= -\frac{\pi i}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{a\sqrt{3}}{2}} \left( e^{i(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{6})} - e^{-i(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{6})} \right) = \frac{\pi}{3} e^{-a\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin \left( \frac{a}{2} + \frac{\pi}{6} \right). \blacktriangleright \end{aligned}$$

#### 45. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{\sin ax}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

◀ Очевидно, что

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{e^{iax}}{x} dx.$$

Функция  $z \mapsto f(z) = \frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} \cdot \frac{e^{iaz}}{z}$  имеет в верхней полуплоскости один простой полюс  $z_1 = ib$  и один простой полюс  $z_2 = 0$  на действительной оси. По формуле (13), п. 4.1, получим:

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} (2\pi i \operatorname{res}_{ib} f(z) + \pi i \operatorname{res}_0 f(z)) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} (2\pi i e^{-ab} + \pi i(-1)) = \pi e^{-ab} - \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

## 46. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + a^2)} dx \quad (a > 0).$$

◀ Функция  $x \mapsto \varphi(x) = \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + a^2)}$ ,  $D_\varphi = (-\infty, +\infty)$  — четная, в силу чего

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + a^2)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x + i(e^{iz} - 1)}{x^3(x^2 + a^2)} dx. \quad (1)$$

Действительно,

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^3(x^2 + a^2)} dx = 0,$$

так как подынтегральная функция нечетная, поэтому равенство (1) справедливо.

Применим формулу (13), п. 4.1:

$$\begin{aligned} I &= \pi i \left( \operatorname{res}_{ia} \frac{z + i(e^{iz} - 1)}{z^3(z^2 + a^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{res}_0 \frac{z + i(e^{iz} - 1)}{z^3(z^2 + a^2)} \right) = \\ &= \pi i \left( \frac{i(a + e^{-a} + 1)}{2a^4} - \frac{i}{4a^2} \right) = \frac{\pi}{2a^4} \left( \frac{a^2}{2} + 1 - a - e^{-a} \right). \end{aligned}$$

47. Интегрируя функцию  $z \mapsto f(z) = \frac{1 - e^{i2mz}}{z^2(z^2 + a^2)}$  ( $a > 0$ ,  $m > 0$ ) по границе полукольца

$$K_{Rr} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R, 0 < \arg z < \pi\}$$

доказать, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 mx}{x^2(x^2 + a^2)} dx = \frac{\pi}{4a^3} (2am + e^{-2am} - 1).$$

◀ Пусть  $r < a < R$ ,  $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : z = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi\}$ ,  $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{it}, 0 \leq t \leq \pi\}$ .

Рассмотрим упорядоченный набор гладких ориентированных кривых  $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_R, \Gamma_2, \Gamma_r^-)$ , являющийся кусочно-гладкой положительно ориентированной замкнутой кривой (рис. 88). Функция  $f$  имеет в точке  $z = ia$  простой полюс, причем  $z \in K_{Rr}$ . Согласно основной теореме о вычетах, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_r^R \frac{1 - e^{i2mx}}{x^2(x^2 + a^2)} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1 - e^{i2mx}}{z^2(z^2 + a^2)} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{1 - e^{i2mx}}{x^2(x^2 + a^2)} dx + \int_{\Gamma_r^-} \frac{1 - e^{i2mx}}{z^2(z^2 + a^2)} dz = \\ &= 2\pi i \operatorname{res}_{ia} \frac{1 - e^{i2mx}}{z^2(z^2 + a^2)} = \frac{\pi(e^{-2ma} - 1)}{a^3}. \end{aligned}$$

Устремляя  $R$  в бесконечность, а  $r$  — к нулю и принимая во внимание, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1 - e^{i2mx}}{z^2(z^2 + a^2)} dz = 0,$$

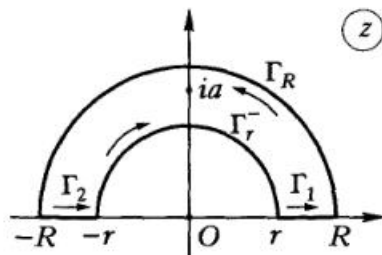


Рис. 88

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \frac{1 - e^{i2mz}}{z^2(z^2 + a^2)} dz &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} \int_{\Gamma_r} \left( -\frac{i2m}{z} + 2m^2 + i \left( \frac{4}{3} m^3 + \frac{2m}{a^3} \right) z + \dots \right) dz = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \left( -2m + i2m^2 r e^{i\varphi} + i \left( \frac{4}{3} m^3 + \frac{2m}{a^3} \right) i r^2 e^{i2\varphi} + \dots \right) d\varphi = -\frac{2m\pi}{a^2},\end{aligned}$$

получим:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \frac{1 - e^{i2mz}}{z^2(z^2 + a^2)} dz = \frac{2m\pi}{a^2},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{2 - 2 \cos 2mx}{x^2(x^2 + a^2)} dx = 4 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 mx}{x^2(x^2 + a^2)} dx = \frac{\pi(e^{-2ma} - 1)}{a^3} + \frac{2m\pi}{a^2} = \frac{\pi(e^{-2ma} - 1 + 2ma)}{a^3}. \blacktriangleright$$

#### 48. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0).$$

◀ Интегрируя функцию  $z \mapsto f(z) = \frac{\ln z}{z^2 + a^2}$  ( $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ ) по кривой  $\Gamma$  (см. рис. 88), получим  $\forall a \in (r, R)$ :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_r^R \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + \int_{\Gamma_r^-} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz = \\ &= 2\pi i \operatorname{res}_{ia} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \left( \ln a + i \frac{\pi}{2} \right).\end{aligned}$$

Замена переменной  $x = -t$  ( $t > 0$ ) в интеграле

$$\int_{-R}^{-r} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx$$

приводит к интегралу

$$\int_r^R \frac{\ln t + i\pi}{t^2 + a^2} dt.$$

После этой замены перейдем в равенстве

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \frac{\pi}{a} \left( \ln a + i \frac{\pi}{2} \right)$$

к пределу при  $R \rightarrow +\infty$  и  $r \rightarrow 0$ . Получим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\ln x + i\pi}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} \left( \ln a + i \frac{\pi}{2} \right), \quad 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + i\pi \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \ln a + \frac{i\pi^2}{2a},$$

откуда

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \ln a.$$

Если  $a = 1$ , то

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x \, dx}{x^2 + 1} = 0. \blacktriangleright$$

#### 49. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \, dx}{(x^2 + a^2)^2} \quad (a > 0).$$

◀ Функция  $z \mapsto f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^2}$  имеет полюс второго порядка  $z = ia$  в верхней полуплоскости  $\mathbb{C}$ . Так как

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \, dx}{(x^2 + a^2)^2},$$

то можем применить формулу (3), п. 4.1. Имеем

$$I = 2\pi i \operatorname{res}_{ia} \frac{1}{2} \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^2} = \pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} \frac{z^2(z - ia)^2}{(z^2 + a^2)^2} = \pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z + ia} \right)^2 = \pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{2iaz}{(z + ia)^3} = \frac{\pi}{4a}. \blacktriangleright$$

#### 50. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

◀ Функция  $z \mapsto f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^n}$  имеет полюс  $n$ -го порядка в точке  $z = i$ , лежащей в верхней полуплоскости  $z$ -плоскости. Поскольку

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n},$$

то по формуле (3), п. 4.1, получим:

$$I = \pi i \operatorname{res}_{z=i} f(z) = \frac{\pi i}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \cdot \frac{(z-i)^n}{(z^2+1)^n} = \frac{\pi i}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{(z+i)^n}.$$

Так как  $\frac{d^k}{dz^k} (z+i)^{-n} = (-1)^k n(n+1) \dots (n+k-1)(z+i)^{-(n+k)}$ , то

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{(z+i)^n} = (-1)^{n-1} n(n+1) \dots (2n-2) \cdot \frac{1}{(z+i)^{2n-1}},$$

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{(z+i)^n} = \frac{(-1)^{n-1} n(n+1) \dots (2n-2)}{i^{2n-1} \cdot 2^{2n-1}},$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi i}{(n-1)!} \frac{(-1)^{n-1} n(n+1) \dots (2n-2)}{i^{2n-1} 2^{2n-1}} = \frac{\pi n(n+1) \dots (2n-2)}{(n-1)! \cdot 2^{2n-1}} = \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2 (2^{n-1})^2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-2)!}{((2n-2)!!)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}, \quad n > 1. \end{aligned}$$

Если  $n = 1$ , то

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i} = \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

## 51. Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \quad (a > 0, b > 0).$$

◀ Поскольку функция  $z \mapsto f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}$  имеет в верхней полуплоскости два простых полюса  $z_1 = ia$ ,  $z_2 = ib$ , то, применив формулу (3), п. 4.1, получим:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i (\operatorname{res}_{ia} f(z) + \operatorname{res}_{ib} f(z)) = 2\pi i \left( \lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{(z + ia)(z^2 + b^2)} + \lim_{z \rightarrow ib} \frac{1}{(z^2 + a^2)(z + ib)} \right) = \\ &= 2\pi i \left( \frac{1}{2ia(b^2 - a^2)} - \frac{1}{2ib(b^2 - a^2)} \right) = \frac{\pi}{b^2 - a^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{\pi}{ab(a + b)}. \end{aligned}$$

## 52. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

◀ Очевидно,

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

Так как функция  $z \mapsto f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1}$  имеет в верхней полуплоскости два простых полюса  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$  и  $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ , то по формуле (3), п. 4.1, имеем

$$\begin{aligned} I &= \pi i \left( \operatorname{res}_{z_1} f(z) + \operatorname{res}_{z_2} f(z) \right) = \pi i \left( \left. \frac{z^2 + 1}{4z^3} \right|_{z=z_1} + \left. \frac{z^2 + 1}{4z^3} \right|_{z=z_2} \right) = \pi i \left( \frac{1+i}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1-i}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}} \right) = \\ &= \frac{\pi i}{4} \left( \frac{1+i}{e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1-i}{e^{i\frac{\pi}{4}}} \right) = \frac{\sqrt{2}\pi i}{4} \left( \frac{1+i}{-1+i} + \frac{1-i}{1+i} \right) = \frac{\sqrt{2}\pi i}{4} \cdot \frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{-2} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{4} \cdot \frac{4i}{-2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

## 53. Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}.$$

◀ Применим формулу (10), п. 4.1, приняв во внимание, что функция  $z \mapsto \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10}$  имеет в верхней полуплоскости простой полюс  $z_1 = 1 + 3i$ :

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Re} 2\pi i \operatorname{res}_{z_1} f(z) = \operatorname{Re} 2\pi i \lim_{z \rightarrow 1+3i} \frac{ze^{iz}}{z - 1 + 3i} = \operatorname{Re} 2\pi i \frac{(1+3i)e^{i(1+3i)}}{6i} = \\ &= \frac{\pi}{3} \operatorname{Re}(1+3i)e^{-3}(\cos 1 + i \sin 1) = \frac{\pi}{3} e^{-3}(\cos 1 - 3 \sin 1). \end{aligned}$$

## 54. Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 4x + 20}.$$

◀ Функция  $z \mapsto f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 4z + 20}$  имеет в верхней полуплоскости простой полюс  $z_1 = -2 + i4$ . По формуле (11), п. 4.1, находим:

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Im} 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_1} f(z) = \operatorname{Im} 2\pi i \lim_{z \rightarrow -2+i4} \frac{ze^{iz}}{z+2+i4} = \operatorname{Im} 2\pi i \frac{(-2+i4)e^{i(-2+i4)}}{8i} = \\ &= \operatorname{Im} \frac{\pi}{4} (-2+4i)e^{-4}(\cos 2 - i \sin 2) = \frac{\pi}{4} e^{-4}(2 \sin 2 + 4 \cos 2) = \frac{\pi}{2} e^{-4}(\sin 2 + 2 \cos 2). \blacktriangleright \end{aligned}$$

### 55. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

◀ Поскольку функции  $x \mapsto \varphi(x) = \frac{\cos ax}{x^2 + b^2}$ ,  $x \mapsto \psi(x) = \frac{\sin ax}{x^2 + b^2}$ ,  $D_\varphi = D_\psi = (-\infty, +\infty)$  соответственно четная и нечетная, то

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + b^2} dx.$$

Функция  $z \mapsto f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2}$  имеет в верхней полуплоскости простой полюс  $z_1 = bi$ , поэтому

$$I = \pi i \operatorname{res}_{z=bi} f(z) = \pi i \lim_{z \rightarrow bi} \frac{e^{iaz}}{z+bi} = \frac{\pi i}{2bi} e^{(ia)(ib)} = \frac{\pi}{2b} e^{-ab}. \blacktriangleright$$

### 56. Найти главное значение интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx.$$

◀ Интеграл  $I$  расходящийся, так как при  $x \rightarrow 1$  подынтегральная функция имеет одинаковый порядок роста с функцией  $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ .

Поскольку функция  $z \mapsto f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)}$  имеет в верхней полуплоскости простой полюс  $z_1 = 2i$ , а также простой полюс  $z_2 = 1$  на действительной оси, то воспользуемся формулой (13), п. 4.1:

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Im} \left( 2\pi i \operatorname{res}_{z_1} f(z) + \pi i \operatorname{res}_1 f(z) \right) = \operatorname{Im} \left( 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{e^{iz}}{(z+2i)(z-1)} + \pi i \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^{iz}}{z^2 + 4} \right) = \\ &= \operatorname{Im} \left( 2\pi i \frac{e^{-2}}{4i(2i-1)} + \pi i \frac{e^i}{5} \right) = \operatorname{Im} \left( \frac{\pi}{2} \frac{e^{-2}}{2i-1} + \frac{\pi i}{5} (\cos 1 + i \sin 1) \right) = \\ &= \operatorname{Im} \left( \frac{\pi}{10} e^{-2}(-1-2i) + \frac{\pi i}{5} \cos 1 - \frac{\pi}{5} \sin 1 \right) = \frac{\pi}{5} (\cos 1 - e^{-2}). \blacktriangleright \end{aligned}$$

### 57. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

◀ Очевидно,

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx, \quad I_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x(x^2 + b^2)} dx = 0, \quad I = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2 + b^2)} dx.$$

Функция  $z \mapsto f(z) = \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$  имеет два простых полюса в точках  $z_1 = bi$  и  $z_2 = 0$  соответственно в верхней полуплоскости и на действительной оси. Применив формулу (13), п. 4.1, получим:

$$I = \pi i \operatorname{res}_{z_1} f(z) + \frac{\pi}{2} i \operatorname{res}_{z_2} f(z) = \pi \lim_{z \rightarrow bi} \frac{e^{iaz}}{z(z+bi)} + \frac{\pi}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} = \pi \frac{e^{-ab}}{-2b^2} + \frac{\pi}{2b^2} = \frac{\pi}{2b^2} (1 - e^{-ab}). \blacktriangleright$$

58. Доказать равенства:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0 < a < 1), \quad (1)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{\pi}{n \sin \frac{m}{n}\pi} \quad (0 < m < n). \quad (2)$$

◀ Рассмотрим функцию  $z \mapsto f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$  и проинтегрируем ее по положительно ориентированной границе прямоугольника  $P$  с вершинами в точках  $(-R, 0)$ ,  $(R, 0)$ ,  $(R, 2\pi)$ ,  $(-R, 2\pi)$ ,  $\partial P = (\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4)$  (рис. 89):

$$\begin{aligned} I &= \int_{\partial P} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \int_{\Gamma_3} f(z) dz + \int_{\Gamma_4} f(z) dz = \\ &= \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx + i \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR+ia y}}{1+e^{R+iy}} dy + \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+i2\pi)}}{1+e^x} dx + i \int_{2\pi}^0 \frac{e^{-aR+ia y}}{1+e^{-R+iy}} dy = \\ &= (1 - e^{i2\pi a}) \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx + i \int_0^{2\pi} e^{ia y} \left( \frac{e^{aR}}{1+e^{R e^{iy}}} - \frac{e^{-aR}}{1+e^{-R e^{iy}}} \right) dy. \quad (3) \end{aligned}$$

Точки  $z_k = (\pi + 2k\pi)i$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) являются простыми полюсами для функции  $f$ . Однако, внутри прямоугольника  $P$  находится лишь один полюс  $z_0 = \pi i$ . По основной теореме о вычетах имеем

$$I = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0} f(z) = 2\pi i \left. \frac{e^{az}}{e^z} \right|_{z=\pi i} = -2\pi i e^{ia\pi}. \quad (4)$$

В равенстве (4) перейдем к пределу при  $R \rightarrow +\infty$ , приняв во внимание предельные соотношения

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{e^{aR}}{1+e^{R e^{iy}}} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{e^{-aR}}{1+e^{-R e^{iy}}} = 0 \quad (0 < a < 1).$$

При этом получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = -\frac{2\pi i e^{ia\pi}}{1 - e^{i2\pi a}} = -\frac{2\pi i e^{ia\pi} (1 - e^{-i2\pi a})}{4 \sin^2 a\pi} = -\frac{\pi i (e^{ia\pi} - e^{-ia\pi})}{2 \sin^2 a\pi} = -\pi i 2i \frac{\sin a\pi}{2 \sin^2 a\pi} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

В интеграле  $\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt$  произведем замену переменной, полагая  $t = e^x$ . При этом получим рассмотренный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

что доказывает равенство (1).

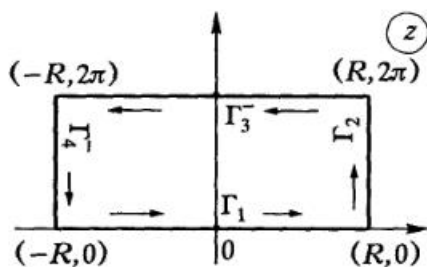


Рис. 89

В интеграле  $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$  ( $0 < m < n$ ) произведем замену переменной по формуле  $x^n = t$ .

При этом получим:

$$I_1 = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t} dt = \frac{1}{n} \frac{\pi}{\sin \frac{m}{n} \pi} \quad (0 < \frac{m}{n} < 1). \blacktriangleright$$

Читатель, вероятно, заметил, что при  $0 < a < 1$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = B(a, 1-a) = \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

**59.** Доказать, что

$$I = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x} \right) \frac{dx}{x} = \ln 2.$$

◀ Очевидно,

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{\operatorname{sh} z} \right) \frac{dz}{z}$$

и подынтегральная функция имеет устранимую особую точку  $z = 0$ . Функция

$$z \mapsto f(z) = \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{\operatorname{sh} z} \right) \frac{1}{z}$$

также имеет устранимую особую точку  $z = 0$ . Кроме того, она имеет простые полюсы в точках  $z_k = \pi k i$  ( $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ). Рассмотрим последовательность  $(R_n)$  положительных чисел, где  $R_n = (n + \frac{1}{2})\pi$ , а также последовательность областей  $K_{R_n} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R_n; \operatorname{Im} z \geq 0\}$

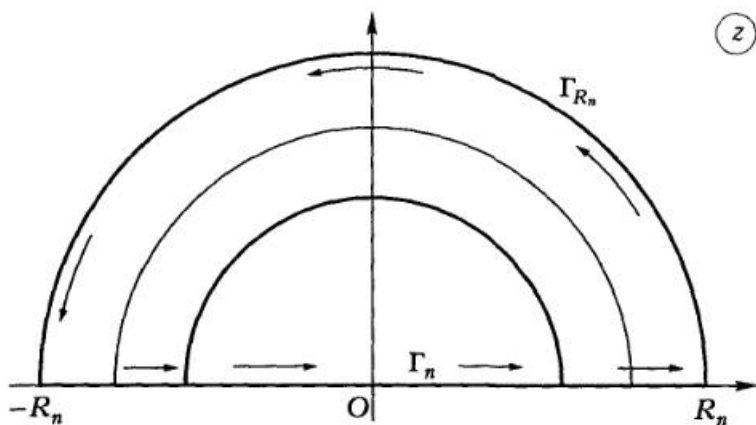


Рис. 90

с положительно ориентированными границами  $\partial K_{R_n} = (\Gamma_n, \Gamma_{R_n})$  (рис. 90). Интегрируя функцию  $f$  по кривым  $\partial K_{R_n}$ , имеем

$$\int_{\partial K_{R_n}} f(z) dz = \int_{\Gamma_n} f(z) dz + \int_{\Gamma_{R_n}} f(z) dz = \int_{-R_n}^{R_n} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x} \right) \frac{dx}{x} + \int_{\Gamma_{R_n}} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{\operatorname{sh} z} \right) \frac{1}{z} dz =$$



$$\begin{aligned}
 &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{k\pi i} f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{k\pi i} \frac{\operatorname{sh} z - z}{z^2 \operatorname{sh} z} = 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{sh} z - z}{2z \operatorname{sh} z + z^2 \operatorname{ch} z} \Big|_{z=k\pi i} = \\
 &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{-k\pi i}{-k^2 \pi^2 \operatorname{ch}(k\pi i)} = -2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}.
 \end{aligned}$$

При  $n \rightarrow \infty$   $R_n \rightarrow +\infty$ , поэтому по лемме Жордана

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{R_n}} f(z) dz = 0 \quad \text{и} \quad I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-R_n}^{R_n} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x} \right) \frac{dx}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2. \blacktriangleright$$

**60.** Доказать, что при  $-1 < \alpha < 3$  выполняется равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4} (1-\alpha) \frac{1}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}}.$$

◀ Здесь можно применить формулу (15), п. 4.1, где  $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ ,  $\alpha = \alpha + 1$ . Условия, рассмотренные в случае 5), п. 4.1, для функции  $f$  выполняются при  $p = 0$ ,  $q = 4$ . Принимая во внимание, что  $0 < \alpha + 1 < 4$ , по формуле (15), п. 4.1, имеем

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x^2)^2} dx &= \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi(\alpha+1)}} \left( \operatorname{res}_i \frac{z^\alpha}{(1+z^2)^2} + \operatorname{res}_{-i} \frac{z^\alpha}{(1+z^2)^2} \right) = \\
 &= \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \left( \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{z^\alpha}{(z+i)^2} + \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} \frac{z^\alpha}{(z-i)^2} \right) = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \left( \frac{2i^\alpha(\alpha-1)}{-8i} + \frac{2(-i)^\alpha(\alpha-1)}{8i} \right) = \\
 &= \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \frac{\alpha-1}{4i} ((-i)^\alpha - i^\alpha) = \frac{\pi(1-\alpha)}{2(1 - e^{i2\pi\alpha})} (e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} - e^{i\frac{3}{2}\pi\alpha}) = \frac{\pi(1-\alpha)}{4} \frac{1}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}}. \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

**61.** Найти сумму  $S$  ряда  $\sum \frac{(-1)^n}{n^4 - a^4}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

◀ Применив формулу (4), п. 4.2, получим, полагая  $f(z) = \frac{1}{z^4 - a^4}$ :

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2a^4} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 - a^4} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{2} \left( \operatorname{res}_a \frac{f(z)}{\sin \pi z} + \operatorname{res}_{ia} \frac{f(z)}{\sin \pi z} + \operatorname{res}_{-ia} \frac{f(z)}{\sin \pi z} + \operatorname{res}_{-a} \frac{f(z)}{\sin \pi z} \right) = \\
 &= \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{4a^3} \left( \frac{1}{\sin \pi a} + \frac{1}{\operatorname{sh} \pi a} \right). \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

**62.** Доказать, что

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \operatorname{th} \frac{\pi\sqrt{3}}{2}.$$

◀ По формуле (3), п. 4.2, имеем

$$\begin{aligned}
 S &= -\pi \left( \operatorname{res}_{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2 + z + 1} + \operatorname{res}_{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2 + z + 1} \right) = \\
 &= \frac{\pi}{i\sqrt{3}} \left( \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \right) - \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \right) \right) = \frac{\pi}{i\sqrt{3}} 2 \operatorname{tg} \left( \frac{i\sqrt{3}}{2} \pi \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \operatorname{th} \frac{\pi\sqrt{3}}{2}. \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

**63.** Найти сумму ряда  $\sum \frac{1}{(a+n)^2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

◀ В примере, рассмотренном в п. 4.2, показано, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+nb)^2} = \frac{\pi^2}{b^2 \sin^2 \frac{\pi a}{b}}. \quad (1)$$

Следовательно, при  $b = 1$  получим рассматриваемый ряд и при этом

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}. \blacktriangleright$$

**64.** Найти сумму ряда  $\sum \frac{(-1)^n}{(a+n)^2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

◀ Очевидно,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(a+n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+2n)^2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+2n-1)^2}$$

Ряды  $\sum \frac{1}{(a+2n)^2}$ ,  $\sum \frac{1}{(a+2n-1)^2}$  — частные случаи ряда  $\sum \frac{1}{(a+nb)^2}$ , сумма которого известна (см. равенство (1) в примере 63). Полагая в (1)  $b = 2$ , получим:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+2n)^2} = \frac{\pi^2}{4 \sin^2 \frac{\pi a}{2}}.$$

Для вычисления суммы ряда  $\sum \frac{1}{(a+2n-1)^2}$  в указанном равенстве полагаем  $b = 2$  и вместо  $a$  берем  $a - 1$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{4 \sin^2 \frac{\pi(a-1)}{2}} = \frac{\pi^2}{4 \cos^2 \frac{\pi a}{2}}.$$

Окончательно имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(a+n)^2} = \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi a}{2}} - \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi a}{2}} \right) = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\cos \pi a}{\sin^2 \frac{\pi a}{2} \cos^2 \frac{\pi a}{2}} = \frac{\pi^2 \operatorname{ctg} \pi a}{\sin \pi a}. \blacktriangleright$$

**65.** Найти сумму ряда  $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_0$ .

◀ Запишем сумму ряда в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-2n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}. \end{aligned}$$

Получили частный случай суммы ряда  $\sum \frac{1}{(a+nb)^2}$  при  $a = 1$ ,  $b = 2$ .

Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}. \blacktriangleright$$

66. Найти сумму ряда  $\sum \frac{1}{n^2 + a^2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_0$ .

◀ Воспользуемся формулой (3), п. 4.2, полагая  $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} &= \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2} \left( \operatorname{res}_{z=ia} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2 + a^2} + \operatorname{res}_{z=-ia} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2 + a^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2} \left( \frac{\operatorname{ctg} i\pi a}{2ia} + \frac{\operatorname{ctg} i\pi a}{2ia} \right) = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi \operatorname{cth} \pi a}{2a} = \frac{1}{2a^2} (1 + \pi a \operatorname{cth} \pi a). \blacktriangleright \end{aligned}$$

67. Найти сумму ряда  $\sum \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_0$ .

◀ Очевидно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} &= \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2 + a^2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 + a^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2} \left( \operatorname{res}_{z=\frac{ia}{2}} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{4z^2 + a^2} + \operatorname{res}_{z=-\frac{ia}{2}} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{4z^2 + a^2} + \operatorname{res}_{z=\frac{1+ia}{2}} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{(2z-1)^2 + a^2} + \operatorname{res}_{z=\frac{1-ia}{2}} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{(2z-1)^2 + a^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2} \left( \frac{\operatorname{ctg} \frac{i\pi a}{2}}{4ia} + \frac{\operatorname{ctg} \frac{i\pi a}{2}}{4ia} + \frac{\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} + i\frac{\pi a}{2} \right)}{4ia} + \frac{\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - i\frac{\pi a}{2} \right)}{-4ia} \right) = \\ &= \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{4a} \operatorname{cth} \frac{\pi a}{2} + \frac{\pi}{i4a} \operatorname{tg} \frac{i\pi a}{2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{4a} \operatorname{cth} \frac{\pi a}{2} - \frac{\pi}{4a} \operatorname{th} \frac{\pi a}{2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{4a} \left( \operatorname{cth} \frac{\pi a}{2} - \operatorname{th} \frac{\pi a}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{4a} \left( \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi a}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\pi a}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi a}{2}} \right) = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{4a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi a}{2}} = \frac{1}{2a^2} \left( 1 + \frac{\pi a}{\operatorname{sh} \pi a} \right). \blacktriangleright \end{aligned}$$

### Упражнения для самостоятельной работы

1. Найти вычеты следующих функций в особых точках:

а)  $f(z) = \frac{z^{2n}}{1+z^n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ); б)  $f(z) = \frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ); в)  $f(z) = \cos z - \sin z$ ;  
 г)  $f(z) = z^n e^z$  ( $n \in \mathbb{N}$ ); д)  $f(z) = \frac{e^z}{1+z}$ ; е)  $f(z) = e^z \ln \frac{z-a}{z-b}$ .

2. Найти вычеты в конечных особых точках следующих функций:

а)  $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+i)\left(z-\frac{i}{2}\right)^2}$ ; б)  $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 - \frac{\pi}{2} z^2}$ .

3. Найти  $\operatorname{res}_{-1} \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{(z+1)^n} \right)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

4. Найти вычет функции  $f(z) = \frac{z^a}{1-\sqrt{z}}$  ( $\sqrt{1} = 1$ ).

5. Пусть  $f$  и  $g$  — аналитические в точке  $z = a$  функции, причем  $f(a) \neq 0$ , а  $g(z)$  имеет в точке  $z = a$  нуль второго порядка. Доказать, что:

$$\operatorname{res}_a \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{6f'(a)g''(a) - 2f(a)g'''(a)}{3g''(a)^2}.$$

Если же точка  $z = a$  — простой нуль функции  $g$  и  $f(a) \neq 0$ , то

$$\operatorname{res}_a \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(a)g'(a) - f(a)g''(a)}{g'(a)^2}.$$

6. Доказать, что:

а)  $\operatorname{res}_a \frac{e^z}{(z-a)^n} = \frac{e^a}{(n-1)!}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ); б)  $\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^z}{\cos^2 z} = e^{\frac{\pi}{2}}$ ,  $\operatorname{res}_{k\pi} \frac{e^z}{\sin^2 z} = e^{k\pi}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ );

в)  $\operatorname{res}_{-1} \frac{z^{2n}}{(1+z)^n} = -\frac{(2n)!}{(n-1)!(2n+1)!}$ .

7. Пусть функция  $f$  имеет в бесконечно удаленной точке полюс порядка  $k$ . Доказать, что

$$\operatorname{res}_{\infty} f(z) = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} (z^{k+2} f^{(k+1)}(z)).$$

8. Вычислить интегралы:

а)  $\int_{\Gamma} \frac{e^{z^2} - 1}{z^3 - iz^2} dz$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 3\}$ ;

б)  $\int_{\Gamma} z^3 \sin \frac{1}{z} dz$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ;

в)  $\int_{\Gamma} \left( \sin \frac{1}{z^2} + e^{z^2} \cos z \right) dz$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{2}{3}\}$ .

9. Доказать равенства:

а)  $\int_{\Gamma_R} \frac{z^m dz}{e^{2\pi i z} - 1} = 2n + 1$ ,  $\Gamma_R = (\gamma_R, \gamma_R^{\text{op}})$ ,  $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ ,  $n < R < n + 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;

б)  $\int_{\Gamma_r} \frac{dz}{\sqrt{4z^2 - 8z + 3}} = \frac{1}{\pi i}$ ,  $\Gamma_r = (\gamma_r, \Gamma_r^{\text{op}})$ ,  $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ ,  $r > \frac{3}{2}$  и при больших  $|z|$

$$\frac{1}{\sqrt{4z^2 - 8z + 3}} = \frac{1}{2z} (1 + o(1)).$$

10. Вычислить интегралы от всех ветвей подынтегральных многозначных функций:

а)  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{\operatorname{Ln}(z-2) + \pi i}$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = \frac{1}{2}\}$ ;

б)  $\int_{\Gamma} \sqrt[4]{1 + z^4} dz$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ ;

в)  $\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{\sin(1 + \sqrt{z})}$ ,  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = \frac{3}{2}\}$ .

11. Вычислить интегралы от данных однозначных ветвей многозначных функций:

а)  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{\operatorname{Ln} z - 3\pi i}$  ( $\operatorname{Ln} z|_{z=-e} = 1 - \pi i$ ),  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2| = \frac{3}{2}\}$ ;

б)  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{(2 + \sqrt{z-1}) \sin z}$  ( $\sqrt{z-1}|_{z=0} = i$ ),  $\Gamma = (\gamma, \gamma_{\text{op}})$ ,  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{2}\}$ .

12. Доказать, что  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a d\varphi}{a^2 + \sin^2 \varphi} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$  ( $a > 0$ ).

13. С помощью теоремы Миттаг-Леффлера найти общий вид мероморфной функции  $f$ , имеющей полюсы второго порядка в точках  $b_n = n$  с главными частями в них  $g_n(z) = \frac{n}{(z-n)^2}$ .

14. Доказать равенство:

$$\frac{1}{\operatorname{ch} z - \cos z} = \frac{1}{z^2} + \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\operatorname{sh} \pi n} \frac{1}{\frac{1}{4} z^4 + n^4 \pi^4}, \quad z \neq n\pi (\pm 1 \pm i).$$

15. Доказать равенства:

$$\text{а) } \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}; \quad \text{б) } \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = 1.$$

16. Найти области сходимости бесконечных произведений:

$$\text{а) } \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n z^n\right); \quad \text{б) } \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{n}}\right) \exp \left(\frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^3\right).$$

17. Доказать, что функция  $f$ , где  $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( \left(1 - \frac{z}{n}\right) \exp \left(\frac{z}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{n}\right)^2\right) \right)^n$  является целой.

Найти нули этой функции и их кратность.

18. Получить теорему Вейерштрасса (п. 3.3) из теоремы Миттаг-Леффлера (п. 2.2).

19. Доказать равенства:

$$a) \operatorname{ch} z - \cos z = z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^4}{4n^4\pi^4}\right); \quad б) \frac{\sin \frac{\pi z}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2}}{\pi^2 z^2 (1 - z^4)} = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{z^4}{n^4}\right);$$

$$в) \operatorname{th} z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 + \left(\frac{z}{n\pi}\right)^2}{1 + \left(\frac{z}{n(n-\frac{1}{2})}\right)^2} \right).$$

20. Доказать равенства:

$$a) \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^4}\right) = \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{4}}{4\pi}; \quad б) \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^4}\right) = \frac{\operatorname{ch} \pi \sqrt{2} - \cos \pi \sqrt{2}}{4\pi^2}.$$

21. Доказать равенства:

$$\alpha) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a \cos x + b \sin x + c)^2} = \frac{2\pi |c|}{(c^2 - a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}; c^2 - b^2 - a^2 > 0);$$

$$\beta) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{a + b \cos x} = \frac{2\pi}{b^2} (a - \sqrt{a^2 - b^2}), \quad 0 < b < a.$$

22. Вычислить интеграл:

$$I = \int_0^{2\pi} e^{a \cos x} \sin(a \sin x) \sin nx dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

23. Доказать равенства:

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)(x^2+a^2)^2} = \pi \frac{5a^4+1+a\sqrt{2}(a^4-2a^2-1)}{2a^2(1+a^4)^2}; \quad 2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}; \quad 3) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+1} = \frac{4}{5} \pi \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}.$$

24. Интегрируя функцию  $z \mapsto f(z) = \frac{e^{az}}{\operatorname{ch} \pi z}$ ,  $-\pi < a < \pi$ , по границе прямоугольника с вершинами в точках  $(-R, 0)$ ,  $(R, 0)$ ,  $(R, i)$ ,  $(-R, i)$ , доказать равенства:

$$\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{\operatorname{ch} \pi x} = \sec \frac{a}{2}; \quad \beta) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} \pi x} dx = \sec \frac{a}{2}.$$

25. Доказать равенства:

$$\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(x+c)^2} dx = c^{a-1} \frac{\pi a}{\sin \pi a}, \quad c > 0, -1 < a < 3 \text{ и не равно целому числу}; \quad \beta) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+c)^2} dx = \frac{\pi}{2c^{\frac{3}{2}}};$$

$$\gamma) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+c)^2} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{c}}; \quad \delta) \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \sec \frac{\pi a}{2}, \quad -1 < a < 1.$$

26. Интегрируя функцию  $z \mapsto f(z) = \frac{1}{1+z}$  по границе кругового сектора

$$S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R, 0 < \arg z < \frac{2\pi}{3}\},$$

доказать равенства:

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}; \quad б) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

27. Интегрируя функцию  $z \mapsto f(z) = \frac{\ln z}{1+z^2}$  по границе кругового сектора

$$S = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\},$$

доказать, что:

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^4} dx = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{8}; \quad б) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \ln x dx}{x^4+1} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{8}.$$

28. Доказать равенства:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 - a^4} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{4a^3} (\operatorname{ctg} \pi a + \operatorname{cth} \pi a); \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + a^2)^2} = \frac{1}{4a^4} \left( \frac{\pi^2 a^2}{\operatorname{sh}^2 \pi a} + \pi a \operatorname{cth} \pi a - 2 \right).$$

## Некоторые общие вопросы геометрической теории аналитических функций

Эта глава посвящена изучению некоторых общих топологических свойств аналитических функций. В ней рассмотрены геометрические принципы и общие вопросы теории конформных отображений. Последний параграф посвящен конформным отображениям многоугольников.

### § 1. Принцип аргумента. Теорема Руше

#### 1.1. Вычисление интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\varphi(z)f'(z)}{f(z)-A} dz$ .

Пусть  $D \in \mathbb{C}$  — область,  $f$  — аналитическая в замыкании  $\bar{D}$  функция, за исключением конечного множества полюсов, лежащих в  $D$  (но не на  $\partial D$ ) и  $\partial D$  — непрерывная положительно ориентированная кривая. Пусть, далее,  $A$  — такое произвольное (конечное) комплексное число, что функция  $f$  не имеет  $A$ -точек на границе  $\partial D$ , а  $\varphi$  — произвольная аналитическая в замыкании  $\bar{D}$  функция. Рассмотрим в области  $D$  функцию  $z \mapsto F(z) = \frac{\varphi(z)f'(z)}{f(z)-A}$ . Ее возможные особые точки в  $D$  — это  $A$ -точки и полюсы функции  $f$ .

Пусть  $\{a_k; k = \overline{1, m}\}$  —  $A$ -точки функции  $f$  в  $D$  кратностей соответственно  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , а  $\{b_j; j = \overline{1, n}\}$  — полюсы соответственно порядков  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ . Изучим функцию  $F$  в окрестности точки  $a_k$ . В соответствии с формулой (3), п. 1.8, гл. 5, имеем

$$f(z) - A = (z - a_k)^{\alpha_k} f_0(z), \quad f_0(a_k) \neq 0.$$

Тогда

$$f'(z) = \alpha_k(z - a_k)^{\alpha_k - 1} f_0(z) + (z - a_k)^{\alpha_k} f'_0(z),$$

$$F(z) = \varphi(z) \frac{(z - a_k)^{\alpha_k - 1} (\alpha_k f_0(z) + (z - a_k) f'_0(z))}{(z - a_k)^{\alpha_k} f_0(z)} = \varphi(z) \frac{\alpha_k f_0(z) + (z - a_k) f'_0(z)}{(z - a_k) f_0(z)},$$

откуда

$$\operatorname{res}_{a_k} F(z) = \alpha_k \varphi(a_k).$$

Аналогично, рассмотрим функцию  $F$  в окрестности точки  $b_j$ :

$$f(z) - A = \frac{f_0(z)}{(z - b_j)^{\beta_j}}, \quad f_0(b_j) \neq 0,$$

$$f'(z) = -\beta_j \frac{f_0(z)}{(z - b_j)^{\beta_j + 1}} + \frac{f'_0(z)}{(z - b_j)^{\beta_j}} = \frac{1}{(z - b_j)^{\beta_j + 1}} (-\beta_j f_0(z) + f'_0(z)(z - b_j)),$$

$$F(z) = \varphi(z) \frac{-\beta_j f_0(z) + f'_0(z)(z - b_j)}{(z - b_j) f_0(z)},$$

откуда

$$\operatorname{res}_{b_j} F(z) = -\beta_j \varphi(b_j).$$

По основной теореме о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \varphi(z) \frac{f'(z) dz}{f(z) - A} = \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi(a_k) - \sum_{j=1}^n \beta_j \varphi(b_j). \quad (1)$$

В дальнейшем каждую  $A$ -точку засчитываем столько раз, какова ее кратность. Аналогично, каждый полюс засчитываем столько раз, каков его порядок. При таком соглашении правая часть формулы (1) выражает разность между суммой значений, принимаемых функцией  $\varphi$  в  $A$ -точках функции  $f$  и суммой значений, принимаемых той же функцией  $\varphi$  в полюсах функции  $f$ , лежащих в области  $D$ .

Рассмотрим частные случаи.

1) При  $\varphi(z) = z$  формула (1) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} z \frac{f'(z) dz}{f(z) - A} = \sum_{k=1}^m \alpha_k a_k - \sum_{j=1}^n \beta_j b_j. \quad (2)$$

В правой части формулы (2) стоит разность между суммой  $A$ -точек функции  $f$  и суммой ее полюсов, размещенных в  $D$ .

2) При  $\varphi(z) = 1$  имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z) - A} dz = \sum_{k=1}^m \alpha_k - \sum_{j=1}^n \beta_j. \quad (3)$$

В правой части формулы (3) стоит разность между числом  $A$ -точек и числом полюсов функции  $f$ , помещенных в области  $D$ .

## 1.2. Теорема о логарифмическом вычете.

Пусть теперь  $A = 0$ , т. е.  $A$ -точки функции  $f$  являются ее нулями в области  $D$ .

Введем в рассмотрение следующие обозначения:  $\sum_{k=1}^m \alpha_k = N$  — число нулей функции  $f$  в области  $D$ ,  $\sum_{j=1}^n \beta_j = P$  — число полюсов этой же функции в  $D$ . Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P. \quad (1)$$

Интеграл, находящийся в левой части этого равенства, называется *логарифмическим вычетом* функции  $f$  относительно  $\partial D$ , а само равенство выражает смысл следующей теоремы о логарифмическом вычете.

**Теорема.** Пусть  $D \in \mathbb{C}$  — область с положительно ориентированной границей  $\partial D$ , и множество точек границы является кривой Жордана. Тогда, если функция  $f$  аналитическая в замыкании  $\bar{D}$ , за исключением полюсов, размещенных в  $D$ , и  $f$  не обращается в нуль на  $\partial D$ , то логарифмический вычет функции относительно  $\partial D$  равен разности между числом нулей и числом полюсов функции  $f$ , размещенных в  $D$ .

## 1.3. Принцип аргумента.

Теореме о логарифмическом вычете можно придать геометрический оттенок.

Первообразной функции  $\frac{f'}{f}$  в окрестности любой точки  $z \in \partial D$ , в которой нет ни нуля, ни полюса функции  $f$ , является функция  $z \mapsto F(z) = \ln f(z)$ , где  $\ln$  обозначает любую ветвь логарифма, поскольку  $F'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ .



Пусть  $\partial D = (\gamma, \gamma_{\text{ор}})$ ,  $[\alpha, \beta] \xrightarrow{\varphi} \gamma$  — параметрическое представление кривой  $\gamma$ . Тогда пер-

вообразной функции  $\frac{f'}{f}$  вдоль кривой  $\gamma$  является функция  $t \mapsto \Phi(t) = \ln f(\varphi(t))$ . Поскольку кривая  $\gamma$  замкнута, то  $\ln |f(\varphi(\beta))| = \ln |f(\varphi(\alpha))|$ . Принимая это во внимание и применив формулу Ньютона—Лейбница (см. формулу (1), п. 5.2, гл. 4), получим:

$$\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = i(\arg f(\varphi(\beta)) - \arg f(\varphi(\alpha))). \quad (1)$$

Введем обозначение

$$\Delta_{\partial D} \arg f = \arg f(\varphi(\beta)) - \arg f(\varphi(\alpha))$$

и запишем равенство (1) в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{\Delta_{\partial D} \arg f}{2\pi},$$

или, принимая во внимание теорему о логарифмическом вычете, в виде

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \cdot \Delta_{\partial D} \arg f. \quad (2)$$

Последнее равенство выражает *принцип аргумента*, который можно сформулировать следующим образом.

**Принцип аргумента.** Пусть  $D \in \mathbb{C}$  — область и множество  $\gamma$  точек ее границы  $\partial D$  является кривой Жордана. Тогда, если функция  $f$  аналитическая в замыкании  $\overline{D}$ , за исключением конечного числа полюсов, размещенных в  $D$ , и  $f$  не обращается в нуль на кривой  $\gamma$ , то разность между числом нулей  $N$  и числом полюсов  $P$  функции  $f$  в области  $D$  равна деленному на  $2\pi$  приращению аргумента  $f$  при обходе точкой  $z$  границы области  $D$  в положительном направлении один раз.

Очевидно, что  $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg f$  — это число полных оборотов вокруг точки  $w = 0$ , совершаемых вектором  $f$ , когда подвижная точка  $z$  обходит положительно ориентированную кривую  $\partial D$  один раз в направлении, противоположном ходу часовой стрелки. В связи с этим принцип аргумента можно сформулировать по-другому, а именно:

**Принцип аргумента (альтернативная формулировка).** Пусть  $D \in \mathbb{C}$  — область и множество  $\gamma$  точек ее границы  $\partial D$  является кривой Жордана. Тогда, если функция  $f$  аналитическая в замыкании  $\overline{D}$  за исключением конечного числа полюсов, размещенных в  $D$ , и  $f$  на границе области  $D$  не обращается в нуль, то разность  $N - P$  равна числу полных оборотов, совершаемых вектором  $w = f$  вокруг точки  $w = 0$  при обходе точкой  $z$  границы области  $D$  в положительном направлении один раз.

#### 1.4. Теорема Руше.

Из принципа аргумента следует такое утверждение.

**Теорема (Руше).** Пусть функции  $\varphi$  и  $\psi$  аналитические в замыкании  $\overline{D}$ , где  $D \in \mathbb{C}$  — область с положительно ориентированной границей  $\partial D$ , множество точек которой является кривой Жордана, и пусть  $\forall z \in \partial D$   $|\varphi(z)| > |\psi(z)|$ . Тогда функции  $\varphi$  и  $\varphi + \psi$  имеют в области  $D$  одинаковое количество нулей.

◀ Из неравенства  $|\varphi(z)| > |\psi(z)|$ , выполняющегося  $\forall z \in \partial D$ , следует, что функции  $\varphi$  и  $\varphi + \psi$  не имеют нулей на  $\partial D$ . Действительно, поскольку  $\forall z \in \partial D$   $|\varphi(z)| > |\psi(z)| \geq 0$ , то

$$|\varphi(z) + \psi(z)| \geq |\varphi(z)| - |\psi(z)| > 0.$$

Пусть  $N$  — число нулей функции  $\varphi + \psi$  в области  $D$ . В соответствии с принципом аргумента имеем

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg(\varphi + \psi) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg \varphi \left(1 + \frac{\psi}{\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi} \left( \Delta_{\partial D} \arg \varphi + \Delta_{\partial D} \arg \left(1 + \frac{\psi}{\varphi}\right) \right).$$

Принимая во внимание, что  $\left| \frac{\psi}{\varphi} \right|_{\partial D} < 1$ , вектор  $w = 1 + \frac{\psi}{\varphi}$  при обходе точкой  $z$  границы  $\partial D$  не может совершить оборот вокруг точки  $w = 0$ , поскольку точка  $w = 1 + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$  все время движется внутри круга  $K = \{w \in \mathbb{C} : |w - 1| < 1\}$ , не содержащего точки  $w = 0$ . Следовательно,  $\arg \left( 1 + \frac{\psi}{\varphi} \right)$  при полном обходе границы  $\partial D$  возвращается к первоначальному значению и

$$\Delta_{\partial D} \arg \left( 1 + \frac{\psi}{\varphi} \right) = 0.$$

Таким образом,

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg \varphi,$$

т. е.  $N$  — число нулей функции  $\varphi$  в области  $D$ . ►

Теорема Руше имеет многочисленные применения. Она используется, в частности, для определения числа нулей функции.

Пусть, например, требуется определить количество нулей многочлена  $P(z) = z^5 - 5z^3 + 2$ , лежащих в круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . Полагаем  $P(z) = \varphi(z) + \psi(z)$ , где  $\varphi(z) = -5z^3$ ,  $\psi(z) = z^5 + 2$ . Если  $|z| = 1$ , то  $|\varphi(z)| = 5 > |z^5 + 2|$ , так как  $|z^5 + 2| \leq |z^5| + 2 = 3$ . Функция  $\varphi$  имеет в единичном круге  $K$  три нуля. Поэтому, по теореме Руше, многочлен  $P$  имеет в круге  $K$  три нуля.

С помощью теоремы Руше очень просто доказывается *основная теорема алгебры*:

**Основная теорема алгебры.** Любой многочлен степени  $n$

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

имеет в комплексной плоскости ровно  $n$  нулей.

► Полагаем  $P_n(z) = \varphi(z) + \psi(z)$ , где  $\varphi(z) = a_0 z^n$ . Многочлен  $\varphi$  имеет в комплексной плоскости ровно  $n$  нулей, т. к.  $z = 0$  является нулем  $n$ -го порядка функции  $\varphi$ , а при подсчете числа нулей каждый из них засчитывается столько раз, какова его кратность. В качестве области  $D$  возьмем круг  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ , а  $R$  выберем настолько большим, чтобы  $\forall z \in D_{K_R}$  выполнялось неравенство  $|\varphi(z)| > |\psi(z)|$ , где  $\psi(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ . Для этого достаточно взять  $R = 1 + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ . Тогда по теореме Руше число нулей функций  $\varphi$  и  $P$  в круге  $K_R$  одинаково, т. е. многочлен  $P$  имеет  $n$  нулей. ►

Рассмотрим задачи.

**1.** Определить число нулей многочлена  $P(z) = z^5 - 12z^2 + 14$ :

- а) в кольце  $V_1 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \frac{5}{2}\}$ ;
- б) в кольце  $V_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ ;
- в) в правой полуплоскости  $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ .

◄ а) Пусть

$$P(z) = \varphi(z) + \psi(z), \quad \varphi(z) = z^5, \quad \psi(z) = -12z^2 + 14.$$

При  $|z| = \frac{5}{2}$  имеем

$$|\varphi(z)| = \frac{3125}{32} = 97 \frac{21}{32}, \quad |\psi(z)| \leq |-12z^2| + 14 = 89,$$

т. е.  $|\varphi(z)| > |\psi(z)|$ . По теореме Руше все пять нулей многочлена  $P$  лежат в круге  $K_{5/2} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{5}{2}\}$ . Определим, сколько из них имеют модуль меньше единицы. С этой целью полагаем

$$P(z) = \varphi_1(z) + \psi_1(z), \quad \varphi_1(z) = 14, \quad \psi_1(z) = z^5 - 12z^2.$$

При  $|z| = 1$ ,

$$|\varphi_1(z)| = 14, \quad |\psi_1(z)| \leq 13,$$

следовательно, по теореме Руше в круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  нулей многочлена  $P$  нет. Таким образом, все пять нулей многочлена  $P$  размещены в кольце  $V_1$ .

б) Пусть

$$P(z) = \varphi_3(z) + \psi_3(z), \quad \varphi_3(z) = -12z^2, \quad \psi_3(z) = z^5 + 14.$$

При  $|z| = 2$

$$|\varphi_3(z)| = 48, \quad |\psi_3(z)| \leq |z^5| + 14 = 46.$$

По теореме Руше число нулей многочлена  $P$  в круге  $K_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ , следовательно и в кольце  $V_2$  равно двум, т. е. столько, сколько их у функции  $\varphi_3$ .

в) Из неравенства  $P(iy) = iy^5 + 12y^2 + 14$  следует, что многочлен  $P$  не имеет нулей на мнимой оси, поскольку действительная и мнимая части  $P(iy)$  не обращаются одновременно в нуль. Применяя принцип аргумента к полукругу  $\tilde{K} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \operatorname{Re} z > 0\}$ , получаем, что число  $N$  нулей многочлена  $P$  в правой полуплоскости определяется равенством

$$N = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} (\Delta_{|iR, -iR|} \arg P(z) + \Delta_{\Gamma_R} \arg P(z)),$$

где  $\Gamma_R = (\gamma_R, \gamma_R^{\text{op}})$ ,  $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} \mid z = Re^{it}, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}$ .

При больших  $R > 0$  имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{|iR, -iR|} \arg P(z) &= \Delta_{y \in [R, -R]} (iy^5 + 12y^2 + 14) = \\ &= \Delta_{y \in [R, 0]} \operatorname{arctg} \frac{y^5}{12y^2 + 14} + \Delta_{y \in [0, -R]} \operatorname{arctg} \frac{y^5}{12y^2 + 14} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + O(R^{-1}) = -\pi + O(R^{-1}), \\ \Delta_{\Gamma_R} \arg P(z) &= \Delta_{\Gamma_R} \arg z^5 + \Delta_{\Gamma_R} \left(1 + \frac{11 - 12z^2}{z^5}\right) = 5\pi + O(R^{-1}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$N = \frac{1}{2\pi} (-\pi + 5\pi) = 2. \blacktriangleright$$

2. В каких квадрантах находятся корни уравнения

$$z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0?$$

◀ Очевидно, что уравнение не имеет неотрицательных корней. Покажем, что оно не имеет отрицательных корней. Действительно, полагая  $z = -x$ , получим уравнение

$$x^4 - x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0.$$

При  $0 < x \leq 1$  сумма первых трех членов, а также сумма двух последних членов положительны. При  $x > 1$  сумма первых двух членов, а также сумма трех последних членов положительны. Следовательно,

$$\forall x > 0 \quad x^4 - x^3 + 4x^2 - 2x + 3 > 0.$$

Подставим в уравнение  $z = iy$ . Тогда оно примет вид

$$y^4 - iy^3 - 4y^2 + 2iy + 3 = 0.$$

Действительная и мнимая части этого уравнения не обращаются одновременно в нуль, в силу чего исследуемое уравнение не имеет и чисто мнимых корней.

Число его корней, размещенных в первом квадранте, определяется равенством

$$\begin{aligned} N = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \Delta_{x \in [0, R]} \arg(x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 3) + \Delta_{y \in [R, 0]} \arg(y^4 - iy^3 - 4y^2 + 2iy + 3) + \right. \\ \left. + \Delta_{\substack{z = Re^{it} \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}}} \arg(z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3) \right). \end{aligned}$$

Имеем

$$\Delta_{x \in [0, R]} \arg(x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 3) = 0,$$

$$\Delta_{y \in [R, 0]} \arg(y^4 - 4y^2 + 3 + i(-y^3 + 2y)) = \Delta_{y \in [R, 0]} \operatorname{arctg} \frac{-y^3 + 2y}{y^4 - 4y^2 + 3}.$$

Числитель дроби под знаком арктангенса обращается в нуль при  $y = \sqrt{2}$  и  $y = 0$ , а ее знаменатель — при  $y = \sqrt{3}$  и  $y = 1$ . Изменение этой дроби при изменении  $y$  от  $R$  до 0 можно охарактеризовать следующей таблицей:

$y$	$R$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0
$\frac{-y^3 + 2y}{y^4 - 4y^2 + 3}$	$O(R^{-1})$	-	$\infty$	+	0
			0	-	$\infty$
				+	0

с помощью которой легко заметить, что

$$\Delta_{y \in [R, 0]} \arg(y^4 - 4y^2 + 3 + i(-y^3 + 2y)) = -2\pi + O(R^{-1}).$$

Далее,

$$\Delta_{\substack{z = Re^{it} \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}}} \arg(z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3) = \Delta_{\substack{z = Re^{it} \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}}} \arg z^4 \left(1 + \frac{z^3 + 4z^2 + 2z + 3}{z^4}\right) = 2\pi + O(R^{-1})$$

В результате получаем:

$$N = \frac{1}{2\pi} (0 - 2\pi + 2\pi) = 0,$$

т. е. рассматриваемое уравнение не имеет корней в первом квадранте. Поскольку корни уравнения распадаются на пары сопряженных, то корней нет и в четвертом квадранте, а во втором и в третьем имеем их по два. ►

**3.** Пусть  $f \in A(\bar{K})$ , где  $\bar{K} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ . Доказать существование такого числа  $\rho > 0$ , что для всех  $w$  из круга  $K_\rho = \{w \in \mathbb{C} : |w| < \rho\}$  уравнение  $z = wf(z)$  имеет в круге  $K$  ровно один корень.

► Запишем уравнение в виде  $\varphi(z) + \psi(z) = 0$ , где  $\varphi(z) = z$ ,  $\psi(z) = -wf(z)$ . При  $|z| = 1$   $|\varphi(z)| = 1$ ,  $|wf(z)| \leq |w|M$ , где  $M = \max_{|z|=1} |f(z)|$ . При  $|w| < \frac{1}{M}$  выполняются условия теоремы Руше. ►

**4.** Доказать, что уравнение  $(2z + 1)e^z = 2z + 3$  не имеет решений с положительной действительной частью.

► Запишем уравнение в виде

$$\varphi(z) + \psi(z) = \frac{2z + 3}{2z + 1} - e^{-z} = 0.$$

В полуплоскости  $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -1\}$  выполняется неравенство  $|\varphi(z)| = \left|\frac{2z+3}{2z+1}\right| > 1$ , а в полуплоскости  $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$  — неравенство  $|\psi(z)| = |-e^{-z}| = e^{-x} < 1$ . Таким образом, на границе полукруга  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \operatorname{Re} z > 0\}$   $|\varphi(z)| > |\psi(z)| \forall R > 0$ . ►

## § 2. Сохранение области и локальное обращение аналитической функции

### 2.1. Принцип сохранения области.

**Теорема 1.** Если функция  $f$  аналитическая в области  $D$  и не равна тождественно постоянной, то образ области  $D$  при отображении  $f$  также есть область.

► Пусть  $D \xrightarrow{f} D^*$ . Покажем, что  $D^*$  — связное открытое множество.

1) Пусть  $w_1$  и  $w_2$  — две любые точки множества  $D^*$ ,  $z_1$  — один из прообразов  $w_1$ ,  $z_2$  — один из прообразов  $w_2$  при отображении  $f$ :  $f(z_1) = w_1$ ,  $f(z_2) = w_2$ ,  $z_1 \in D$ ,  $z_2 \in D$ . В силу связности  $D$  существует жорданова кривая  $\gamma$ , соединяющая точки  $z_1$  и  $z_2$ , лежащая в  $D$ . Пусть  $[\alpha, \beta] \xrightarrow{f} \gamma$  — параметрическое представление кривой  $\gamma$ . Тогда  $\forall t \in [\alpha, \beta]$   $\varphi(t) \in D$  и  $\varphi(\alpha) = z_1$ ,  $\varphi(\beta) = z_2$ . Так как функция  $f$  непрерывная, то композиция  $\psi = f \circ \varphi$ ,  $D_\psi = [\alpha, \beta]$ ,

является параметрическим представлением непрерывной кривой  $\gamma^* \subset D^*$ , соединяющей точки  $\psi(\alpha) = (f \circ \varphi)(\alpha) = f(z_1) = w_1$  и  $\psi(\beta) = (f \circ \varphi)(\beta) = f(z_2) = w_2$ . Следовательно, множество  $D^*$  является линейно-связным, так как любые две его точки можно соединить путем, состоящим из точек  $D^*$ .

2) Покажем, что  $D^*$  — открытое множество. Пусть  $w_0 \in D^*$  — любая точка и  $z_0$  — один из ее прообразов:  $f(z_0) = w_0$ . Так как  $D$  — открытое множество, то существует окрестность  $O_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subseteq D$ . Выберем  $r$  настолько малым, чтобы в замыкании  $\bar{O}_r(z_0)$  не содержалось  $w_0$ -точек функции  $f$  (кроме точки  $z_0$ ). Очевидно, такой круг существует, поскольку у аналитической функции  $f \not\equiv \text{const}$  ее  $w_0$ -точки изолированы. Пусть  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$  и  $\mu = \min_{z \in \gamma} |f(z) - w_0|$ . Очевидно,  $\mu > 0$  (т. к. в противном случае, т. е. при  $\mu = 0$  непрерывная функция  $z \mapsto |f(z) - w_0|$ , достигающая на замкнутом множестве своего наименьшего значения, обратилась бы в нуль в некоторой точке  $z' \in \gamma$ , а это означало бы, что на кривой  $\gamma_r$  есть  $w_0$ -точка функции  $f$ , что противоречит выбору  $\gamma_r$ ). Теперь покажем, что

$$K_\mu = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \mu\} \subset D^*.$$

Действительно, пусть  $w_1 \in K_\mu$  — любая точка. Имеем

$$f(z) - w_1 = (f(z) - w_0) + (w_0 - w_1),$$

причем  $|f(z) - w_0| \geq \mu$  на кривой  $\gamma_r$ , а  $|w_1 - w_0| < \mu$ . По теореме Руше функция  $z \mapsto f(z) - w_1$  имеет внутри  $\gamma_r$  столько же нулей, сколько их имеет функция  $z \mapsto f(z) - w_0$ . Последняя имеет в окрестности  $O_r(z_0)$  по меньшей мере хотя бы один нуль, следовательно, функция  $z \mapsto f(z) - w_1$  также имеет в этой окрестности по крайней мере один нуль, т. е. существует такая точка  $z_1 \in O_r(z_0)$ , что  $f(z_1) = w_1$ , откуда следует, что  $w_1 \in D^*$ . В силу произвольности выбора  $w_1 \in K_\mu$  делаем вывод, что  $K_\mu \subset D^*$ , т. е.  $D^*$  — открытое множество.

Из 1) и 2) следует, что  $D^*$  — область. ►

**Замечание 1.** Непрерывные отображения, оставляющие инвариантными открытые множества, называются *открытыми отображениями*. Ясно, что любое открытое отображение оставляет инвариантными также и области. Следовательно, отображения, осуществляемые аналитическими функциями, являются открытыми.

**Замечание 2.** Открытое отображение  $A \xrightarrow[\text{на}]{f} B$  называется *внутренним*, если для любой точки  $b \in B$  множество  $f^{-1}(b)$  ее прообразов ( $f^{-1}(b) \subset A$ ) не содержит никакого континуума. Очевидно, что отображения, осуществляемые аналитическими функциями, являются внутренними, так как  $\forall b \in B$  множество  $f^{-1}(b)$  состоит лишь из изолированных точек.

## 2.2. Локальное обращение аналитических функций.

Пусть  $w = f(z)$  — аналитическая функция в точке  $z_0$ . Рассмотрим два возможных случая.

а) Пусть  $f'(z_0) \neq 0$  и  $f(z_0) = w_0$ . Так же, как и в теореме о сохранении области, выберем круг  $O_r(z_0)$ , компактно принадлежащий окрестности аналитичности функции  $f$  и не содержащий других  $w_0$ -точек функции  $f$ , кроме центра  $z_0$ . Пусть, далее,  $\mu = \min_{z \in \gamma_r} |f(z) - w_0|$ ,  $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ ,  $\mu > 0$ . По теореме Руше получим, что функция  $f$  принимает в круге  $O_r(z_0)$  любое свое значение столько раз, сколько раз она принимает значение  $w_0$ . Однако, это значение она принимает только в точке  $z_0$  и притом однократно, так как  $f'(z_0) \neq 0$ . Таким образом, функция  $f$  принимает в круге  $O_r(z_0)$  любое значение из круга  $K_\mu = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \mu\}$  и притом только один раз. Иными словами,  $f$  — локально однолистно в точке  $z_0$ . Тем самым в круге  $K_\mu$  определена функция  $z = g(w)$ , обратная функции  $f$ :  $g(w_0) = z_0$  и  $(f \circ g)(w) = w$ . Из однолистности  $f$  следует, что  $\Delta w \neq 0$  при  $\Delta z \neq 0$ . При этом

$$\frac{\Delta g}{\Delta w} = \frac{\Delta z}{\Delta w} = \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} \rightarrow \frac{1}{f'(z)} \neq \infty$$

в окрестности точки  $z_0$ . Таким образом,  $g \in A(K_\mu)$ .

Пусть

$$z = g(w) = z_0 + a_1(w - w_0) + a_2(w - w_0)^2 + \dots, \quad a_n = \frac{g^{(n)}(w_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_\mu} \frac{g(w) dw}{(w - w_0)^{n+1}}.$$

Заменяем в интеграле переменную, полагая  $z = g(w)$  ( $w = f(z)$ ). Тогда получим:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{z f'(z) dz}{(f(z) - w_0)^{n+1}} = -\frac{1}{2\pi i n} \int_{\Gamma_r} z \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{(f(z) - w_0)^n} \right) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i n} \int_{\Gamma_r} \frac{dz}{(f(z) - w_0)^n} = \frac{1}{n!} \left( \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( \frac{z - z_0}{f(z) - w_0} \right)^n \right)_{z=z_0}, \quad \Gamma_r = (\gamma_r, \gamma_r^{\text{op}}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$z = g(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( \frac{z - z_0}{f(z) - w_0} \right)^n \right)_{z=z_0} (w - w_0)^n. \quad (1)$$

Ряд (1) называется *рядом Лагранжа*.

Рассмотрим обобщение формулы (1), а именно, получим разложение в окрестности точки  $w_0$  функции  $F \circ g$ , где  $F$  — произвольная аналитическая функция в области, компактно содержащей круг  $O_r(z_0)$ .

Пусть

$$(F \circ g)(w) = F(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

Повторяя предыдущие преобразования, получим:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_\mu} \frac{F(g(w))}{(w - w_0)^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{F(z) f'(z) dz}{(f(z) - w_0)^{n+1}} = -\frac{1}{2\pi i n} \int_{\Gamma_r} F(z) \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{(f(z) - w_0)^n} \right) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i n} \int_{\Gamma_r} \frac{F(z) dz}{(f(z) - w_0)^n} = \frac{1}{n!} \left( \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( F'(z) \left( \frac{z - z_0}{f(z) - w_0} \right)^n \right) \right)_{z=z_0}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(F \circ g)(w) = F(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( F'(z) \left( \frac{z - z_0}{f(z) - w_0} \right)^n \right) \right)_{z=z_0} (w - w_0)^n. \quad (2)$$

При  $F(z) = z$  получаем формулу Лагранжа.

б) Пусть  $f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0$ ,  $f^{(p)}(z_0) \neq 0$  ( $p > 1$ ). Повторим прежние соображения. Выберем круг  $O_r(z_0)$  так, чтобы в нем кроме центра  $z_0$  не было других  $w_0$ -точек функции  $f$ , и чтобы  $\forall z \in O_r(z_0) \setminus \{z_0\}$   $f'(z) \neq 0$ . Как и ранее, выберем  $\mu > 0$  и покажем, что в круге  $O_r(z_0)$  любое значение  $w$  из круга  $K_\mu$  функция  $f$  принимает столько раз, сколько она принимает в нем значение  $w_0$ , т.е.  $p$  раз. При этом, если  $w \neq w_0$ , то все значения  $w$  функция  $f$  принимает в разных точках, поскольку в них  $f'(z) \neq 0$ . В таком случае функцию  $f$  называют  $p$ -листной в круге  $O_r(z_0)$ . Если  $z \in O_r(z_0)$ , то

$$\begin{aligned} w &= f(z) = w_0 + (z - z_0)^p \varphi(z), \quad \varphi(z_0) \neq 0, \\ \psi(z) &= (z - z_0) \sqrt[p]{\varphi(z)} = \sqrt[p]{w - w_0}. \end{aligned}$$

Под  $\sqrt[p]{\varphi(z)}$  понимаем здесь какую-либо ветвь. Эту ветвь можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $z_0$ , свободный член которого не равен нулю, следовательно,  $\psi'(z_0) \neq 0$  и, согласно пункту а), в окрестности нуля существует функция, обратная функции  $\zeta = \psi(z)$ :  $z = \psi^{-1}(\zeta)$ .

Запишем ее разложение в окрестности точки  $\zeta = 0$  в ряд Тейлора

$$z = z_0 + \alpha_1 \zeta + \alpha_2 \zeta^2 + \dots = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta^n.$$

Заменяя здесь  $\zeta$  на  $(w - w_0)^{\frac{1}{p}}$ , получим разложение, обращающее функцию  $f$  в обобщенный степенной ряд

$$z = g(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (w - w_0)^{\frac{n}{p}}. \quad (3)$$

Легко убедиться в том, что коэффициенты  $\alpha_n$  разложения (3) определяются по формулам

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( \frac{z - z_0}{(f(z) - f(z_0))^{\frac{1}{p}}} \right) \right)_{z=z_0}. \quad (4)$$

Анализируя разложение (3), приходим к выводу, что  $g(w)$  является в круге  $K_\mu$  элементом полной аналитической функции, для которой точка  $w_0$  является точкой разветвления  $(p-1)$ -го порядка.

Из рассмотренных случаев а) и б) следует такое утверждение.

**Теорема 1.** Неравенство  $f'(z_0) \neq 0$  является необходимым и достаточным условием локальной однолиственности аналитической функции  $f$  в точке  $z_0$ .

Заметим, что из выполнения условия локальной однолиственности функции  $f$  в каждой точке  $z$  области  $D$  не следует, вообще говоря, ее однолиственность в  $D$ . Пусть, например,  $f(z) = e^z$ . Тогда  $\forall z \in \mathbb{C} \ f'(z) = e^z \neq 0$ . Однако функция  $z \mapsto e^z$  не является однолистной в любой области, содержащей хотя бы одну пару таких точек  $z_1$  и  $z_2$ , что  $z_1 - z_2 = 2\pi ki$ . Следовательно,  $f'(z) \neq 0$  в  $D$  является необходимым условием однолиственности  $f$  в  $D$ , но не достаточным.

**Теорема 2** (принцип однолиственности). Пусть функция  $f$  аналитическая в области  $D$  и непрерывна в замыкании  $\bar{D} \subset \mathbb{C}$ ,  $\partial D$  — положительно ориентированная кривая Жордана и  $\bar{D} \xrightarrow[\text{на}]{f} \bar{D}^*$ , причем отображение  $\partial D$  на  $\partial D^*$  является взаимно однозначным. Тогда  $f$  — однолистная функция в области  $D$ .

◀ Пусть  $w_0 \in D^*$  — произвольная точка. Определим, сколько раз функция  $z \mapsto f(z) - w_0$  обращается в нуль в области  $D$ . Согласно теореме о логарифмическом вычете имеем

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz, \quad (5)$$

где  $N$  — число нулей функции  $z \mapsto f(z) - w_0$  в  $D$ . Поскольку между точками границ  $\partial D$  и  $\partial D^*$  существует непрерывное и взаимно-однозначное соответствие, то в (5) можно перейти к интегрированию по кривой  $\partial D^*$ , полагая  $w = f(z)$ ,  $dw = f'(z) dz$ :

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^*} \frac{dw}{w - w_0} = 1,$$

что и требовалось доказать. ►

Рассмотрим задачи.

**5.** Разложить по степеням  $w$  функцию  $z = g(w)$ , определенную в окрестности точки  $w = 0$  уравнением Кеплера  $z - a = w \sin z$  ( $a \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ ).

◀ Здесь  $z_0 = a$ ,  $w_0 = 0$ ,  $f(z) = \frac{z-a}{\sin z}$ . По формуле Лагранжа (1) получаем:

$$z = g(w) = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (\sin^n z) \right)_{z=a} w^n. \blacktriangleright$$



6. Разложить по степеням  $w$  функцию  $e^{bg(w)}$  ( $b \neq 0$ ), где функция  $z = g(w)$  является обратной функции  $w = ze^{az}$  ( $a \neq 0$ ).

◀ Здесь  $z_0 = w_0 = 0$ ,  $f(z) = ze^{-az}$ ,  $f'(0) \neq 0$ ,  $F(z) = e^{bz}$ . Согласно формуле (2) имеем

$$e^{bg(w)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (be^{(b+an)z}) \right)_{z=0} w^n = 1 + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b+an)^{n-1}}{n!} w^n.$$

Радиус сходимости полученного степенного ряда находим по формуле Коши—Адамара:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|b+an|^{n-1}}{n!}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b+an|^{1-\frac{1}{n}}}{n} \cdot \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}} = \frac{1}{e|a|}.$$

Полагая  $b = a$ , находим:

$$F(z) = e^{az} = \frac{z}{f(z)}, \quad (F \circ \varphi)(w) = \frac{g(w)}{w}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{g(w)}{w} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} w^n, \\ g(w) &= w + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} w^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} w^{n+1}. \end{aligned}$$

7. Пусть функция  $\varphi$  аналитическая в замкнутом круге  $\bar{K}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$  и не обращается в нем в нуль. Доказать, что  $\forall w \in \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \frac{r}{M}\}$ , где  $M = \max_{z \in \partial K_r} |\varphi(z)|$  уравнение  $z - z_0 = (w - w_0)\varphi(z)$  имеет одно и только одно решение, принадлежащее кругу  $K_r$ .

◀ Запишем уравнение в виде  $w = w_0 + \frac{z - z_0}{\varphi(z)}$ . Функция  $z \mapsto f(z) = w_0 + \frac{z - z_0}{\varphi(z)}$  аналитическая в круге  $\bar{K}_r$ ,  $f'(z) \neq 0$  и  $f(z_0) = w_0$ . Согласно рассмотренному выше случаю а), уравнение  $w = f(z) \forall w \in \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \frac{r}{M}\}$ ,  $\frac{r}{M} = \min |f(z) - w_0|$ , имеет единственное решение  $g(w)$ , принадлежащее кругу  $K_r$ . По формуле Лагранжа (1) его можно представить суммой ряда

$$g(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (\varphi(z))^n \right)_{z=z_0} (w - w_0)^n. \blacktriangleright$$

## § 3. Экстремальные свойства модуля аналитической функции

### 3.1. Принцип максимума модуля аналитической функции.

**Теорема 1** (первая формулировка принципа максимума модуля). Если функция  $f$  аналитическая в области  $D$  и ее модуль  $|f|$  достигает локального максимума в некоторой точке  $z_0 \in D$ , то  $f \equiv \text{const}$  в области  $D$ .

◀ Применим метод доказательства от противного. Пусть  $f \not\equiv \text{const}$  и  $f(z_0) = w_0$ . Пусть, далее,  $D \xrightarrow{\varphi} D^*$ . Тогда  $w_0 \in D^*$  и  $D^*$  является областью. Следовательно, существует круг  $K_\mu = \{w \in \mathbb{C} :$

$|w - w_0| < \mu\} \subset D^*$ , и в нем, очевидно, найдется такая точка  $w_1$ , что  $|w_1| > |w_0|$ . Тогда в некоторой окрестности точки  $z_0$  найдется такая точка  $z_1$ , что  $f(z_1) = w_1$  и  $|f(z_1)| > |f(z_0)|$ . Это неравенство противоречит тому, что  $|f(z_0)|$  является локальным максимумом функции  $f$ . Источник противоречия — в предположении, что  $f \not\equiv \text{const}$ . Следовательно,  $\forall z \in D \ f(z) \equiv \text{const}$ . ▶



**Следствие** (вторая формулировка принципа максимума модуля). Если функция  $f$  аналитическая в области  $D$  и непрерывна в замыкании  $\bar{D}$ , то  $|f|$  достигает максимума только на границе  $\partial D$  области  $D$ .

◀ Справедливость утверждения следует из первой формулировки и свойств функций, непрерывных на компакте. ▶

Утверждение, аналогичное теореме 1, для минимума модуля  $|f|$  несправедливо. Пусть, например,  $f(z) = z$ ,  $D_f = K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . Функция  $f$  аналитическая и  $f \not\equiv \text{const}$ , однако минимум  $|f(z)| = 0$  достигается во внутренней точке области  $D_f$   $z = 0$ . Здесь, видимо, дело состоит в том, что функция  $f$  обращается в нуль в области аналитичности. Поэтому справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** Если  $f \in A(D)$  и  $\forall z \in D$   $f(z) \neq 0$ , то  $|f|$  может достигать в  $D$  локального минимума лишь в том случае, когда  $f \equiv \text{const}$ .

◀ Для доказательства достаточно применить теорему 1 к функции  $g = \frac{1}{f}$ , аналитической в  $D$ , так как  $\forall z \in D$   $f(z) \neq 0$ . ▶

### 3.2. Лемма Шварца.

Следующее утверждение принадлежит Шварцу.

**Лемма** (Шварца). Пусть функция  $f$  аналитическая в круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  и удовлетворяет в нем условиям  $f(0) = 0$ ,  $|f(z)| \leq 1$ . Тогда  $\forall z \in K$  выполняются неравенства

$$|f(z)| \leq |z|, \quad |f'(0)| \leq 1. \quad (1)$$

При этом, если выполняется равенство  $|f'(0)| = 1$  или равенство  $|f(z)| = |z|$  хотя бы в одной точке  $z \neq 0$ , то  $\forall z \in K$   $|f(z)| = |z|$ , т. е. функция  $f$  будет иметь вид

$$f(z) = e^{i\alpha} z, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

◀ Рассмотрим функцию  $z \mapsto \varphi(z) = \frac{f(z)}{z}$ . Из условия  $f(0) = 0$  следует, что  $\varphi \in A(K)$  и  $\varphi(0) = f'(0)$  (устраняемую особую точку считаем устраненной). Исследуем функцию  $\varphi$  в круге  $K_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$ , где  $\rho < 1$ . По принципу максимума модуля  $|\varphi|$  достигает максимума на кривой  $\gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$ . Поскольку  $\forall z \in K$   $|f(z)| \leq 1$ , то  $\forall z \in \gamma_\rho$   $|\varphi(z)| = \frac{|f(z)|}{\rho} \leq \frac{1}{\rho}$ . Следовательно,  $\forall z \in \bar{K}_\rho$   $|\varphi(z)| \leq \frac{1}{\rho}$ . Зафиксировав точку  $z \in K$  и устремив  $\rho$  к единице, получим неравенство  $|\varphi(z)| \leq 1$  или  $|f(z)| \leq |z|$ . Очевидно, что в качестве  $z$  можно взять любую точку из круга  $K$ . Пусть, в частности,  $z = 0$ . Тогда  $|\varphi(0)| = |f'(0)| \leq 1$ . Предположим теперь, что в некоторой точке  $z_0 \in K$  выполняется равенство  $|\varphi(z_0)| = 1$ . Это означает, что  $|\varphi|$  достигает максимума в точке  $z_0$ . Следовательно, по теореме 1  $\varphi \equiv \text{const}$  и, так как  $|\varphi(z)| = 1$ ,  $z \in K$ , то  $\varphi(z) = e^{i\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . ▶

Лемма Шварца имеет простой геометрический смысл. Она утверждает, что при отображении с помощью функции  $w = f(z)$  любая точка  $z \in K$  или приближается к началу координат, или отображение представляет собой вращение вокруг начала координат. Другими словами, образ любой окружности  $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$  либо лежит внутри круга  $K'_r = \{w \in \mathbb{C} : |w| < r\}$ , либо совпадает с его границей.

Лемма Шварца имеет много обобщений. Выделим простейшее из них. Если точка  $z = 0$  является нулем функции  $f$  кратности  $\lambda$ , то, рассмотрев функцию  $z \mapsto \frac{f(z)}{z^\lambda}$ , получим неравенства

$$|f(z)| \leq |z|^\lambda \quad \forall z \in K \quad \text{и} \quad \left| \frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!} \right| \leq 1,$$

причем равенства в них возможны лишь в случае, когда  $f(z) = e^{i\lambda\alpha} z^\lambda$ .

Рассмотрим задачи.

**8.** Доказать, что если  $P(z)$  — многочлен степени  $n$ , то линии уровня его модуля  $|P(z)| = R$  (лемнискаты) могут распадаться не более чем на  $n$  связных компонент.

◀ Любая связная компонента представляет собой границу некоторой области  $D$  и модуль аналитической в ней функции  $P$  на ее границе постоянный. Отсюда, согласно принципу максимума модуля, в  $D$  найдется хотя бы одна точка  $z$ , в которой  $P(z) = 0$ . В противном случае  $P(z) \equiv \text{const}$  в  $D$ . ▶

**9.** Если функция  $f \neq \text{const}$  аналитическая в круге  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ , то функций  $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$  строго возрастает на интервале  $(0, R)$ .

◀ Утверждение является прямым следствием из принципа максимума модуля. ▶

**10.** Доказать, что если функция  $f \neq \text{const}$  аналитическая в области  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ , имеет конечный предел при  $|z| \rightarrow \infty$ , а  $|f|$  — непрерывная функция в  $\overline{D}$ , то  $|f|$  достигает максимума на окружности  $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ , а функция  $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$  строго убывает на интервале  $(R, +\infty)$ .

◀ Функция  $\zeta \mapsto \varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$  аналитическая в круге  $K_{1/R} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < \frac{1}{R}\}$  (устраняемую особую точку  $\zeta = 0$  считаем устраненной) и ее модуль непрерывен в замкнутом круге  $\overline{K}_{1/R}$ . Согласно принципу максимума,  $|\varphi|$  достигает максимума на окружности  $\partial K_{1/R}$ , а  $|f|$  — на окружности  $\gamma_R$ . Из задачи 9 следует, что  $\sup_{|\zeta|=\rho} |\varphi(\zeta)|$  строго возрастает на интервале  $(0, \frac{1}{R})$ .

Следовательно,  $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$  строго убывает на интервале  $(R, +\infty)$ . ▶

**11.** Пусть  $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ . Доказать, что если  $P(z) \neq z^n$ , то хотя бы в одной точке окружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  выполняется неравенство  $|P(z)| > 1$ .

◀ Функция  $z^{-n}P(z)$  удовлетворяет условиям задачи 10 и, следовательно, ее модуль достигает максимума в  $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$  на окружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Пусть  $M = \max_{|z|=1} |z^{-n}P(z)| \leq 1$ . Тогда, согласно утверждению задачи 10, либо  $|z^{-n}P(z)| \equiv 1$ , т.е.  $P(z) \equiv z^n$ , либо  $|z^{-n}P(z)| < 1 \quad \forall z \in D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ . Последнее неравенство невозможно. ▶

**12.** Пусть  $P(z)$  — многочлен степени  $n$ , а  $M(r) = \max_{|z|=r} |P(z)|$ . Доказать, что при  $0 < r_1 < r_2$  выполняется неравенство

$$\frac{M(r_1)}{r_1^n} \geq \frac{M(r_2)}{r_2^n},$$

причем знак равенства хотя бы для одной пары значений  $r_1$  и  $r_2$  возможен только для многочлена вида  $P(z) = az^n$ .

◀ Функция  $z \mapsto \frac{P(z)}{z^n}$  аналитическая в области  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0\}$  и, таким образом, удовлетворяет условиям задачи 10 при любом  $R > 0$ . ▶

**13.** Пусть  $P(z)$  — многочлен степени  $n$ , для которого на отрезке  $[-1, 1]$  справедлива оценка  $|P(z)| \leq M$ . Доказать, что в любой точке  $z$ , лежащей вне этого отрезка, выполняется неравенство  $|P(z)| \leq M(a+b)^n$ , где  $a$  и  $b$  — полуоси эллипса, с фокусами в точках  $-1, 1$ , проходящего через точку  $z$ .

◀ Функция  $w \mapsto \varphi(w) = w^{-n}P\left(\frac{1}{2}(w+w^{-1})\right)$  аналитическая на множестве  $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| \geq 1\}$ . Поскольку образом окружности  $\gamma = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$  при отображении  $z = \frac{1}{2}(w+w^{-1})$  является отрезок  $[-1, 1]$ , то, принимая во внимание условия задачи, получаем, что

$$\forall w \in \gamma \quad |\varphi(w)| \leq M.$$

Согласно решению задачи 10, последнее неравенство справедливо и при  $|w| \geq 1$ :

$$\forall w \in D \quad \left| P\left(\frac{1}{2}(w+w^{-1})\right) \right| \leq M|w|^n.$$

Пусть  $z_0$  — любая точка, не принадлежащая отрезку  $[-1, 1]$  и  $a, b$  — полуоси эллипса с фокусами в точках  $\pm 1$ , который проходит через точку  $z_0$ . Его образом при отображении  $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$  ( $w(\infty) = \infty$ ) является окружность  $\gamma' = \{w \in \mathbb{C} : |w| = a+b\}$ . Окончательно имеем

$$|P(z_0)| = \left| P\left(\frac{1}{2}(w_0+w_0^{-1})\right) \right| \leq M|w_0|^n = M(a+b)^n. \quad \blacktriangleright$$

**14.** Пусть функция  $f$  — аналитическая в правой полуплоскости  $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$ , при  $\operatorname{Re} z = 0$  удовлетворяет неравенству  $|f(z)| \leq M$  и обращается в нуль в точках  $z_1, z_2, \dots, z_n$  ( $\operatorname{Re} z_k > 0$ ;  $k = \overline{1, n}$ ). Доказать неравенство

$$|f(z)| \leq M \frac{|z - z_1| |z - z_2| \dots |z - z_n|}{|z + \bar{z}_1| |z + \bar{z}_2| \dots |z + \bar{z}_n|} \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

◀ Функция  $z \mapsto \varphi_k(z) = \frac{z - z_k}{z + \bar{z}_k}$  устанавливает конформный изоморфизм полуплоскости  $G' = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$  и единичного круга  $K = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ , т. е.  $|\varphi_k(iy)| = 1$  и  $\varphi_k(z_k) = 0$ . Таким образом, функция  $F$ , где  $F(z) = f(z) \left( \prod_{k=1}^n \varphi_k(z) \right)^{-1}$ , является аналитической в полуплоскости  $G'$  (ее устранимые особые точки  $z_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) считаем устраненными) и  $|F(iy)| \leq M$ , следовательно, согласно принципу максимума модуля,  $|F(z)| \leq M \quad \forall z \in G$ , т. е.

$$|f(z)| \leq M \prod_{k=1}^n |\varphi_k(z)| \quad \forall z \in G'. \blacktriangleright$$

**15.** Пусть функция  $f$  аналитическая в круге  $\bar{K}_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$  и  $|f(z)| \leq M$ . Доказать, что  $\forall z \in K_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$

$$\left| \frac{f(z) - f(0)}{M^2 - \bar{f}(0)f(z)} \right| \leq \frac{|z|}{RM}.$$

◀ Функция  $\zeta \mapsto \varphi(\zeta) = \frac{f(R\zeta)}{M}$  аналитическая в круге  $\bar{K} = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \leq 1\}$  и  $|\varphi(\zeta)| \leq 1$ . Принимая во внимание общий вид автоморфизма единичного круга (формула (5), п. 1.3, гл. 3), устанавливаем, что функция

$$\zeta \mapsto F(\zeta) = \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(0)}{1 - \bar{\varphi}(0)\varphi(\zeta)}$$

удовлетворяет условиям леммы Шварца и, таким образом,

$$\left| \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(0)}{1 - \bar{\varphi}(0)\varphi(\zeta)} \right| \leq |\zeta| \quad \text{при} \quad |\zeta| \leq 1.$$

Полагая здесь  $\zeta = \frac{z}{R}$  и принимая во внимание, что  $\varphi\left(\frac{z}{R}\right) = \frac{f(z)}{M}$ , получаем требуемое неравенство. ▶

**16.** Пусть  $f \in A(\bar{K})$ ,  $\bar{K} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$  и  $\forall z \in \bar{K} \quad |f(z)| \leq M$ . Доказать, что

$$M|f'(0)| \leq M^2 - |f(0)|^2.$$

◀ Функция  $z \mapsto F(z) = \frac{M(f(z) - f(0))}{M^2 - \bar{f}(0)f(z)}$  удовлетворяет условиям леммы Шварца, следовательно,  $|F'(0)| \leq 1$ . В равенстве

$$\frac{M(f(z) - f(0))}{z} = \frac{F(z)}{z} (M^2 - \bar{f}(0)f(z))$$

перейдем к пределу при  $z \rightarrow 0$ . Получим:

$$Mf'(0) = F'(0)(M^2 - |f(0)|^2).$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство  $|F'(0)| \leq 1$ , получим доказываемое неравенство. ▶

**17.** Доказать, что если  $Q(z)$  — многочлен степени  $n$  и при  $z = x \in [-1, 1]$  выполняется неравенство  $|xQ(x)| \leq M$ , то  $\forall z \in K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \quad |Q(z)| \leq M(1 + \sqrt{2})^{n+1}$ .

◀ Пусть  $P(z) = zQ(z)$ ,  $E$  — эллипс с полуосями  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = 1$  и фокусами  $\pm 1$ . Тогда (см. задачу 13)  $\forall z \in E$  выполняется неравенство

$$|P(z)| \leq M(1 + \sqrt{2})^{n+1}.$$

Применив лемму Шварца к функции  $z \mapsto \frac{P(z)}{M(1 + \sqrt{2})^{n+1}}$ , получим оценку

$$|P(z)| = |zQ(z)| \leq M(1 + \sqrt{2})^{n+1} |z|. \blacktriangleright$$

## § 4. Принцип компактности.

### Функционалы

### на семействах аналитических функций

#### 4.1. Равномерно ограниченные и равностепенно непрерывные семейства функций.

С равномерной непрерывностью функции  $f$  свяжем новое понятие — равностепенную непрерывность семейства. Это понятие появляется в результате следующих рассуждений.

Функцию  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  можно одновременно рассматривать и как функцию  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , если считать  $z = x + iy = (x, y)$ . Пусть  $Z = D_f$ ,  $Z_1, Z_2$  — первая и вторая проекции множества  $Z$ , а  $Z_1(x), Z_2(y)$  — его сечения посредством  $x$  и  $y$  (см. п. 1.7, гл. 1). Поставим в соответствие функции  $f$  два семейства функций из  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$(f_{1,x})_{x \in Z_1}, \quad (f_{2,y})_{y \in Z_2},$$

где

$$\begin{aligned} D_{f_{1,x}} &= Z_1(x), & D_{f_{2,y}} &= Z_2(y), \\ f_{1,x}(y) &= f(x, y) \quad \forall y \in Z_1(x), & f_{2,y}(x) &= f(x, y) \quad \forall x \in Z_2(y). \end{aligned} \quad (I)$$

Обычно говорят, что функция  $f_{1,x}$  получается из  $f$  фиксированием первой переменной  $x$ , а функция  $f_{2,y}$  — фиксированием второй переменной  $y$ . Из определений следует, что если функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  равномерно непрерывна, то все функции семейств  $(f_{1,x})_{x \in Z_1}, (f_{2,y})_{y \in Z_2}$  равномерно непрерывны. Это свойство проще формулировать следующим образом: равномерная непрерывность функции по совокупности переменных влечет за собой равномерную непрерывность по каждой из них в отдельности. Однако существуют разрывные по совокупности переменных функции, равномерно непрерывные по каждой из них в отдельности, о чем свидетельствуют следующие примеры.

**Пример 1.** Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } |x| \leq 1, |y| \leq 1 \text{ и } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Тогда  $Z = [-1, 1]^2$ ,  $Z_1 = Z_2 = Z_1(x) = Z_2(y) = [-1, 1] \quad \forall (x \in [-1, 1], y \in [-1, 1])$ . Если  $x \neq 0$ , то функция  $f_{1,x}$  является рациональной на сегменте  $[-1, 1]$ . По теореме Кантора она равномерно непрерывна. Этим же свойством обладает и функция  $f_{2,y} \quad \forall y \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ . Если  $x = 0$  или  $y = 0$ , то функции  $f_{1,0}$  и  $f_{2,0}$  равны нулю и являются равномерно непрерывными. Таким образом, функция  $f$  равномерно непрерывна по каждой переменной в отдельности. По совокупности переменных функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  является разрывной в нулевой точке. Действительно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{5},$$

следовательно, множество  $E_f(0)$  частичных пределов функции  $f$  в нулевой точке содержит более одного элемента и  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$  не существует.

**Пример 2.** Рассмотрим произвольную функцию  $f$ , заданную на единичной окружности  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

Тогда  $G_1 = G_2 = [-1, 1]$ ,  $G_1(x) = \{-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\}$ ,  $G_2(y) = \{-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}\}$ . Множество  $G_1(x)$  при каждом значении  $x \in G_1$  содержит не более двух точек. Этим же свойством обладает множество  $G_2(y) \quad \forall y \in G_2$ . Поэтому семейства функций  $(f_{1,x})$  и  $(f_{2,y})$  состоят из равномерно непрерывных функций. Поскольку функция  $f$  — произвольная, то она может быть разрывной в каждой точке окружности  $\gamma$ .

Поиски условий, налагаемых на семейства  $(f_{1,x})_{x \in Z_1}$  и  $(f_{2,y})_{y \in Z_2}$ , обеспечивающих равномерную непрерывность функции  $f$  по совокупности переменных, приводят к понятию равностепенной непрерывности.

**Определение 1.** Пусть  $\mathcal{M}$  — множество функций  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Оно называется *равностепенно непрерывным*, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ :

$$\forall (f \in \mathcal{M}, z' \in D_f, z'' \in D_f) (|z' - z''| < \delta) \Rightarrow |f(z') - f(z'')| < \varepsilon.$$

Если  $A$  — множество, то семейство функций  $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$  считается *равностепенно непрерывным* в случае, когда множество  $\mathcal{M} = \{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$  — *равностепенно непрерывное*. В частности, можно говорить о *равностепенной непрерывности* последовательности  $(f_n)$  функций  $f_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Термин “равностепенная непрерывность” связан с тем, что  $\delta$  в определении выбирается лишь по  $\varepsilon$  и может быть использовано для обоснования свойства, требуемого в определении равномерной непрерывности любой функции  $f \in \mathcal{M}$ .

**Определение 2.** Множество  $\mathcal{M}$  функций  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , заданных в некоторой области  $D$ , называется *равномерно ограниченным* внутри  $D$ , если для любого компакта  $K \Subset D$  существует такая постоянная  $M = M(K)$ , что  $\forall (f \in \mathcal{M}, z \in K) |f(z)| \leq M$ .

Семейство функций  $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$  считается *равномерно ограниченным* внутри  $D$  в случае, когда множество  $\mathcal{M} = \{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$  является *равномерно ограниченным* внутри  $D$ .

**Определение 3.** Множество  $\mathcal{M}$  функций  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , заданных в области  $D$ , называется *равностепенно непрерывным* внутри  $D$ , если  $\forall \varepsilon > 0$  и для любого компакта  $K \Subset D \exists \delta = \delta(\varepsilon, K)$ :  $\forall (f \in \mathcal{M}, z' \in K, z'' \in K) (|z' - z''| < \delta) \Rightarrow |f(z') - f(z'')| < \varepsilon$ .

Семейство функций  $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$  считается *равностепенно непрерывным* внутри области  $D$ , если таковым является множество  $\mathcal{M} = \{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$ .

**Теорема.** Если множество  $\mathcal{M}$  функций  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , аналитических в области  $D$ , *равномерно ограничено* внутри  $D$ , то оно *равностепенно непрерывно* внутри  $D$ .

◀ Пусть  $K \Subset D$ . Обозначим через  $2\rho$  расстояние между множествами  $\overline{K}$  и  $\partial D$ , т. е.

$$2\rho = \inf_{z \in \overline{K}, \zeta \in \partial D} \rho(z, \zeta).$$

Очевидно, что  $\rho > 0$ , так как  $\overline{K}$  и  $\partial D$  — замкнутые непересекающиеся множества. Рассмотрим множество

$$K^{(\rho)} = \bigcup_{z_0 \in K} \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\},$$

которое иногда называют  *$\rho$ -раздутием* множества  $K$ . Очевидно, что  $K^{(\rho)} \Subset D$  и, следовательно, существует такая постоянная  $M(K^{(\rho)})$ , что  $\forall (z \in K^{(\rho)}, f \in \mathcal{M}) |f(z)| \leq M$ . Пусть  $z'$  и  $z''$  — две любые точки из  $K$ , для которых  $|z' - z''| < \rho$ . Поскольку  $K_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z - z'| < \rho\} \subset K^{(\rho)}$ , то  $\forall z \in K_\rho$  выполняется неравенство  $|f(z) - f(z')| \leq 2M$ . Функция  $\zeta = \frac{1}{\rho}(z - z')$  отображает круг  $K_\rho$  на единичный круг  $K_1 = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ . Рассмотрим функцию

$$g(\zeta) = \frac{1}{2M} (f(z' - \rho\zeta) - f(z')), \quad g \in A(K_1), \quad g(0) = 0, \quad |g(\zeta)| < 1.$$

Она удовлетворяет условиям леммы Шварца, согласно которой

$$\forall \zeta \in K_1 \quad |g(\zeta)| \leq |\zeta|,$$

или

$$\frac{1}{2M} |f(z' - \rho\zeta) - f(z')| \leq |\zeta|, \quad \zeta = \frac{1}{\rho}(z - z'), \quad |f(z) - f(z')| < \frac{2M}{\rho} |z - z'| \quad \forall z \in K_\rho.$$

Выберем  $\delta = \min \left\{ \rho, \frac{\varepsilon \rho}{2M} \right\}$ . Тогда  $\forall f \in \mathcal{M} \quad |f(z'') - f(z')| < \varepsilon$ . ▶

## 4.2. Принцип компактности.

**Определение.** Множество  $\mathcal{M}$  функций  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , заданных в области  $D$ , называется *компактным* в  $D$ , если из каждой последовательности  $(f_n)$  этого множества можно выделить подпоследовательность  $(f_{n_k})$ , *равномерно сходящуюся* на любом компакте  $K \Subset D$ .

**Теорема** (признак компактности Монтеля). Если множество  $\mathcal{M}$  функций, аналитических в области  $D$ , *равномерно ограничено* внутри  $D$ , то оно *компактно* в  $D$ .

◀ 1) Докажем сначала, что если последовательность  $(f_n)$  сходится в каждой точке некоторого множества  $E \subset D$ , всюду плотного в  $D$ , то она сходится *равномерно* на каждом компакте  $K \Subset D$ .

(напомним, что множество  $Z_0 \subset Z$  называется всюду плотным в множестве  $Z$ , если каждый элемент  $z \in Z$  является точкой прикосновения множества  $Z_0$ ). Пусть  $\varepsilon > 0$  и  $K \in D$ . По теореме п. 4.1 множество функций  $\mathcal{M}$  равномерно непрерывное внутри области  $D$ , в силу чего область  $D$  можно с помощью прямых, параллельных осям координат, разбить на столь мелкие квадраты, что  $\forall (z' \in K, z'' \in K)$ , принадлежащих одному и тому же квадрату, а также  $\forall f \in \mathcal{M}$  будет выполняться неравенство

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1)$$

Множество  $K$  покрывается конечным числом таких квадратов. Пусть их количество равно  $p$ . Поскольку множество  $E$  всюду плотное в области  $D$ , то в каждом упомянутом выше квадрате найдется точка  $z_k$  ( $k = \overline{1, p}$ ). Так как последовательность функций  $(f_n)$  сходится на множестве  $E$ , то существует такое  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , что  $\forall (m > n_\varepsilon, n > n_\varepsilon, k = \overline{1, p})$  выполняется неравенство

$$|f_m(z_k) - f_n(z_k)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2)$$

Пусть  $z \in K$  — любая точка, принадлежащая  $k$ -му квадрату, в котором зафиксирована точка  $z_k \in E$ . При  $m > n_\varepsilon, n > n_\varepsilon$  имеем

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq |f_m(z) - f_m(z_k)| + |f_m(z_k) - f_n(z_k)| + |f_n(z_k) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

в силу неравенств (1) и (2). Таким образом,

$$\|f_m - f_n\| = \sup_{z \in K} |f_m(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon \quad \forall (m > n_\varepsilon, n > n_\varepsilon),$$

т. е. последовательность  $(f_n)$  равномерно фундаментальная на множестве  $K$  и  $f_n \rightrightarrows$ .

2) Теперь докажем, что из любой последовательности  $(f_n)$  функций из множества  $\mathcal{M}$  можно выделить подпоследовательность  $(f_{n_k})$ , сходящуюся в каждой точке некоторого множества  $E$ , всюду плотного в области  $D$ . В качестве  $E$  выберем множество точек  $z$  из  $K$ , у которых действительная и мнимая части рациональные,  $E = \{z_k; k \in \mathbb{N}\}$ . Рассмотрим последовательность  $(f_{n_1}(z_1))$ . Так как она ограничена, то по теореме Больцано—Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $(f_{n_{k_1}}(z_1))$ . Пусть  $f_{n_k}(z) = f_{k_1}(z)$  и рассмотрим последовательность  $(f_{k_1}(z_2))$ . Она также ограничена и из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $(f_{n_{k_1 k_2}}(z_2))$ . Пусть  $f_{n_{k_1 k_2}} = f_{k_2}$ . Из последовательности  $(f_{k_2}(z_3))$  можно извлечь сходящуюся подпоследовательность  $(f_{n_{k_1 k_2 k_3}}(z_3))$  и т. д. Аналогичное построение можно продолжить неограниченно. При этом получим последовательность последовательностей  $(f_{k_1}(z)), (f_{k_2}(z)), \dots$ . Выберем теперь диагональную последовательность  $f_{11}(z), f_{22}(z), \dots$ . Очевидно, она сходится в любой точке множества  $E$ . Действительно, если взять любую точку  $z_p \in E$ , то все члены последовательности  $(f_{nn}(z))$ , начиная с  $f_{pp}(z)$ , выбраны из последовательности  $(f_{np})$ , сходящейся в точке  $z_p$ .

Поскольку  $2) \Rightarrow 1)$ , то принцип компактности доказан. ►

#### 4.3. Функционалы, определенные на множествах функций.

**Определение 1.** Пусть  $\mathcal{M}$  — множество функций  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , определенных в области  $D$ .

Отображение  $\mathcal{M} \xrightarrow{I} \mathbb{C}$  называется функционалом.

По определению каждой функции  $f \in \mathcal{M}$  ставится в соответствие комплексное число  $I(f)$ .

**Определение 2.** Функционал  $I$  называется непрерывным на элементе  $f_0 \in \mathcal{M}$ , если для любой последовательности  $(f_n)$  функций из множества  $\mathcal{M}$ , равномерно сходящейся к функции  $f_0$  на любом компакте  $K \in D$ , выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = I(f_0).$$

Пусть, например,  $\mathcal{M}$  — множество всех функций, аналитических в области  $D$ ,  $I(f) = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}$ ,  $a \in D$  — фиксированная точка. Докажем непрерывность этого функционала. Пусть последовательность  $(f_n)$  функций из множества  $\mathcal{M}$  сходится равномерно к функции  $f_0$  на любом компакте  $K \in D$ . По теореме Вейерштрасса  $f_0 \in A(D)$ . Пусть  $K = \gamma_r = \{z \in \mathbb{C}: |z - a| = r\} \subset D$ .



Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall (n \geq n_\varepsilon, z \in \gamma_r) |f_n(z) - f_0(z)| < \varepsilon$ . Применим неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда (см. формулу (6), п. 1.7, гл. 5):

$$|I(f_n) - I(f_0)| = |I(f_n - f_0)| < \frac{\varepsilon}{r^p}.$$

Это и означает непрерывность функционала  $I$ .

**Определение 3.** Компактное множество функций  $\mathcal{M}$  называется компактным в себе, если предел любой последовательности  $(f_n)$  функций из  $\mathcal{M}$ , равномерно сходящейся на любом компакте  $K \Subset D$ , принадлежит множеству  $\mathcal{M}$ .

Таким образом, множество  $\mathcal{M}$  функций  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  называется компактным в себе, если из любой последовательности  $(f_n)$  функций из  $\mathcal{M}$  можно выделить подпоследовательность  $(f_{n_k})$ , равномерно сходящуюся на любом компакте  $K \Subset D$  к некоторой функции из  $\mathcal{M}$ .

Примером компактного в себе множества функций является множество аналитических в области  $D$  функций, равномерно ограниченных в  $D$ .

**Теорема.** Если функционал  $I$  непрерывный на компактном в себе множестве  $\mathcal{M}$  функций  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , то его модуль  $|I(f)|$  достигает своей точной верхней грани, т.е. существует такая функция  $f_0 \in \mathcal{M}$ , что  $\forall f \in \mathcal{M} |I(f)| \leq |I(f_0)|$ .

◀ Пусть  $\alpha = \sup_{f \in \mathcal{M}} |I(f)|$ ,  $(\varepsilon_n)$  — бесконечно малая последовательность положительных чисел.

По свойству точной верхней грани  $\forall n \in \mathbb{N} \exists f_n \in \mathcal{M}$ :

$$\alpha - \varepsilon_n < |I(f_n)| \leq \alpha,$$

откуда  $\lim_{n \rightarrow \infty} |I(f_n)| = \alpha$ . Таким образом, существует последовательность  $(f_n)$  функций из множества  $\mathcal{M} : \lim_{n \rightarrow \infty} |I(f_n)| = \alpha$ .

Поскольку множество  $\mathcal{M}$  компактно в себе, то существует подпоследовательность  $(f_{n_k})$ , равномерно сходящаяся на любом множестве  $K \Subset D$  к некоторой функции  $f_0 \in \mathcal{M}$ . В силу непрерывности функционала  $I$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} |I(f_{n_k})| = |I(f_0)| = \alpha$ . Отсюда следует, что  $\alpha < \infty$  и  $\forall f \in \mathcal{M} |I(f)| \leq |I(f_0)|$ . ▶

#### 4.4. Теорема Гурвица.

Следующее утверждение принадлежит А. Гурвицу (1859—1919).

**Теорема (Гурвица).** Пусть последовательность  $(f_n)$  функций, аналитических в области  $D$ , равномерно сходится к функции  $f \neq \text{const}$  на любом компакте  $K \Subset D$ . Тогда, если  $f(z_0) = 0$ ,  $z_0 \in D$ , то в любом круге  $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset D$  все функции  $f_n$ , начиная с некоторой, также обращаются в нуль.

◀ По теореме Вейерштрасса  $f \in A(D)$ . Так как  $f \neq 0$ , то существует проколота окрестность точки  $z_0$   $O_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \rho\} \subset D$ , в которой  $f \neq 0$  (нули аналитических функций изолированы).

Пусть  $\mu = \min_{z \in \gamma_\rho} |f(z)|$ ,  $\mu > 0$ , где  $\gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$ . В силу того, что  $f_n \rightrightarrows f$  в области  $D$ , существует  $n_\mu \in \mathbb{N} : \forall (n \geq n_\mu, z \in \gamma_\rho) |f_n(z) - f(z)| < \mu$  и  $\forall z \in \gamma_\rho f_n = f + (f_n - f)$ . По теореме Руше число нулей у функций  $f$  и  $f_n$  внутри  $\gamma_\rho$  одинаково, но  $f$  имеет по меньшей мере один нуль, следовательно, все функции  $f_n$  при  $n \geq n_\mu$  также имеют нули внутри  $\gamma_\rho$ . ▶

**Следствие.** Если последовательность функций  $(f_n)$ , аналитических и однолистных в области  $D$ , сходится равномерно на любом компакте  $K \Subset D$ , то предельная функция либо однолистка, либо постоянна.

◀ Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  и  $f \neq \text{const}$ . Допустим, что существуют две различные точки  $z_1 \in D$ ,  $z_2 \in D$  и  $f(z_1) = f(z_2)$ . Рассмотрим последовательность функций  $(g_n)$ , где  $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2)$  и круг  $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| < r\}$ ,  $r \leq |z_1 - z_2|$ . Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(z) = f(z) - f(z_2) = g(z), \quad g(z_1) = 0.$$

Отсюда, согласно теореме Гурвица, получаем, что все функции  $g_n$ , начиная с некоторой, также обращаются в нуль в круге  $K_r$ . Это противоречит свойству однолистности функций  $f_n$ . ▶

## § 5. Существование и единственность конформного отображения

### 5.1. Конформные изоморфизмы и автоморфизмы.

Конформное отображение  $f$  области  $D_1$  на  $D_2$  назовем *конформным изоморфизмом*  $D_1$  на  $D_2$ , а области  $D_1$  и  $D_2$  — *конформно-изоморфными*. Конформный изоморфизм области на себя называется *конформным автоморфизмом*. Совокупность автоморфизмов произвольной области  $D$  образует группу, которая называется *группой автоморфизмов* этой области и обозначается символом  $\Lambda(D)$ . В качестве групповой операции берут композицию  $(\varphi_2 \circ \varphi_1)(z) = \varphi_2(\varphi_1(z))$ , единицей является тождественное отображение  $e: z \rightarrow z$ , а обратным элементом к  $\varphi$  является обратное отображение  $z = \varphi^{-1}(w)$ .

**Замечание.** Слово “конформный” в выражении “конформный изоморфизм (автоморфизм)” часто будем для простоты опускать.

**Теорема.** Если  $D_1 \xrightarrow[\text{на}]{f_0} D_2$  — какой-нибудь фиксированный изоморфизм, то совокупность всех изоморфизмов  $D_1$  на  $D_2$  определяется формулой

$$f = \varphi \circ f_0,$$

где  $\varphi$  — произвольный автоморфизм области  $D_2$ .

◀ 1) Очевидно, что  $\forall \varphi \in \Lambda(D_2)$  композиция  $\varphi \circ f_0$  является изоморфизмом  $D_1$  на  $D_2$ .

2) Пусть  $f$  — любой изоморфизм  $D_1$  на  $D_2$ . Рассмотрим композицию  $\varphi = f \circ f_0^{-1}$ . Очевидно, что  $\varphi \in \Lambda(D_2)$ ,  $f = \varphi \circ f_0$ . ▶

### 5.2. Примеры автоморфизмов.

1)  $D = \bar{\mathbb{C}}$ . Пусть  $\varphi$  — любой автоморфизм  $\bar{\mathbb{C}}$ . Тогда существует единственная точка  $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ , такая, что  $\varphi(z_0) = \infty$ . Поэтому функция  $z \mapsto \varphi(z)$ , аналитическая на множестве  $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$ , в точке  $z_0$  имеет полюс первого порядка (полюса выше первого порядка не может быть, поскольку функция  $\varphi$  должна быть однолистной). Поэтому по теореме Лиувилля имеем

$$\varphi(z) = \frac{A}{z - z_0} + B.$$

при  $z_0 \neq \infty$  и  $\varphi(z) = Az + B$  при  $z_0 = \infty$ . Таким образом, совокупность всех дробно-линейных отображений образует группу автоморфизмов  $\bar{\mathbb{C}}$ .

2)  $D = \mathbb{C}$ . Рассуждая аналогично, получим, что группу  $\Lambda(\mathbb{C})$  образует все множество целых линейных функций  $\varphi(z) = Az + B$ .

3)  $D = K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . Пусть  $\varphi$  — произвольный автоморфизм единичного круга  $K$  и пусть  $\varphi(0) = w_0$ . Построим дробно-линейный автоморфизм  $\lambda$  круга  $K$ :

$$\lambda(w) = \frac{w - w_0}{1 - \bar{w}_0 w}, \quad \lambda(w_0) = 0.$$

Рассмотрим композицию  $f = \lambda \circ \varphi$ . Очевидно,  $|f(z)| < 1 \forall z \in K$ ,  $f(0) = 0$ . Следовательно,  $f$  удовлетворяет условиям леммы Шварца и  $\forall z \in K$

$$|f(z)| \leq |z|. \quad (1)$$

Рассмотрим обратное отображение  $f^{-1}(w) = z$ . Оно также удовлетворяет условиям леммы Шварца и, таким образом,  $|f^{-1}(w)| \leq |w|$ , или

$$|z| \leq |f(z)| \quad \forall z \in K. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем равенство  $|f(z)| = |z|$ , т.е.  $f(z) = e^{i\alpha} z$  — простейшая линейная функция, а  $\varphi = \lambda^{-1} \circ f$  — дробно-линейная функция. Следовательно, любой автоморфизм круга  $K$  является дробно-линейным и, таким образом, имеет вид (формула (5), п. 1.3, гл. 3):

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad |a| < 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha = \arg \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=a}$$



Получили, что автоморфизм единичного круга  $K$  зависит от трех действительных параметров: двух координат точки  $a$  и  $\alpha$ .

Покажем теперь, что, подбирая эти параметры, можно найти один и только один автоморфизм  $\lambda \in \Lambda(K)$ , удовлетворяющий следующим условиям нормировки:

$$\lambda(a) = b, \quad \arg \lambda'(a) = \alpha, \quad (3)$$

где  $a$  и  $b$  — любые фиксированные точки из  $K$ , а  $\alpha$  — любое действительное число.

Действительно, построим два автоморфизма круга  $K$

$$\zeta = \mu(z) = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad \zeta = \nu(w) = \frac{w - b}{1 - \bar{b}w}$$

и рассмотрим автоморфизм  $\lambda = \nu^{-1} \circ \mu$ . Имеем

$$\lambda(a) = b, \quad \lambda'(z) = \frac{\mu'(z)}{\nu'(\zeta)}, \quad \arg \lambda'(a) = \arg \mu'(a) - \arg \nu'(b) = \alpha - 0 = \alpha.$$

Таким образом, мы построили автоморфизм единичного круга  $\lambda = \nu^{-1} \circ \mu$ , удовлетворяющего условиям (3). Рассмотрим композицию

$$f = \nu \circ \lambda_1 \circ \mu^{-1},$$

где  $\lambda_1$  — другой автоморфизм круга  $K$ , удовлетворяющий тем же условиям. Очевидно,  $f(0) = 0$ ,  $\arg f'(0) = \arg \nu'(b) + \arg \lambda_1'(a) - \arg \mu'(a) = 0 + \alpha - \alpha = 0$ . Следовательно,  $\lambda_1(0) = 0$ ,  $\arg \lambda_1'(0) = 0$  и по лемме Шварца  $f = e$  — тождественное отображение, т. е.

$$e = \nu \circ \lambda_1 \circ \mu^{-1} \Rightarrow \lambda_1 = \nu^{-1} \circ \mu = \lambda.$$

### 5.3. Существование и единственность изоморфизмов областей, изоморфных единичному кругу.

Отметим следующее: поскольку группа автоморфизмов единичного круга зависит от трех действительных параметров, то и группа автоморфизмов любой области  $D$ , изоморфной единичному кругу, также зависит от трех действительных параметров.

Следующая теорема устанавливает существование и единственность изоморфизмов областей, изоморфных единичному кругу.

**Теорема.** Если области  $D_1$  и  $D_2$  изоморфны единичному кругу  $K$ , то совокупность изоморфизмов  $D_1$  на  $D_2$  зависит от трех действительных параметров. В частности, существует одно и только одно отображение  $D_1 \xrightarrow{f} D_2$ , нормированное условиями

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \theta, \quad (1)$$

где  $z_0 \in D_1$ ,  $w_0 \in D_2$  — произвольные точки,  $\theta \in \mathbb{R}$  — произвольное число.

◀ Пусть  $D_1 \xrightarrow{f_1} K$ ,  $D_2 \xrightarrow{f_2} K$ . Тогда отображение  $f_0 = f_2^{-1} \circ f_1$  является конформным изоморфизмом  $D_1$  на  $D_2$ . По теореме п. 5.1 совокупность всех отображений  $D_1$  на  $D_2$  определяется формулой

$$f = \varphi \circ f_0,$$

где  $\varphi$  — произвольный автоморфизм области  $D_2$ . Поскольку группа  $\Lambda(D_2)$  автоморфизмов области  $D_2$  зависит от трех действительных параметров, то и совокупность конформных отображений  $D_1$  на  $D_2$  также зависит от трех действительных параметров. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Пусть

$$f_1(z_0) = a, \quad \arg f_1'(z_0) = \theta_1, \quad f_2(w_0) = b, \quad \arg f_2'(w_0) = \theta_2, \quad (2)$$

а  $\lambda$  — автоморфизм единичного круга  $K$  с нормировкой

$$\lambda(a) = b, \quad \arg \lambda'(a) = \theta + \theta_2 - \theta_1, \quad (3)$$

(такой автоморфизм, как мы уже знаем, определяется единственным образом).

Рассмотрим следующий изоморфизм  $D_1$  на  $D_2$ :

$$f = f_2^{-1} \circ \lambda \circ f_1.$$

Имеем

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = -\arg f'_2(w_0) + \arg \lambda'(a) + \arg f'_1(z_0) = -\theta_2 + \theta + \theta_2 - \theta_1 + \theta_1 = \theta.$$

Таким образом, доказано, что существует изоморфизм  $D_1$  на  $D_2$ , удовлетворяющий условиям нормировки (1). Теперь докажем единственность такого изоморфизма.

Пусть существует изоморфизм  $D_1 \xrightarrow{g} D_2$ , удовлетворяющий условиям (1). Тогда

$$\varphi = f \circ g^{-1} \in \Lambda(D_2), \quad \varphi(w_0) = w_0, \quad \arg \varphi'(w_0) = \arg f'(z_0) - \arg g'(z_0) = 0.$$

Рассмотрим автоморфизм единичного круга  $K \mu = f_2 \circ \varphi \circ f_2^{-1}$ . Имеем

$$\mu(b) = b, \quad \arg \mu'(b) = \arg \varphi'(w_0) + \arg f'_2(w_0) - \arg f'_2(w_0) = 0.$$

Отсюда следует, что  $\mu = e$  и, следовательно,  $\varphi = e$ , т. е.  $f \circ g^{-1} = e$ , или  $g = f$ . ►

#### 5.4. Теорема существования.

Теперь естественно возникает вопрос: какие области конформно изоморфны единичному кругу, а значит и конформно изоморфны друг другу? Ответ на поставленный вопрос содержится в следующей теореме.

**Теорема (Римана).** *Любая односвязная область, граница которой содержит более одной точки, конформно изоморфна единичному кругу  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .*

**Замечание 1.** Ограничение, наложенное на границу области, существенное. Расширенную комплексную плоскость нельзя конформно отобразить на круг, плоскость  $\bar{\mathbb{C}}$  даже не гомеоморфна кругу  $K$  (сфера не гомеоморфна кругу). Если взять  $\bar{\mathbb{C}}$  с выколотой точкой, то можно дробно-линейно отобразить ее на  $\mathbb{C}$ , но  $\mathbb{C}$  отобразить конформно на круг  $K$  нельзя. Действительно, если бы отображающая функция существовала, то она была бы целой и ограниченной по модулю единицей, а такая функция по теореме Лиувилля тождественно равна постоянной.

**Замечание 2.** Если граница односвязной области содержит более одной точки, то она обязательно будет содержать бесконечное множество точек, поскольку она связная.

◀ 1) Покажем, что в области  $D$  существует по крайней мере одна аналитическая однолистная функция, ограниченная по модулю единицей. Пусть  $a \in \partial D$ ,  $b \in \partial D$  и  $a \neq b$ . Рассмотрим полную аналитическую функцию  $z \mapsto \varphi(z) = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$ , допускающую выделение в области  $D$  двух однозначных ветвей  $z \mapsto \varphi_1(z)$  и  $z \mapsto \varphi_2(z)$ , так как  $\forall z \in D \quad \frac{z-a}{z-b} \neq \infty$ . В каждой точке  $z \in D$  их значения отличаются знаком. Покажем, что каждая из этих функций однолистка в  $D$ . Допустим, что это не так. Пусть  $\varphi_k(z_1) = \varphi_k(z_2)$  ( $k = 1, 2$ ). Тогда  $\varphi_k^2(z_1) = \varphi_k^2(z_2)$ , что эквивалентно равенству

$$\frac{z_1 - a}{z_1 - b} = \frac{z_2 - a}{z_2 - b}. \quad (1)$$

Отсюда, в силу однолистности дробно-линейной функции, получаем равенство  $z_1 = z_2$ .

Пусть  $D \xrightarrow{\varphi_1} D_1$ ,  $D \xrightarrow{\varphi_2} D_2$ . Покажем, что  $D_1$  и  $D_2$  не имеют общих точек. Предполо-

жим, что  $D_1$  и  $D_2$  имеют общие точки. Это означает, что в  $D$  имеется пара точек  $z_1$  и  $z_2$ , для которых  $\varphi_1(z_1) = \varphi_2(z_2)$ . Из этого равенства следует (1), а из (1) — равенство  $z_2 = z_1$ , т. е.  $\varphi_1(z_1) = \varphi_2(z_1)$ . Принимая во внимание, что  $\varphi_1(z_1) = -\varphi_2(z_1)$ , получаем равенства  $\varphi_k(z_1) = 0$  ( $k = 1, 2$ ), которые невозможны, т. к.  $\forall z \in D \quad \varphi_k(z) \neq 0$ .

Пусть круг  $K_\rho = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \rho\} \subset D_2$  такой, что функция  $\varphi_1$  не принимает значений в этом круге, т. е.  $\forall z \in D_1 \quad |\varphi_1(z) - w_0| \geq \rho$ . Поэтому функция  $z \mapsto g(z) = \frac{\rho}{\varphi_1(z) - w_0}$ , очевидно, аналитическая и однолистная в  $D$  и  $\forall z \in D \quad |g(z)| \leq 1$ .

2) Пусть  $\mathcal{M}$  — множество всех аналитических и однолистных в области  $D$  функций, ограниченных по модулю единицей. Оно непустое, поскольку  $g \in \mathcal{M}$ . Согласно принципу компактности, это множество компактно в  $D$ . Пусть  $\alpha$  — некоторая фиксированная точка области  $D$ . Обозначим через  $\mathcal{M}_1$  часть множества  $\mathcal{M}$ , состоящую из всех функций  $f \in \mathcal{M}$ , для которых  $|f'(\alpha)| \geq |g'(\alpha)| > 0$  (последнее неравенство является следствием однолистности функции  $g$ ). Покажем, что множество  $\mathcal{M}_1$  компактно в себе. Пусть последовательность  $(f_n)$  функций

из множества  $\mathcal{M}_1$  равномерно сходится на любом компакте  $K \Subset D$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f_0$ . Поскольку  $\forall n \in \mathbb{N} |f'_n(a)| \geq |g'(a)|$ , то  $|f'_0(a)| \geq |g'(a)|$ . Кроме того, согласно следствию из теоремы Гурвица, либо  $f_0 \equiv \text{const}$ , либо  $f_0$  однолистка в  $D$ . Случай  $f_0 \equiv \text{const}$  исключается в связи с последним неравенством. Следовательно,  $f_0 \in \mathcal{M}_1$ .

Рассмотрим на множестве функций  $\mathcal{M}_1$  функционал  $I(f) = f'(a)$ . Поскольку он непрерывен на компактном в себе семействе функций  $\mathcal{M}_1$  (см. § 4), то его модуль достигает своей точной верхней грани, т. е. существует такая функция  $h \in \mathcal{M}_1$ , что  $\forall f \in \mathcal{M}_1$  выполняется неравенство

$$|f'(a)| \leq |h'(a)|.$$

Рассуждая от противного, покажем, что  $h(a) = 0$ . Действительно, при  $h(a) \neq 0$  функция

$$z \mapsto H(z) = \frac{h(z) - h(a)}{1 - \overline{h(a)}h(z)} \in \mathcal{M}_1$$

и

$$|H'(a)| = \frac{|h'(a)|}{1 - |h(a)|^2} > |h'(a)|,$$

что противоречит экстремальному свойству функции  $h$ .

3) Покажем, что  $D \xrightarrow{h} K$ . Допустим, что это не так. Пусть  $h(z)$  не принимает в  $D$  некоторого значения  $b \in K$ . Поскольку  $h(a) = 0$ , то  $b \neq 0$ . Очевидно, что функция  $h$  не принимает в  $D$  также и значения  $b^* = \frac{1}{b}$ , так как  $|b^*| > 1$ . Тогда можно выделить в  $D$  однозначную ветвь  $\sqrt{\frac{h(z)-b}{1-\overline{b}h(z)}}$ . Обозначим ее через  $\psi(z)$ . Очевидно, функция  $\psi(z)$ , как и функция

$$\Psi(z) = \frac{\psi(z) - \psi(a)}{1 - \overline{\psi(a)}\psi(z)},$$

принадлежит множеству  $\mathcal{M}$ . Непосредственным подсчетом находим:

$$\psi'(z) = \frac{h'(z)(1 - |b|^2)}{2\psi(z)(1 - \overline{b}h(z))}, \quad \Psi'(z) = \frac{\psi'(z)(1 - |\psi(a)|^2)}{(1 - \overline{\psi(a)}\psi(z))^2}.$$

Отсюда

$$\Psi'(a) = \frac{\psi'(a)}{1 - |\psi(a)|^2} = \frac{h'(a)(1 - |b|^2)}{2\sqrt{-b}(1 - |b|)}, \quad |\Psi'(a)| = \frac{|h'(a)|(1 + |b|)}{2\sqrt{|b|}} > |h'(a)|.$$

Следовательно,  $\Psi \in \mathcal{M}_1$  и  $|\Psi'(a)| > |h'(a)|$ .

Последнее неравенство противоречит экстремальному свойству функции  $h$ . ►

**Следствие.** Любые две односвязные области, границы которых содержат более чем по одной точке, конформно изоморфны друг другу.

## § 6. Соответствие границ и принцип симметрии при конформном отображении

### 6.1. Теорема о соответствии границ.

В теореме Римана ничего не сказано о соответствии границ при конформном отображении, о поведении отображающей функции на границе области. Ответ на затронутые вопросы содержится в следующем утверждении.

**Теорема** (Каратеодори). Если границы областей  $D$  и  $D'$  являются кривыми Жордана, то конформное отображение  $D \xrightarrow{f} D'$  можно продолжить на границу области  $D$  до гомеоморфизма замыканий  $\overline{D}$  и  $\overline{D}'$ .

Доказательства теоремы здесь не приводим. Заметим только, что условия, налагаемые на границы областей, существенны. Можно показать на примерах, что утверждение теоремы становится неверным, когда границы областей не являются жордановыми.

Установлено также несколько более точных результатов о граничном поведении конформного отображения с жордановыми границами при дополнительных предположениях об этих кривых. Укажем два из них<sup>1)</sup>.

**1) Результат Шварца.** Если границы областей  $D$  и  $D'$  — аналитические жордановы кривые, то конформное отображение  $D \xrightarrow{f}_{\text{на}} D'$  продолжается до аналитической функции в  $\bar{D}$ .

**2) Результат Линделёфа.** Если границы областей  $D$  и  $D'$  являются гладкими жордановыми кривыми, а  $f$  осуществляет конформное отображение  $D$  на  $D'$ , то  $\arg f'(z)$  продолжается до не прерывной функции в  $\bar{D}$ , причем  $\forall \zeta \in \partial D \arg f'(\zeta) = \theta' - \theta$ , где  $\theta$  и  $\theta'$  — углы наклона касательных к кривым  $\partial D$  и  $\partial D'$  в точках  $\zeta$  и  $f(\zeta)$  соответственно.

В случае конформного отображения областей, ограниченных кривыми Жордана, условия единственности отображения можно определить по соответствию трех пар граничных точек. А именно, пусть  $a, b, c$  — три произвольные точки границы  $\partial D$ ,  $a', b', c'$  — три произвольные точки границы  $\partial D'$ , которые устанавливают одинаковые направления их обходов относительно областей  $D$  и  $D'$ . Тогда существует такой изоморфизм  $D \xrightarrow{f}_{\text{на}} D'$ , для которого выполняются условия:

$$f(a) = a', \quad f(b) = b', \quad f(c) = c'. \quad (1)$$

Действительно, пусть  $D \xrightarrow{f_1}_{\text{на}} K$ ,  $D' \xrightarrow{f_2}_{\text{на}} K$ ,  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . По теореме о соответствии границ  $f_1$  осуществляет гомеоморфизм замыканий  $\bar{D}$  и  $\bar{K}$ , а  $f_2$  — гомеоморфизм замыканий  $\bar{D}'$  и  $\bar{K}$ . Пусть

$$f_1(a) = \alpha, \quad f_1(b) = \beta, \quad f_1(c) = \gamma, \quad f_2(a') = \alpha', \quad f_2(b') = \beta', \quad f_2(c') = \gamma'.$$

Существует, и притом единственный, автоморфизм единичного круга  $K : K \rightarrow K$ , удовлетворяющий условиям

$$\lambda(\alpha) = \alpha', \quad \lambda(\beta) = \beta', \quad \lambda(\gamma) = \gamma'.$$

Очевидно, что отображение  $f = f_2^{-1} \circ \lambda \circ f_1$  является конформным изоморфизмом  $D$  на  $D'$ , удовлетворяющим условиям (1). Пусть теперь кроме  $f$  существует еще изоморфизм  $D \xrightarrow{g}_{\text{на}} D'$ , удовлетворяющий условиям (1):

$$g(a) = a', \quad g(b) = b', \quad g(c) = c'.$$

Очевидно, что  $\varphi = f \circ g^{-1}$  является автоморфизмом области  $D_2$ , удовлетворяющим условиям:

$$\varphi(a') = a', \quad \varphi(b') = b', \quad \varphi(c') = c'.$$

Рассмотрим следующий автоморфизм единичного круга  $K$ :

$$\mu = f_2 \circ \varphi \circ f_2^{-1},$$

удовлетворяющего условиям

$$\mu(a') = a', \quad \mu(b') = b', \quad \mu(c') = c'$$

и, таким образом, являющегося тождественным отображением  $e$ . Из вида отображения  $\mu$  следует, что и  $\varphi = e$ , т. е.  $g = f$ .

## 6.2. Принцип симметрии.

Следующая теорема устанавливает применение принципа симметрии Римана—Шварца аналитического продолжения функций к конформным отображениям.

<sup>1)</sup> Читателя, интересующегося поведением конформного отображения на границе области, отсылаем к книгам: Каратеодори К. Конформное отображение. — М.—Л.: ГТТИ, 1934; Галузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.—Л., 1967.

**Теорема.** Пусть  $D_1$  и  $D_2$  — две области с жордановыми границами, причем  $\partial D_1$  содержит дугу окружности  $\gamma_1$ , а  $\partial D_2$  — дугу окружности  $\gamma_2$ . Пусть, далее,  $D_1^*$  и  $D_2^*$  — области, симметричные  $D_1$  и  $D_2$  относительно  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  соответственно. Тогда, если функция  $f$  конформно отображает  $D_1$  на  $D_2$  и  $\gamma_1 \xrightarrow{f} \gamma_2$ , то она допускает аналитическое продолжение в  $D_1^*$  и продолженная функция конформно отображает область  $D_1 \cup \gamma_1 \cup D_1^*$  на область  $D_2 \cup \gamma_2 \cup D_2^*$ . Предполагается, что  $D_1 \cap D_1^* = \emptyset$ ,  $D_2 \cap D_2^* = \emptyset$ .

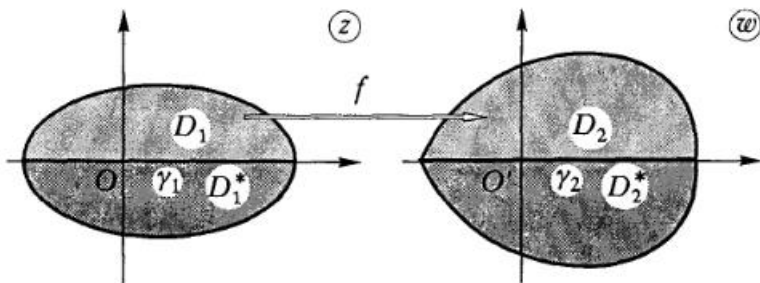


Рис. 91

◀ Не ограничивая общности можем считать, что  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — отрезки действительной оси, а  $D_1$  и  $D_2$  — области, лежащие в верхней полуплоскости (рис. 91). Этого всегда можно добиться с помощью дробно-линейного отображения. Пусть  $D_1 \xrightarrow{f} D_2$ . По теореме о соответствии границ функция  $f$  будет непрерывной в замыкании  $\overline{D_1}$  и устанавливает гомеоморфизм  $\overline{D_1}$  на  $\overline{D_2}$ . При этом, в силу условий теоремы,  $f$  непрерывна на  $\gamma$  и принимает на  $\gamma$  действительные значения. Согласно принципу симметрии Римана—Шварца функция  $f$  аналитически продолжается в  $D_1^*$  по закону  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ , а это и означает, что продолженная функция конформно отображает  $D_1 \cup \gamma_1 \cup D_1^*$  на  $D_2 \cup \gamma_2 \cup D_2^*$ . ▶

Рассмотрим задачи.

**18.** Построить конформное отображение области  $D$ , представляющей собой внешность единичного круга с разрезами по отрезкам  $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq \alpha, \arg z = \frac{2k\pi}{n}\}$  ( $k = \overline{0, n-1}$ ) (рис. 92) на внешность единичного круга.

◀ Согласно принципу симметрии, задача сводится к построению конформного отображения области  $G_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < \infty, 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}\}$  (рис. 93) на себя так, чтобы лучи  $\Gamma_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \alpha, \arg z = 0\}$  и  $\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \alpha, \arg z = \frac{2\pi}{n}\}$  переходили соответственно в лучи  $\tilde{\Gamma}_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1, \arg z = 0\}$  и  $\tilde{\Gamma}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1, \arg z = \frac{2\pi}{n}\}$ . Это отображение находим как композицию следующих отображений:

$$w_1 = z^{\frac{n}{2}}, \quad w_2 = \frac{1}{2}(w_1 + w_1^{-1}), \quad w_3 = \frac{w_2}{\frac{1}{2}(\alpha^{\frac{n}{2}} + \alpha^{-\frac{n}{2}})}, \quad w_4 = w_3 + \sqrt{w_3^2 - 1}, \quad w = w_4^{\frac{2}{n}}.$$

Отображающая функция имеет вид:

$$w = (\alpha^{\frac{n}{2}} + \alpha^{-\frac{n}{2}})^{-\frac{2}{n}} \left( z^{\frac{n}{2}} + z^{-\frac{n}{2}} + \sqrt{(z^{\frac{n}{2}} + z^{-\frac{n}{2}})^2 - (\alpha^{\frac{n}{2}} + \alpha^{-\frac{n}{2}})^2} \right).$$

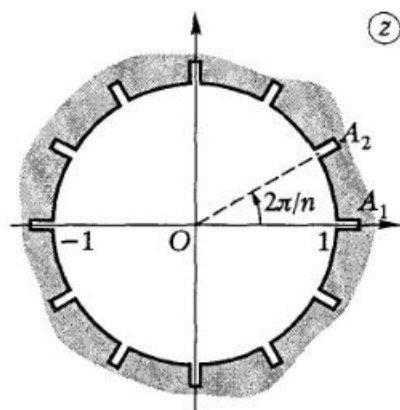


Рис. 92

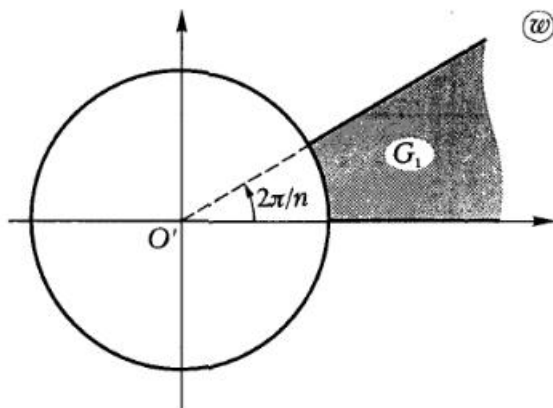


Рис. 93

Очевидно, что функция  $w_1$  отображает сектор на верхнюю полуплоскость с выброшенным полукругом,  $w_2$  (функция Жуковского) отображает верхнюю полуплоскость с выброшенным полукругом на верхнюю полуплоскость, причем точки  $A_1$  и  $A_2$  переходят в точки  $\pm \frac{1}{2}(\alpha^{\frac{n}{2}} + \alpha^{-\frac{n}{2}})$ . Функция  $w_3$  отображает верхнюю полуплоскость на верхнюю полуплоскость, а точки  $\pm \frac{1}{2}(\alpha^{\frac{n}{2}} + \alpha^{-\frac{n}{2}})$  переходят в точки  $\pm 1$ . Функция  $w_4$  (обратное отображение функции Жуковского) отображает верхнюю полуплоскость на верхнюю полуплоскость с выброшенным единичным полукругом. Функция  $w$  отображает верхнюю полуплоскость с выброшенным единичным полукругом на сектор  $G_1$ . ►

19. Отобразить на верхнюю полуплоскость внешность правой ветви гиперболы

$$\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1.$$

◀ Согласно принципу симметрии задача сводится к построению конформного отображения верхней половины заданной области на первый квадрант, при котором луч  $(-\infty, \cos \alpha)$  переходит в положительную мнимую полуось. Это отображение находим как композицию следующих отображений:

$$w_1 = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad w_2 = (e^{-i\alpha} w_1)^{\frac{\pi}{\pi - \alpha}}, \quad w_3 = \frac{1}{2} \left( w_2 + \frac{1}{w_2} \right),$$

$$w = \sqrt{w_3 - 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left( e^{-i\alpha} (z + \sqrt{z^2 - 1}) \right)^{\frac{\pi}{2(\pi - \alpha)}} - \left( e^{-i\alpha} (z + \sqrt{z^2 - 1}) \right)^{-\frac{\pi}{2(\pi - \alpha)}} \right).$$

Множитель  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  роли не играет, поскольку преобразование  $w' = kw$  при  $k > 0$  отображает верхнюю полуплоскость на себя. ►

## § 7. Конформное отображение многоугольников. Интеграл Кристоффеля—Шварца

### 7.1. Отображение верхней полуплоскости на многоугольник.

Пусть требуется отобразить верхнюю полуплоскость  $z$ -плоскости на внутренность некоторого многоугольника  $M \in \mathbb{C}$ , лежащего в плоскости  $w$  (рис. 94). По теореме Римана отображающая функция существует и по теореме о соответствии границ, когда границы рассматриваемых

областей жордановы кривые, устанавливает гомеоморфизм замкнутых областей. Вершинам многоугольника  $A_1, A_2, \dots, A_n$  будут соответствовать точки  $a_1, a_2, \dots, a_n$  действительной оси. Не ограничивая общности, можно считать, что  $\forall k = \overline{1, n} \ a_k \in \mathbb{C}$  (в противном случае следует применить такой автоморфизм верхней полуплоскости, чтобы бесконечность переходила не в вершину многоугольника).

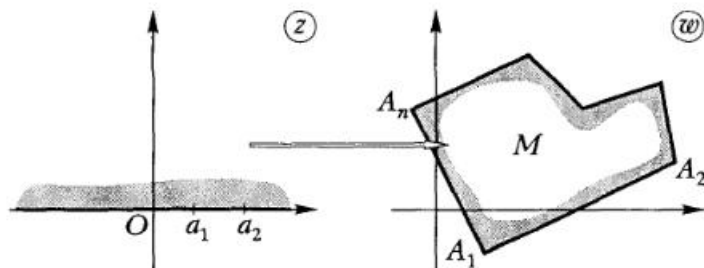


Рис. 94

Пусть  $w = f(z)$  — искомая отображающая функция. Отрезок  $[a_1, a_2]$  она переводит в отрезок  $[A_1, A_2]$ . Следовательно, по принципу симметрии она продолжается в нижнюю полуплоскость через  $[a_1, a_2]$ , и это продолжение будет устанавливать отображение нижней полуплоскости на многоугольник, симметричный данному относительно прямой, проходящей через точки  $A_1$  и  $A_2$ . Аналогично можно построить аналитические продолжения и через другие отрезки  $[a_k, a_{k+1}]$ . Таким образом, полная аналитическая функция, определяемая  $f$ , не будет иметь особых точек в нижней полуплоскости и во всех точках действительной оси, за исключением, быть может, множества  $\{a_k; k = \overline{1, n}\}$ . Следовательно,  $a_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) — возможные особые точки продолженной функции  $f$  как полной аналитической функции.

Величины внутренних углов многоугольника обозначим соответственно через  $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$ . Имеем

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2, \quad 0 < \alpha_k < 2.$$

Рассмотрим  $f(z)$  в верхней полуокрестности точки  $a_k$ . Функция (ее ветвь фиксируется)

$$z \mapsto \omega(z) = (f(z) - A_k)^{\frac{1}{\alpha_k}} e^{-i\frac{\beta_k}{\alpha_k}}$$

переводит полуокрестность точки  $a_k$  в полуокрестность начала координат, причем граничный отрезок действительной оси также переходит в граничный отрезок действительной оси (см. рис. 95).

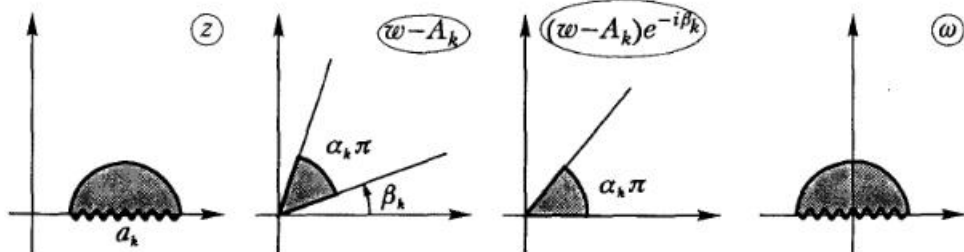


Рис. 95

Следовательно,  $\omega(z)$  по принципу симметрии аналитически продолжается в полную окрестность точки  $a_k$ , и это продолжение отображает окрестность точки  $a_k$  в окрестность начала координат



взаимно однозначно. Таким образом,  $\omega$  — аналитическая функция в точке  $a_k$  и  $\omega'(a_k) \neq 0$ . Представим ее в окрестности точки  $a_k$  рядом Тейлора:

$$\omega(z) = (e^{-i\beta}(f(z) - A_k))^{\frac{1}{\alpha_k}} = C_1(z - a_k) + C_2(z - a_k)^2 + \dots = (z - a_k)\Omega(z),$$

$$\Omega(a_k) = C_1 = \omega'(a_k) \neq 0, \quad e^{-i\beta}(f(z) - A_k) = (z - a_k)^{\alpha_k}(\Omega(z))^{\alpha_k} = (z - a_k)\varphi(z),$$

где  $\varphi(z)$  — однозначная ветвь функции  $(\Omega(z))^{\alpha_k}$ . Далее,

$$f(z) = A_k + (z - a_k)^{\alpha_k} \varphi_1(z), \quad \varphi_1(a_k) \neq 0,$$

$$f'(z) = \alpha_k(z - a_k)^{\alpha_k-1} \varphi_1(z) + (z - a_k)^{\alpha_k} \varphi_1'(z) = (z - a_k)^{\alpha_k-1} (\alpha_k \varphi_1(z) + (z - a_k) \varphi_1'(z)) = (z - a_k)^{\alpha_k-1} \Phi(z),$$

$$\Phi(a_k) \neq 0,$$

$$f''(z) = (\alpha_k - 1)(z - a_k)^{\alpha_k-2} \Phi(z) + (z - a_k)^{\alpha_k-1} \Phi'(z),$$

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{(z - a_k)^{\alpha_k-2} ((\alpha_k - 1)\Phi(z) + (z - a_k)\Phi'(z))}{(z - a_k)^{\alpha_k-1} \Phi(z)} = \frac{(\alpha_k - 1)\Phi(z) + (z - a_k)\Phi'(z)}{(z - a_k)\Phi(z)} = \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} + \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}.$$

Из полученного следует, что точка  $a_k$  является полюсом функции  $\frac{f''}{f'}$  с вычетом  $\alpha_k - 1$ .

Рассмотрим функцию  $z \mapsto \Psi(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k}$ . Это — целая функция и  $\lim_{z \rightarrow \infty} \Psi(z) = 0$ .

Действительно, разложение функции  $f$  в окрестности бесконечности имеет вид

$$f(z) = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$$

и тогда

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)C_n}{z^{n+2}}}{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nC_n}{z^{n+1}}} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Кроме того, очевидно, что  $\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ .

По теореме Лиувилля  $\Psi \equiv 0$ . Таким образом,

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} = \frac{d}{dz} \ln f'(z),$$

$$\ln f'(z) = \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \ln(z - a_k) + \ln C_1 = \ln C_1 \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k-1}, \quad f'(z) = C_1 \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k-1},$$

$$f(z) = C_1 \int_0^z \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\alpha_k-1} d\zeta + C_2. \quad (1)$$

Равенство (1) называется *формулой Кристоффеля—Шварца*, а интеграл в ее правой части — *интегралом Кристоффеля—Шварца*.

Посмотрим, как изменится вид формулы Кристоффеля—Шварца, если прообраз одной из вершин многоугольника, например, вершины  $A_n$ , равен бесконечности. С этой целью строим следующий автоморфизм верхней полуплоскости плоскости  $z$ :

$$z_1 = \frac{1}{a_n - z}, \quad z = a_n - \frac{1}{z_1}.$$



Тогда получим:

$$f(z) = f\left(a_n - \frac{1}{z_1}\right) = f_1(z_1) = C_1 \int_0^{a_n - \frac{1}{z_1}} \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta + C_2 = C_1 \int_{\frac{1}{a_n}}^{z_1} \prod_{k=1}^n \left(a_n - a_k - \frac{1}{\zeta_1}\right)^{\alpha_k - 1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1^2} + C_2$$

(в интеграле произведена замена  $\zeta = a_n - \frac{1}{\zeta_1}$ ). После очевидных несложных преобразований под знаком интеграла, имеем

$$\begin{aligned} f_1(z_1) &= C_1 \int_{\frac{1}{a_n}}^{z_1} \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta_1(a_n - a_k) - 1)^{\alpha_k - 1} \zeta_1^{n - \sum_{k=1}^n \alpha_k - 2} d\zeta_1 + C_2 = \\ &= C'_1 \int_0^{z_1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\zeta_1 - \frac{1}{a_n - a_k}\right)^{\alpha_k - 1} d\zeta_1 + C'_2 = C'_1 \int_0^{z_1} \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta_1 - a'_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta_1 + C'_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $a'_k = \frac{1}{a_n - a_k}$  — образы точек  $a_k$  в плоскости  $z_1$ .

В процессе получения формулы (2) множитель

$$\zeta_1^{n - \sum_{k=1}^n \alpha_k - 2}$$

исчез в связи с тем, что

$$n - \sum_{k=1}^n \alpha_k - 2 = 0.$$

Полагая в предпоследнем интеграле формулы (2) нижний предел интегрирования равным нулю, а не  $\frac{1}{a_n}$ , мы изменяем лишь постоянную  $C_2$ . Заменяв обозначения  $z_1$  на  $z$  и  $f_1(z_1)$  на  $f(z)$ , получим формулу

$$f(z) = C_1 \int_0^z \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta + C_2. \quad (3)$$

Интегралы в формулах (1) и (3) называются соответственно *интегралами Кристоффеля—*

*Шварца первого и второго рода*. Разница между ними очевидна: в обоих случаях  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2$ ,

хотя в формуле (3) множитель  $(\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1}$  под знаком интеграла отсутствует.

Формулы (1) и (3) получены в предположении, что точки  $a_k$  известны. Однако в задачах на конформные отображения задают лишь вершины  $A_k$  многоугольника, а точки  $a_k$  остаются неизвестными. Согласно п.6.1 три из них можно задать произвольно, а остальные  $a_k$  вместе с  $C_1$  и  $C_2$  должны определяться из условий задачи. Это обстоятельство является главным затруднением при практическом использовании формулы Кристоффеля—Шварца. Существуют различные методы их определения. Постоянная  $C_2$  определяется заданием размещения одной из вершин многоугольника. Для определения постоянных  $a_k$  и  $C_1$  можно иногда воспользоваться известными длинами сторон многоугольника

$$|\overrightarrow{A_k A_{k+1}}| = \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f'(x)| dx \quad (k = \overline{1, n-1}),$$

однако на практике осуществить это удается не всегда. Существуют также приближенные методы определения постоянных  $a_k$  и  $C_1$ .

## 7.2. Случай многоугольника, имеющего вершины в бесконечности.

Пусть вершина  $A_k$   $n$ -угольника лежит в бесконечной точке (рис. 96). Возьмем на лучах  $A_{k-1}A_k$  и  $A_kA_{k+1}$  произвольно по точке  $A'_k$ ,  $A''_k$ , и соединим их отрезком прямой. В результате получим  $(n+1)$ -угольник. Функция, отображающая верхнюю полуплоскость на этот многоугольник, имеет вид

$$f(z) = C_1 \int_0^z (\zeta - a_1)^{\alpha_1-1} \dots (\zeta - a'_k)^{\alpha'_k-1} (\zeta - a''_k)^{\alpha''_k-1} \dots (\zeta - a_n)^{\alpha_n-1} d\zeta + C_2, \quad (1)$$

где  $\alpha'_k \pi$  и  $\alpha''_k \pi$  — значения углов при вершинах  $A'_k$  и  $A''_k$ , а  $a'_k$  и  $a''_k$  — точки оси  $Ox$ , соответствующие этим вершинам.

Пусть отрезок  $A'_kA''_k$  удаляется в бесконечность, оставаясь параллельным самому себе. При этом точки  $a'_k$  и  $a''_k$  сливаются в одну точку  $a_k$ , соответствующую вершине  $A_k$ . Обозначим через  $-\alpha_k \pi$  значение угла пересечения лучей  $A_{k-1}A_k$  и  $A_kA_{k+1}$  в конечной точке  $A_k^*$ . Тогда из треугольника  $A'_kA''_kA_k^*$  имеем  $\alpha'_k + \alpha''_k - \alpha_k = 1$ , т. е.  $\alpha'_k + \alpha''_k - 2 = \alpha_k - 1$  и формула (1) принимает обычный вид формулы (1), п. 7.1.

Ясно, что эти рассуждения можно провести и в случае, когда в бесконечности лежит несколько вершин многоугольника.

Таким образом, формула (1), п. 7.1, остается в силе и для многоугольников, у которых одна или несколько вершин лежат в бесконечности, если при этом угол между двумя прямыми с вершиной в бесконечности определяется как угол в конечной точке их пересечения, взятый со знаком минус.

Заметим, что при таком определении угла в бесконечности остается в силе соотношение

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2$$

для суммы углов многоугольника.

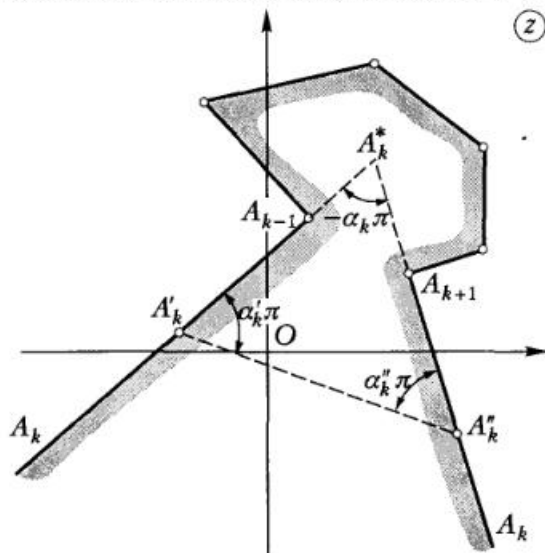


Рис. 96

## 7.3. Отображение верхней полуплоскости на внешность многоугольника.

Проводим рассуждения, аналогичные проделанным в п. 7.1. Функция  $f$  имеет теперь в некоторой точке  $a$  верхней полуплоскости полюс первого порядка. Функция же  $\frac{f''}{f'}$  наряду с простыми полюсами  $\{a_k; k = \overline{1, n}\}$  будет иметь еще простые полюсы в точках  $a, \bar{a}$  с вычетами в них, равными  $-2$ . Таким образом,

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} - \frac{2}{z - a} - \frac{2}{z - \bar{a}}. \quad (1)$$

Отсюда

$$f(z) = C_1 \int_0^z \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\alpha_k-1} \frac{d\zeta}{(\zeta - a)^2 (\zeta - \bar{a})^2} + C_2. \quad (2)$$

Здесь  $\alpha_k \pi$  — значения внешних углов многоугольника,  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n+2$ ,  $a_k$  — точки действительной оси, соответствующие его вершинам.

## 7.4. Отображение верхней полуплоскости на прямоугольник.

Отобразим верхнюю полуплоскость на прямоугольник  $P$  с вершинами в точках  $\pm\omega$ ,  $\pm\omega + i\omega_1$  (рис. 97). Применим принцип симметрии. Пусть функция  $f$  отображает первый квадрант на

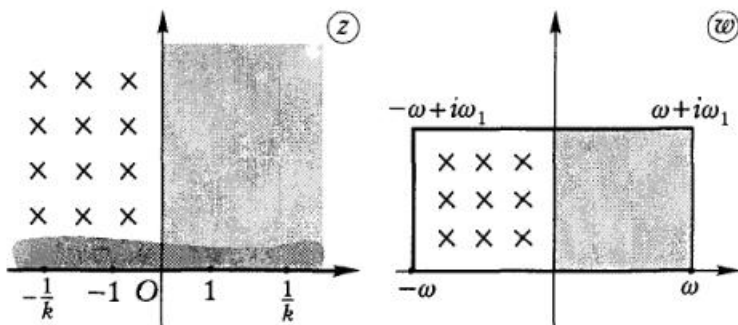


Рис. 97

правую половину прямоугольника  $P$  так, что мнимая полуось переходит в отрезок  $[0, i\omega_1]$  мнимой оси. Заддим соответствие трех пар граничных точек:

$z$	0	1	$\infty$
$w$	0	$\omega$	$i\omega_1$

Этим соответствием отображающая функция определяется единственным образом. Некоторая точка  $\frac{1}{k} > 1$  ( $k < 1$ ) перейдет в вершину  $\omega + i\omega_1$  прямоугольника,  $k$  — неизвестно. По принципу симметрии функция  $f$  продолжается во второй квадрант и продолженная функция (обозначим ее также  $f$ ) осуществляет отображение верхней полуплоскости на весь прямоугольник. При этом имеем

$$f(-1) = -\omega, \quad f\left(-\frac{1}{k}\right) = -\omega + i\omega_1.$$

Вид функции  $f$  определяется формулой Кристоффеля—Шварца. Получим:

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \{a_k; k = \overline{1, 4}\} = \left\{-\frac{1}{k}, -1, 1, \frac{1}{k}\right\},$$

$$w = f(z) = C \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}. \quad (1)$$

Фиксируем ветвь корня  $\sqrt{1} = 1$ . Тогда, принимая во внимание, что  $f'(z)|_{z=0} = C$ , получаем, что  $C > 0$ , так как положительное направление действительной оси при отображении не изменяется.

Полученная формула содержит два неизвестных параметра  $C$  и  $k$ .

Рассмотрим функцию

$$z \mapsto F(z, k) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}, \quad (2)$$

где  $0 < k < 1$  считается известным. Она определяется эллиптическим интегралом первого рода,  $k$  — его модуль. Из предыдущего изложения ясно, что  $F(z, k)$  осуществляет конформное отображение

верхней полуплоскости на прямоугольник со сторонами  $2\omega_0$  и  $\omega'_0$ , где

$$\omega_0 = \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = K(k)$$

— полный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $k$ ,

$$\omega_0 + i\omega'_0 = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = \omega_0 + i \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-1)(1-k^2\zeta^2)}}.$$

Следовательно,

$$\omega'_0 = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-1)(1-k^2\zeta^2)}}.$$

Заменяв в интеграле переменную по формуле

$$\zeta^2 = \frac{1}{1-k_1^2\tau^2}, \quad k_1^2 = 1-k^2,$$

получим:

$$\omega'_0 = \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k_1^2\tau^2)}} = K(k_1).$$

Итак, мы получили, что эллиптический интеграл первого рода отображает верхнюю полуплоскость на прямоугольник со сторонами  $2K(k)$  и  $K(k_1')$ .

Вернемся к нашему случаю:

$$f(z) = C \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}},$$

$k$ ,  $C$  — неизвестные стороны прямоугольника,  $2\omega$  и  $\omega'$  — известны.

На основании только что рассмотренного имеем

$$\omega = CK(k), \quad \omega' = CK(k').$$

Эти равенства являются системой трансцендентных уравнений относительно  $C$  и  $k$ . Она может быть решена с использованием таблиц эллиптических интегралов первого рода. Действительно, пусть

$$\tau = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{K(k)}{K(k')}.$$

Тогда по заданным  $\tau$  по таблицам можно найти  $K(k)$ , а затем и  $C = \frac{\omega}{K(k)}$ .

### 7.5. Эллиптический синус и его двоякая периодичность.

Как установлено выше, эллиптический интеграл первого рода  $z = F(w, k)$  осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости  $G_+ = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}$  на прямоугольник  $P_0$  с вершинами  $\pm K$ ,  $\pm K + iK_1$ , при этом в вершины прямоугольника переходят точки  $\pm 1$  и  $\pm \frac{1}{k}$  действительной оси. Обращение эллиптического интеграла первого рода называется *эллиптическим синусом*, его обозначение:  $w = \operatorname{sn}(z, k)$ . Эллиптический синус является аналитической функцией в прямоугольнике  $P_0$  и отображает его на верхнюю полуплоскость  $G_+ = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}$ . В силу гомеоморфизма замкнутых областей, функция  $\operatorname{sn}$  переводит отрезок  $[K, K + iK_1]$  в отрезок  $[1, \frac{1}{k}]$ . Следовательно, к ней применим принцип симметрии, по которому она аналитически продолжается в прямоугольник  $P_1$ , симметричный с  $P_0$  относительно отрезка  $[K, K + iK_1]$ .

причем продолженная функция (мы снова обозначим ее через  $\operatorname{sn}$ ) отображает  $P_1$  на нижнюю полуплоскость  $G_- = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w < 0\}$  (рис. 98). Продолженная функция также удовлетворяет условию принципа симметрии и по этому принципу аналитически продолжается в прямоугольник  $P_2$ , симметричный с  $P_1$  относительно отрезка  $[3K, 3K + iK_1]$  и отображает его снова на верхнюю полуплоскость. При этом

$$\operatorname{sn}(z + 4K) = \operatorname{sn} z \quad \forall z \in P_0. \quad (1)$$

Более подробно: точка  $z_1$ , симметричная с  $z$  относительно отрезка  $[K, K + iK_1]$ , переходит в точку  $\operatorname{sn} \bar{z}$ , а точка  $z_2 = z + 4K$ , симметричная  $z_1$  относительно отрезка  $[3K, 3K + iK_1]$ , — снова в точку  $\operatorname{sn} z$ .

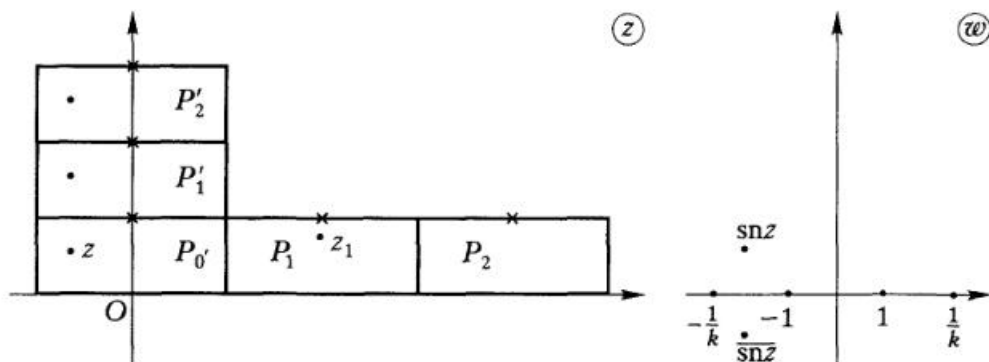


Рис. 98

Точно так же можем продолжить функцию  $\operatorname{sn} z$  в прямоугольник  $P_1'$ , симметричный с  $P_0$  относительно отрезка  $[-K + iK_1, K + iK_1]$ , только это продолжение будет иметь в точке  $iK_1$  полюс первого порядка. Продолженная функция  $\operatorname{sn}$  отображает  $P_1'$  на нижнюю полуплоскость и аналитически продолжается в прямоугольник  $P_2'$ , симметричный с  $P_1'$  относительно отрезка  $[-K + i2K_1, K + i2K_1]$ , и этот прямоугольник она снова отображает на верхнюю полуплоскость. Как и выше, получим, что

$$\operatorname{sn}(z + 2iK_1) = \operatorname{sn} z \quad \forall z \in P_0. \quad (2)$$

Рассуждая в точности так же и далее, мы можем продолжить эллиптический синус на всю плоскость  $\mathbb{C}$ . Продолженная функция будет мероморфной: в точках  $iK_1 + 4Km + 2iK_1n$ , где  $m$  и  $n$  — любые целые числа, она имеет полюсы первого порядка. Формулы (1) и (2), очевидно, будут выполняться для любых точек  $z \in \mathbb{C}$ . Это свидетельствует о том, что функция  $\operatorname{sn}$  имеет два независимых периода  $T_1 = 4K$  и  $T_2 = 2iK_1$ : для любых целых  $m$  и  $n$  справедливо соотношение

$$\operatorname{sn}(z + 4Km + 2iK_1n) = \operatorname{sn} z. \quad (3)$$

Мероморфная двоякопериодическая функция, отношение периодов которой является строго комплексным числом (не действительным), называется *эллиптической функцией*. Проведенные исследования показывают, что  $\operatorname{sn} z$  является эллиптической функцией.

Равенство (3) свидетельствует также о том, что функция  $\operatorname{sn} z$  инвариантна относительно группы линейных преобразований вида

$$z \mapsto z + 4Km + 2iK_1n \quad (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}).$$

Функции, обладающие свойством инвариантности относительно некоторой группы дробно-линейных преобразований, называются *автоморфными*<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Для автоморфных функций существует отдельная хорошо разработанная теория, с которой можно ознакомиться, например, по книге: Л. Р. Форд. Автоморфные функции, ОНТИ, 1936.

### 7.6. Отображение единичного круга на многоугольник.

Найдем общий вид функции, осуществляющей конформное отображение единичного круга на многоугольник. Для этого отображим единичный круг на верхнюю полуплоскость, а затем воспользуемся формулой (1), п. 7.1.

Отображение верхней полуплоскости  $G_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  на круг  $K = \{z_1 \in \mathbb{C} : |z_1| < 1\}$  имеет вид

$$z_1 = \frac{z - b}{z - \bar{b}}, \quad \operatorname{Im} b > 0, \quad (1)$$

откуда находим отображение  $K$  на  $G_+$ :

$$z = \frac{\bar{b}z_1 - b}{z_1 - 1}. \quad (2)$$

Подставив в формулу (1), п. 7.1, вместо  $z$  правую часть равенства (2), получим:

$$w = f(z) = f\left(\frac{\bar{b}z_1 - b}{z_1 - 1}\right) = f_1(z_1) = C_1 \int_0^{\frac{\bar{b}z_1 - b}{z_1 - 1}} \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta + C_2.$$

Полагая в интеграле  $\zeta = \frac{\bar{b}\zeta_1 - b}{\zeta_1 - 1}$ , находим:

$$\begin{aligned} f(z_1) &= C_1 \int_{\frac{b}{\bar{b}}}^{z_1} \prod_{k=1}^n \left( \frac{\bar{b}\zeta_1 - b}{\zeta_1 - 1} - a_k \right)^{\alpha_k - 1} \frac{d\zeta_1}{(\zeta_1 - 1)^2} + C_2 = \\ &= C_1 \int_{\frac{b}{\bar{b}}}^{z_1} \prod_{k=1}^n ((\bar{b} - a_k)\zeta_1 - (b - a_k))^{\alpha_k - 1} \prod_{k=1}^n (\zeta_1 - 1)^{1 - \alpha_k} \frac{d\zeta_1}{(\zeta_1 - 1)^2} + C_2. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{\prod_{k=1}^n (\zeta_1 - 1)^{1 - \alpha_k}}{(\zeta_1 - 1)^2} = (z_1 - 1)^{n - \sum_{k=1}^n \alpha_k - 2} = 1$$

(так как  $n - \sum_{k=1}^n \alpha_k - 2 = 0$ ), то

$$\begin{aligned} f_1(z_1) &= C_1 \int_{\frac{b}{\bar{b}}}^{z_1} \prod_{k=1}^n ((\bar{b} - a_k)\zeta_1 - (b - a_k))^{\alpha_k - 1} d\zeta_1 + C_2 = \\ &= C'_1 \int_{\frac{b}{\bar{b}}}^{z_1} \prod_{k=1}^n \left( \zeta_1 - \frac{a_k - b}{a_k - \bar{b}} \right)^{\alpha_k - 1} d\zeta_1 + C_2 = C'_1 \int_{\frac{b}{\bar{b}}}^{z_1} \prod_{k=1}^n (\zeta_1 - a'_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta_1 + C_2, \quad (3) \end{aligned}$$

где  $a'_k$  — точки единичной окружности, в которые переходят точки  $a_k$ .

Если в интеграле, входящем в формулу (3), изменить нижний предел интегрирования, полагая его равным нулю, то изменится лишь постоянная  $C_2$ , а общий вид формулы останется прежним:

$$f_1(z_1) = C'_1 \int_0^{z_1} \prod_{k=1}^n (\zeta_1 - a'_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta_1 + C'_2. \quad (4)$$

Заменяя  $z_1$  на  $z$ ,  $a'_k$  — на  $a_k$ ,  $f_1$  — на  $f$ , получим общий вид функции, осуществляющей конформное отображение круга  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  на многоугольник:

$$f(z) = C_1 \int_0^z \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta + C_2, \quad |a_k| = 1. \quad (5)$$

Для отображения единичного круга на многоугольник общий вид формулы Кристоффеля—Шварца не изменился.

В качестве примера рассмотрим отображение единичного круга на правильный многоугольник. Считаем, что центр многоугольника находится в точке  $w = 0$ . Этого всегда можно добиться линейным преобразованием заданного многоугольника. При построении отображения воспользуемся принципом симметрии.

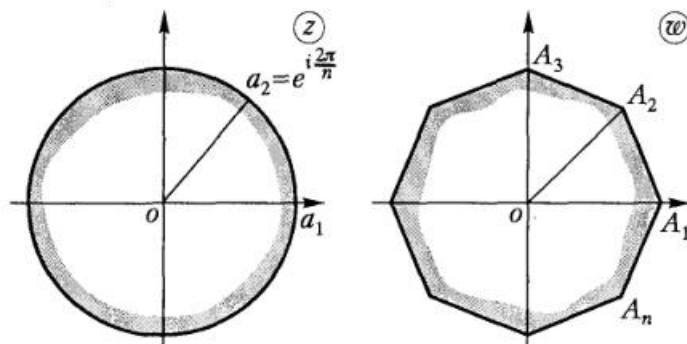


Рис. 99

Пусть

$$A_k = A_1 e^{i \frac{2(k-1)\pi}{n}} \quad (k = \overline{2, n}).$$

Обозначим через  $f$  функцию, осуществляющую конформное отображение сектора единичного круга  $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}\}$  на треугольник  $OA_1A_2$  (рис. 99) при условиях:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = A_1, \quad f\left(e^{i \frac{2\pi}{n}}\right) = A_2.$$

Очевидно, что  $\left[0, e^{i \frac{2\pi}{n}}\right] \xrightarrow{f} [0, A_2]$ . Согласно принципу симметрии, функция  $f$  аналитически

продолжается в сектор  $S' = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \frac{2\pi}{n} < \arg z < \frac{4\pi}{n}\}$ , причем ее продолжение (которое также обозначим через  $f$ ) отображает его на треугольник  $OA_2A_3$ . Рассуждая аналогично, продолжим  $f$  на весь единичный круг. Продолжение функции  $f$  будет аналитической функцией в единичном круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , осуществляя конформное отображение его на весь многоугольник, причем  $f\left(e^{i \frac{2(k-1)\pi}{n}}\right) = A_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ), т.е. точки  $e^{i \frac{2(k-1)\pi}{n}} = a_k$  являются

прообразами вершин многоугольника. Поскольку  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n\alpha = n - 2$ , то  $\alpha_k = \alpha = 1 - \frac{2}{n}$  и

$$\prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} = (\zeta^n - 1)^{-\frac{2}{n}}, \quad \text{в силу того, что } a_k \text{ являются корнями } n\text{-й степени из единицы и}$$

$$\prod_{k=1}^n (\zeta - a_k) = \zeta^n - 1.$$

По формуле (5) получаем:

$$f(z) = C \int_0^z (1 - \zeta^n)^{-\frac{2}{n}} d\zeta.$$

Определим константу  $C$  из условия

$$f(1) = C \int_0^1 (1 - \zeta^n)^{-\frac{2}{n}} d\zeta = A_1,$$

откуда

$$C = \frac{A_1}{\int_0^1 (1 - \zeta^n)^{-\frac{2}{n}} d\zeta}.$$

Полагая в интеграле  $\zeta^n = t$ , получим:  $d\zeta = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$ ,

$$\int_0^1 (1 - \zeta^n)^{-\frac{2}{n}} d\zeta = \frac{1}{n} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1} (1-t)^{-\frac{2}{n}} dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{2}{n}\right),$$

где  $B$  — бета-функция Эйлера. Окончательно имеем

$$w = f(z) = \frac{nA_1}{B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{2}{n}\right)} \int_0^z (1 - \zeta^n)^{-\frac{2}{n}} d\zeta.$$

**Замечание.** Поворотом плоскости  $z$  на угол  $\alpha$  вокруг начала координат можно добиться того, что образом вершины  $A_1$  будет любая заданная точка  $e^{i\alpha}$  единичной окружности.

Из формулы (2), п. 7.3 с помощью дополнительного дробно-линейного изоморфизма плоскости  $z$  легко получаем формулу отображения внутренности единичного круга на внешность многоугольника

$$f(z) = C_1 \int_0^z \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} \frac{d\zeta}{\zeta^2} + C_2. \quad (6)$$

Здесь предполагается, что центр круга переходит в бесконечно удаленную точку.

Рассмотрим задачи.

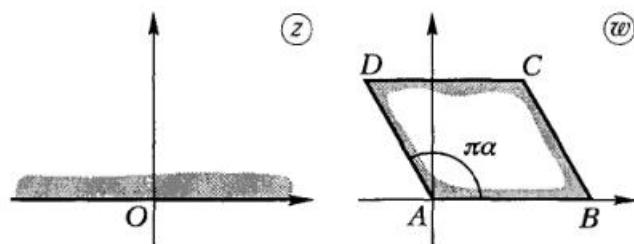


Рис. 100

**20.** Отобразить верхнюю полуплоскость  $G_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  на ромб в  $w$ -плоскости с углом  $\pi\alpha$  при вершине  $A$  и стороной  $d$  (рис. 100). Соответствие точек задано схемой

$$w(A=0, B=d, C=d(1+e^{i\pi\alpha}), D=de^{i\pi\alpha}) \rightarrow z(0, 1, \infty, -1).$$

Обосновать возможность такого отображения.

◀ Пусть функция  $w = f(z)$  осуществляет конформное отображение первого квадранта на треугольник  $ABC$ . При этом

$$f(0) = A, \quad f(1) = B, \quad f(\infty) = C.$$



Согласно свойству соответствия границ, прообразом стороны  $AC$  будет мнимая полуось  $z = iy$  ( $y > 0$ ). По принципу симметрии функция  $f$  аналитически продолжается на всю верхнюю полуплоскость и это продолжение осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости на ромб. При этом  $f(-1) = D$ . По формуле (3), п. 7.1, имеем

$$w = c \int_0^z \zeta^{\alpha-1} (1 - \zeta^2)^{-\alpha} d\zeta.$$

Постоянную  $c$  находим из условия

$$f(1) = d = c \int_0^1 \zeta^{\alpha-1} (1 - \zeta^2)^{-\alpha} d\zeta = \frac{c}{2} B\left(\frac{\alpha}{2}, 1 - \alpha\right),$$

откуда  $c = \frac{2d}{B\left(\frac{\alpha}{2}, 1 - \alpha\right)}$ . Окончательно получаем:

$$w = \frac{2d}{B\left(\frac{\alpha}{2}, 1 - \alpha\right)} \int_0^z \zeta^{\alpha-1} (1 - \zeta^2)^{-\alpha} d\zeta. \blacktriangleright$$

**21.** Найти конформное отображение верхней полуплоскости  $G_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  на область, содержащую первый квадрант, граница которой состоит из полупрямых  $\gamma_1 = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w \leq 0, \operatorname{Im} w = 1\}$ ,  $\gamma_2 = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w \geq 0, \operatorname{Im} w = -1\}$ , а также из отрезка  $[-i, i]$ . Соответствие точек задано схемой

$$w(i, -i, \infty) \rightarrow z(-1, 1, \infty).$$

◀ Согласно формуле (3), п. 7.1, при  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = \infty$ ,  $\alpha_1 = \frac{3}{2}$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{2}$  имеем

$$\begin{aligned} w = f(z) &= C_1 \int_1^z \left( \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right)^{\frac{1}{2}} d\zeta + C_2, \\ w(1) = C_2 = -i, \quad w(-1) = i &= C_1 \int_1^{-1} \left( \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right)^{\frac{1}{2}} d\zeta - i = -C_1 \pi - i, \quad C_1 = -\frac{2i}{\pi}, \\ w = f(z) &= -\frac{2i}{\pi} \int_1^z \left( \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right)^{\frac{1}{2}} d\zeta - i = \frac{2i}{\pi} \left( \sqrt{1-z^2} - \arcsin z \right). \blacktriangleright \end{aligned}$$

**22.** Найти конформное отображение верхней полуплоскости  $G_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  на верхнюю полуплоскость  $D_+ = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}$  с разрезом вдоль луча  $\gamma = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w \leq 0, \operatorname{Im} w = \pi\}$ .

◀ Область в плоскости  $w$  является треугольником с двумя вершинами  $A_1, A_3$  на бесконечности (рис. 101) и углами:  $\alpha_1 \pi$ ,  $\alpha_2 \pi$ ,  $\alpha_3 \pi$ , где

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = -1.$$

Полагаем  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -1$ ,  $a_3 = \infty$ . По формуле Кристоффеля—Шварца получаем:

$$w = f(z) = C_1 \int_{-1}^z \zeta^{-1} (1 + \zeta) d\zeta + i\pi = C_1(z + 1 + \ln z - i\pi) + i\pi. \quad (1)$$

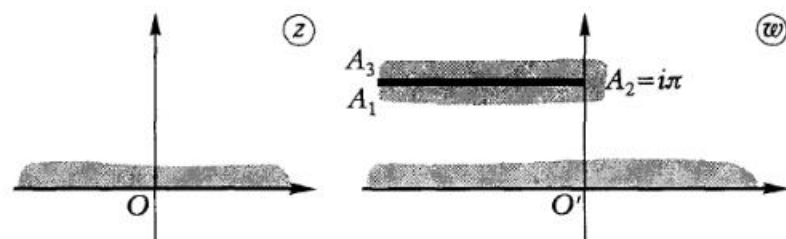


Рис. 101

Для определения  $C_1$  воспользуемся тем, что при обходе точкой  $z$  полуокружности  $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, 0 < \arg z < \pi\}$  по часовой стрелке функция  $w$ , определенная равенством (1), получает приращение  $-i\pi C_1 + O(r)$ . С другой стороны, при этом обходе соответствующая точка  $w$  переходит с луча  $A_1 A_2$  на луч  $A_1 A_3$ . Следовательно, приращение функции  $\Delta w$  мало отличается от  $-i\pi$ . Таким образом,  $C_1 = 1$ . Окончательно имеем

$$w = f(z) = z + 1 + \ln z. \blacktriangleright$$

**23.** Найти конформное отображение верхней полуплоскости  $G_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  на  $w$ -плоскость с разрезами вдоль лучей  $\gamma_1 = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w < 0, \operatorname{Im} w = -\pi\}$  и  $\gamma_2 = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w < 0, \operatorname{Im} w = \pi\}$  (рис. 102), при котором точки  $z = \mp 1$  переходят соответственно в точки  $w = \pm \pi i$ .

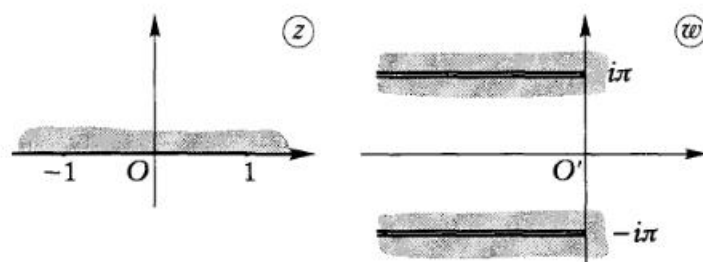


Рис. 102

◀ Введем в рассмотрение вспомогательную  $\zeta$ -плоскость. Функция  $w = \varphi(\zeta) = \zeta + 1 + \ln \zeta$  отображает верхнюю полуплоскость плоскости  $\zeta$  на верхнюю половину области в  $w$ -плоскости (см. предыдущую задачу). При этом действительная положительная полуось  $\gamma = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \zeta > 0, \operatorname{Im} \zeta = 0\}$  переходит в действительную ось  $w$ -плоскости. По принципу симметрии функция  $\zeta \mapsto \varphi(\zeta)$  аналитически продолжается через эту полуось в нижнюю полуплоскость и это продолжение конформно отображает  $\zeta$ -плоскость с разрезом по отрицательной действительной полуоси на всю заданную в  $w$ -плоскости область. Отобразив  $\zeta$ -плоскость на верхнюю полуплоскость  $G_+$ , окончательно получим:

$$w = -z^2 + 1 + 2 \ln z - i\pi. \blacktriangleright$$

**24.** Найти образ верхней полуплоскости  $G_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  при отображении

$$w = f(z) = \int_a^z \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - b)\sqrt{\zeta - a}} \quad (0 < a < b).$$

Найти расстояние между параллельными полупрямыми для каждой из пар, составляющих границу области.

◀ По виду функции  $f$  заключаем, что искомая область является четырехугольником с двумя вершинами на бесконечности:  $a_1 = 0, \alpha_1 = 0, A_1 = \infty; a_2 = a, \alpha_2 = \frac{1}{2}, A_2 = 0; a_3 = b, \alpha_3 = 0, A_3 = \infty; a_4 = \infty, \alpha_4 = \frac{3}{2}, A_4$  — требуется найти.

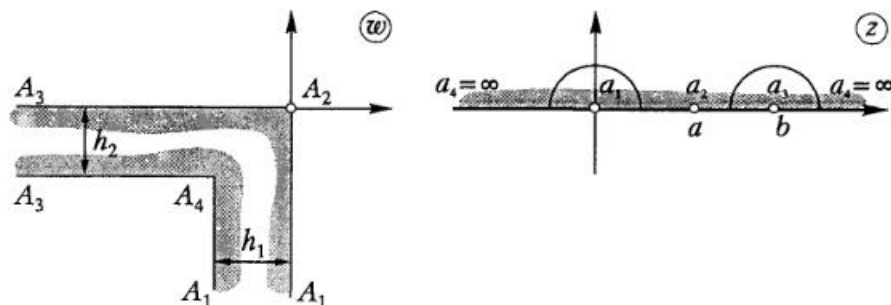


Рис. 103

Исследуем поведение производной  $f'(z)$  на интервале  $(a_2, a_3)$ . Имеем

$$f'(z) = \frac{1}{z(z-b)\sqrt{z-a}}, \quad f'(z) < 0 \quad \forall z \in (a_2, a_3),$$

т. е.  $\arg f'(z) = \pi$  и образом интервала  $(a_2, a_3)$  является отрицательная действительная полуось. Принимая во внимание, что  $a_2 = \frac{1}{2}$ , образом интервала  $(a_1, a_2)$  будет отрицательная мнимая полуось. Теперь очевидно, что вершина  $A_4$  принадлежит третьему квадранту, а сама область имеет вид, изображенный на рис. 103.

Чтобы найти  $h_1$ , рассмотрим приращение функции  $\Delta w$  при обходе точкой  $z$  полуокружности  $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} \mid z = re^{i\varphi}, 0 < \varphi < \pi\}$ :

$$\Delta w = - \int_{\Gamma_r} \frac{d\zeta}{ib\sqrt{a}\zeta} + O(r) = - \frac{\pi}{b\sqrt{a}} + O(r), \quad \Gamma_r = (\gamma_r, \gamma_r^{\text{op}}).$$

Следовательно,  $h_1 = \frac{\pi}{b\sqrt{a}}$ . Аналогично находим  $h_2$ , определяя приращение функции  $w$  при обходе точкой  $z$  полуокружности с центром в точке  $b$ :

$$h_2 = \frac{\pi}{b\sqrt{b-a}}.$$

При  $b = 2a$ ,  $h_1 = h_2$ . ►

**25.** Найти конформное отображение круга  $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  на внутренность  $n$ -конечной звезды —  $2n$ -угольника, стороны которого, а также углы (через один), равны.

◀ Пусть тупой угол звезды равен  $\pi(1 + \lambda)$ , тогда ее острый угол равен  $\pi(1 - \lambda - \frac{2}{n})$ . Используя принцип симметрии, считаем, что прообразы вершин острых углов являются корнями  $n$ -й степени из единицы, а прообразы вершин тупых углов — корнями  $n$ -й степени из  $-1$ . По формуле Кристоффеля—Шварца получаем:

$$w = f(z) = C \int_0^z \frac{(1 + \zeta^n)^\lambda d\zeta}{(1 - \zeta^n)^{\lambda + \frac{2}{n}}}, \quad 0 < \lambda < 1 - \frac{2}{n}.$$

Принимая во внимание, что  $f(1) = A_1$ , находим  $C$ . ►

**26.** Найти вид функции, осуществляющей конформное отображение внешности единичного круга на внешность произвольного  $n$ -угольника с внешними углами  $\alpha_k \pi$ .

◀ Требуемую функцию получим с помощью формулы (5), п. 7.6, заменой  $z = \frac{1}{z_1}$ , отображающей единичный круг на его внешность:

$$w = f\left(\frac{1}{z}\right) = C_1 \int_{z_0}^{\frac{1}{z_1}} \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} \frac{d\zeta}{\zeta^2} + C_2.$$

Заменив переменную интегрирования, полагая  $\zeta = \frac{1}{\zeta_1}$  и приняв во внимание равенство

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = n + 2,$$

преобразуем полученную формулу к виду

$$w = f_1(z_1) = C'_1 \int_{z_0}^{z_1} \prod_{k=1}^n (\zeta_1 - a'_k)^{\alpha_k - 1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1^2} + C'_2. \quad (1)$$

**27.** Найти конформное отображение внешности круга  $K$   $K' = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$  на внешнюю часть правильного  $n$ -угольника с вершинами в точках  $A_k = e^{i \frac{2\pi(k-1)}{n}}$  ( $k = \overline{1, n}$ ), которые остаются неподвижными при этом отображении.

◀ Отображающая функция определяется формулой (1) предыдущей задачи при  $\alpha_k = 1 + \frac{2}{n}$ ,  $a'_k = A_k$ ,  $C'_2 = 1$ ,  $z_0 = 1$ , а  $C'_1$  определяется из равенства  $A_1 = f_1(A_1)$ :

$$C'_1 = \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1}{\int_1^{e^{\frac{2\pi i}{n}}} (\zeta^n - 1)^{\frac{2}{n}} \frac{d\zeta}{\zeta^2}} = \frac{e^{\frac{\pi i}{n}} 2i \sin \frac{\pi}{n}}{i \int_0^{\frac{2\pi}{n}} e^{-i\theta} (e^{in\theta} - 1)^{\frac{2}{n}} d\theta} = \frac{n \sin \frac{\pi}{n}}{2^{\frac{2}{n}} \int_0^{\pi} (\sin \varphi)^{\frac{2}{n}} d\varphi}.$$

### Упражнения для самостоятельной работы

1. Доказать, что при  $\lambda > 1$  уравнение  $ze^{\lambda-z} = 1$  имеет в круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  лишь один и притом действительный корень.
2. Сколько корней имеет в круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  уравнение  $e^z - 4z^n + 1 = 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ )?
3. Доказать, что уравнение  $e^z = az^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) при  $a > e$  имеет в круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$   $n$  корней.
4. Сколько корней имеет в круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  уравнение

$$z^n + \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = 0,$$

если  $|\alpha_0| > |\alpha_1| + |\alpha_2| + 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ )?

5. Доказать, что уравнение  $z^4 + az + b = 0$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ) имеет в первом квадранте один и только один корень, и его аргумент больше  $\frac{\pi}{4}$ .
6. Доказать, что уравнение  $(z-1)e^z = z-2$  не имеет решений с отрицательной действительной частью.

7. Доказать, что уравнение  $F(z) = b$ , где  $F(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z-a_k}{4-\bar{a}_k z}$ ,  $|a_k| < 2 \forall k = \overline{1, n}$  и  $|b| < 2^{-n}$  имеет в круге  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$   $n$  корней.

8. Разложить в ряд по степеням  $w$  функцию  $z = g(w)$ , определенную уравнением  $w = e^{-az}(e^z - 1)$ ,  $a \in \mathbb{N}$  и условием  $g(0) = 0$ . Найти радиус  $R$  сходимости полученного степенного ряда.

9. Доказать, что внутри области, ограниченной линией уровня модуля функции  $f$  (т.е. линией, во всех точках которой  $|f(z)| = \text{const}$ ) и компактно принадлежащей области аналитичности  $f$ , найдется хотя бы один нуль этой функции ( $f \neq \text{const}$ ).

10. Доказать, что когда  $P(z)$  — многочлен степени  $n$  и  $|P(z)| \leq M \forall z \in \bar{K} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ , то  $\forall z \in K' = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$   $|P(z)| \leq M|z|^n$ .

11. Пусть  $P(z)$  — многочлен степени  $n$ ,  $E_1, E_2$  — два софокусных эллипса с полуосями  $a_1, b_1$  и  $a_2, b_2$  ( $a_1 < a_2, b_1 < b_2$ ) и пусть, далее,  $M_1 = \max_{z \in E_1} |P(z)|$ ,  $M_2 = \max_{z \in E_2} |P(z)|$ . Доказать, что

$$\frac{M_1}{(a_1+b_1)^n} \geq \frac{M_2}{(a_2+b_2)^n}.$$

12. Пусть функция  $f$  аналитическая в круге  $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ , удовлетворяет при  $|z| = R$  неравенству  $|f(z)| \leq M$  и обращается в нуль в точках  $z_1, z_2, \dots, z_n$  этого круга. Доказать неравенство

$$|f(z)| \leq M \prod_{k=1}^n \frac{R|z - z_k|}{|R^2 - \bar{z}z_k|} \quad (|z| < R).$$

13. Пусть функция  $f$  аналитическая в круге  $\bar{K}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$  и удовлетворяет  $\forall z \in \bar{K}_R$  неравенству  $|f(z)| \leq M$ , а  $f(0) = 0$ . Доказать, что  $|f'(0)| \leq \frac{M}{R}$ , причем знак равенства возможен только для функции

$$f(z) = M e^{i\varphi} \frac{z}{R}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

14. Пусть  $-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_n < +\infty$ ,  $0 < \alpha_k < 1$  ( $k = \overline{1, n}$ ),  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2$ . Доказать, что любая ветвь функции

$$z \mapsto f(z) = \int_0^z \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta$$

в полуплоскости  $G_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  однолистая в этой полуплоскости и конформно отображает ее на конечный выпуклый  $n$ -угольник.

15. Найти область, на которую функция

$$z \mapsto w(z) = \int_0^z \frac{(1+\zeta^n)^\lambda d\zeta}{(1-\zeta^n)^{\frac{1}{n}+\lambda}}, \quad w'(0) > 0, \quad -1 < \lambda < 1 - \frac{2}{n}$$

отображает единичный круг  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

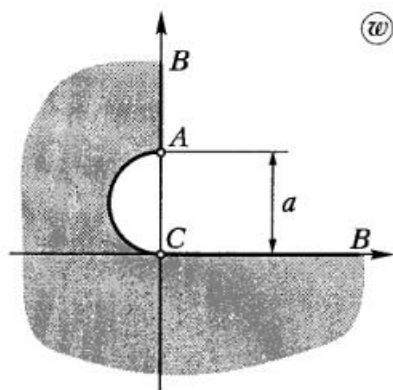


Рис. 104

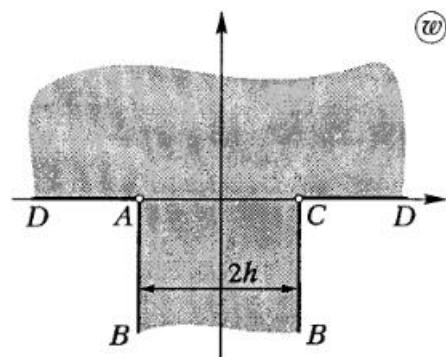


Рис. 105

16. Отобразить верхнюю полуплоскость на область, указанную на рис. 104 (дуга AC — полуокружность) при заданном соответствии точек

$$w(A = ai, B = \infty, C = 0) \rightarrow z(0, 1, \infty).$$

17. Отобразить верхнюю полуплоскость  $G_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  на область  $w$ -плоскости, указанную на рис. 105, при условии

$$w(A = -h, B = \infty, C = h, D = \infty) \rightarrow z(-1, 0, 1, \infty).$$

## Глава 2

1. а)  $i$ ; б)  $\sin \theta - \frac{1}{2}$ . 2.  $w = k\bar{z}$ . 10.  $S_n = \frac{1}{\sin^n x} \frac{2 \sin^{n+2} x - 2 \sin^{n+1} x \cos x + \sin^n x \cos^2 x - \sin^{n-1} x \cos^3 x + \dots + \sin^2 x \cos^{n-2} x - \sin x \cos^{n-1} x + \cos^n x}{1 - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x}$ ,  $\sigma_n = \frac{1}{\sin^n x} \frac{\sin^{n+2} x - \sin^{n+1} x \cos x - \sin x \cos^{n+1} x + \cos^{n+2} x}{1 - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x}$ . 12. а)  $z^* = \frac{z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1 + \bar{z}(z_1 - z_2)}{z_2 - z_1}$ ; б)  $z - z_1 = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1} (\bar{z} - \bar{z}_1)$ . 16.  $z_1 = -1$ ,  $w_1 = 1$ . 19. а) Окружность с центром в точке  $a$  радиуса  $R$ ; б) прямая  $x+y=1$ ; в) луч, выходящий из начала координат и образующий с положительным направлением действительной оси угол  $\alpha$ ; г) действительная ось; д) гипербола  $(x - \frac{1}{2})^2 - y^2 = \frac{1}{4}$ ; е) эллипс  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ ; ж) парабола  $y^2 = 2x + 1$ . 20. а)  $\operatorname{Im} z^2 = 2$ ; б)  $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ ; в)  $z^2 + \bar{z}^2 = 1$ ; г)  $\operatorname{Re}(z+1) = |z|$ ; д)  $|z| + \operatorname{Re} z = 1$ . 21. а) Кольцо с центром в точке  $z_0$  и радиусами  $r$  и  $R$ ; б) правая полуплоскость, включая мнимую ось; в) полоса между прямыми  $x=a$  и  $x=b$ ; г) область, заключенная между окружностями  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$  и  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$ ; д) правая половина единичного круга с центром в точке  $z=0$ . 22.  $z = 12 + 16i$ . 24. а) Ни при каких  $a$ ; б)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ; в)  $\sqrt{2}$ ; г) ни при каких  $a$ . 25. а)  $\frac{9}{2} + i$ ; б)  $\frac{1}{(1-z)^2}$ . 30. б) Отрезок  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . 31. 1) Окружность  $u^2 + v^2 - \frac{u}{c} = 0$ , если  $c \neq 0$ ; при  $c=0$  — ось  $u=0$ ; 2) окружность  $u^2 + v^2 + \frac{v}{c} = 0$ , если  $c \neq 0$ ; при  $c=0$  — ось  $v=0$ ; 3) окружность  $(u - \frac{1}{2})^2 + (v + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$ ; 4) луч  $\arg w = -\alpha$ ; 5) прямая  $v = \frac{1}{2}$ ; 6)  $v = -|u|$ ; 7) полуплоскость  $u > 0$  без круга  $u^2 + v^2 - u \leq 0$ ; 8) полуплоскость  $v < 0$  без круга  $u^2 + v^2 + v \leq 0$ ; 9) окружность  $x^2 + y^2 - \frac{x}{c} = 0$ , если  $c \neq 0$ ; при  $c=0$  — ось  $x=0$ ; 10) окружность  $x^2 + y^2 + \frac{y}{c} = 0$ , если  $c \neq 0$ ; при  $c=0$  — ось  $y=0$ . 32. а) Внешность круга  $|z| \leq 2$ ; б) замкнутая полуплоскость, расположенная слева от прямой  $\operatorname{Re} z = 2,5$ ,  $z \neq 1$ . 34. 1) Эллипс; 2) спираль Архимеда; 3) одна ветвь гиперболы; 4) циклоиды. 35. 1)  $\infty$ ; 2) 1; 3)  $\infty$ ; 4)  $-\frac{1}{2}$ ; 5) не существует; 6)  $1+i$ ; 7) не существует; 8) не существует; 9) не существует. 36. 1) Непрерывная; 2) непрерывная; 3) всюду разрывная; 4) непрерывная всюду, кроме  $z=2i$ ; 5) непрерывная всюду, кроме прямых  $\arg z = \pm \frac{\pi}{2}$ . 40. 1) Аналитическая в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ; 2) не аналитическая в каждой точке  $z \in \mathbb{C}$ , но дифференцируемая в точке  $z=0$ ; 3) не аналитическая в каждой точке  $z \in \mathbb{C}$ . 42.  $\frac{3}{2}$ . 44. а)  $f(z) = z^2 + 2z$ ; б)  $f(z) = e^z + z^2 + 5z + 9$ .

## Глава 3

1. Линия  $\operatorname{Re} w = 4 \cos \varphi (2 \cos \varphi + 1) - 3$ ,  $\operatorname{Im} w = 4 \sin \varphi (2 \cos \varphi + 1)$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . 3. Круг  $|w| < 1$ . 5. Круг  $|w| < 4$ . 6. Полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$ . 7. Круг  $|w| \leq 1$ . 8. Круг  $|w| \leq 1$ . 10. а)  $\operatorname{Im} w > 0$ ; б)  $\operatorname{Im} w > 0$ ; в)  $\operatorname{Im} w < 0$ . 11.  $w = e^{i\frac{\pi}{4}} z^3$ . 12.  $w = -i(z-1-i)^2$ . 13.  $w = i(z-1)^2$ . 14.  $w = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z-a)^2$ . 15.  $w = -iz^2 + 1$ . 16.  $w = (1+i)(1-z)$ . 17.  $w = (2+i)z + 1 - 3i$ . 18. 1)  $z_0 = -1 + 3i$ ,  $\theta = 0$ ,  $k = 2$ ,  $w + 1 - 3i = 2(z + 1 - 3i)$ ; 2)  $z_0 = 2 + 2i$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $k = 1$ ,  $w - 2 - 2i = i(z - 2 - 2i)$ ; 3) конечной неподвижной точки нет; 4) если  $a = 1$ , то конечной неподвижной точки нет; если  $a \neq 1$ , то  $z_0 = \frac{w_1 - a z_1}{1 - a}$ ,  $\theta = \arg a$ ,  $k = |a|$ ,  $w - \frac{w_1 - a z_1}{1 - a} = a(z - \frac{w_1 - a z_1}{1 - a})$ ; 5) если  $a = 1$ , то конечной неподвижной точки нет; если  $a \neq 1$ , то  $z_0 = \frac{b}{1-a}$ ,  $\theta = \arg a$ ,  $k = |a|$ ,  $w - \frac{b}{1-a} = a(z - \frac{b}{1-a})$ . 19. Уравнение семейства окружностей Аполлония относительно точек  $z_1$  и  $z_2$  имеет вид  $|\frac{z-z_1}{z-z_2}| = \lambda$ . 20.  $w = k \exp\left(\frac{1}{2}\left(\pi + \arg \frac{z_2}{z_1}\right)i\right) \cdot \frac{z-z_1}{z-z_2}$ , где  $k > 0$ . Лучам, выходя-

щим из точки  $w = 0$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} w > 0$ , соответствуют в  $z$ -плоскости дуги окружностей, лежащие внутри круга  $|z| < 1$  и проходящие через точки  $z_1, z_2$ . Лежащим в полуплоскости  $\operatorname{Re} w > 0$  полуокружностям с центром в точке  $w = 0$  соответствуют находящиеся внутри круга  $|z| < 1$  дуги окружностей Аполлония относительно точек  $z_1$  и  $z_2$ . 21.  $w_0 = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_2}$ ,  $R = \frac{|z_2 - z_1|}{2|\operatorname{Im} z_2|}$ .

22. 1)  $w = R^2 e^{i\alpha} \frac{z-a}{R^2 - \bar{a}z}$ ; 2)  $\frac{w-b}{R^2 - \bar{b}w} = e^{i\alpha} \frac{z-a}{R^2 - \bar{a}z}$ ; 3)  $w = R^2 \frac{z-a}{R^2 - \bar{a}z}$ , где  $a$  — действительное число и  $|a| < R$ . 23.  $\frac{w-a}{1-\bar{a}w} = e^{i\varphi} \frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}$ , где  $\varphi = \pi - \arg \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2}$ ,  $a = \frac{|z_2 - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| + \sqrt{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}}$ .

24.  $w = \pm \frac{a-z + \sqrt{1-a^2}}{(1-\sqrt{1-a^2})z-a}$ ,  $\rho = 2 \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$ . 27. 1)  $|m| \leq \frac{1}{n}$ . Область ограничена удлиненной эллипсисоидой, т.е. траекторией точки, находящейся на расстоянии  $mR$  от центра круга радиуса  $\frac{R}{n}$ , катящегося извне по кругу радиуса  $\frac{R(n-1)}{n}$ ; 2)  $|m| \leq \frac{1}{n}$ . В первом случае внешность единичного круга, а во втором случае его внутренность, отображаются на внешность "укороченной" гипоциклоиды. 28.  $w = \sqrt{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ . 29.  $w = \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{z} - 1}{\frac{1}{z} + 1}\right)^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2\beta}}$ . 30.  $w =$

$$\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{z} - 1}{\frac{1}{z} + 1}\right)^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2\beta}}. \quad 31. w = \sqrt{\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} + a + \frac{1}{a} \right)}. \quad 32. w = \sqrt{\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} + a + \frac{1}{a} \right)}. \quad 33. w + \frac{1}{w} = \frac{4a}{(1+a)^2} \left( z + \frac{1}{z} \right) - 2 \frac{(1-a)^2}{(1+a)^2};$$

$$w'(0) = \frac{(1+a)^2}{4a}. \text{ Длина дуги, соответствующей разрезу, равна } 2\arccos \frac{6a-1-a^2}{(1+a)^2}; \text{ она равна } \pi \text{ при}$$

$$a = 3 - \sqrt{8}. \quad 34. w + \frac{1}{w} = 2 \frac{z + \frac{1}{z} - \left( a + \frac{1}{a} \right) + \left( b + \frac{1}{b} \right)}{\left( a + \frac{1}{a} \right) + \left( b + \frac{1}{b} \right)}; \quad w'(0) = \frac{a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}}{4}. \text{ Длины дуг, соответ-$$

$$\text{ствующих разрезам, равны } 2\arccos \frac{4 - \left( a + \frac{1}{a} \right) + \left( b + \frac{1}{b} \right)}{\left( a + \frac{1}{a} \right) + \left( b + \frac{1}{b} \right)}, \quad 2\pi - 2\arccos \frac{-4 - \left( a + \frac{1}{a} \right) + \left( b + \frac{1}{b} \right)}{\left( a + \frac{1}{a} \right) + \left( b + \frac{1}{b} \right)}. \quad 35. \frac{w-1}{w+1} =$$

$$\left( \frac{ze^{i\gamma} + i \exp\left(\frac{i\beta}{2}\right)}{ze^{i\gamma} + i \exp\left(-\frac{i\beta}{2}\right)} \right)^2, \text{ где } \gamma = \alpha, \text{ если } \beta > 0, \text{ и } \gamma = \alpha + \pi, \text{ если } \beta < 0. \quad 36. 1) \text{ В полярную сетку}$$

$\rho = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$ ; 2) в спирали  $\rho = e^{\frac{\theta-b}{k}}$  (при  $k = 0$  в лучи  $\theta = b$ ); 3) в угол  $\alpha < \theta < \beta$  (при  $\alpha = 0$  и  $\beta = 2\pi$  — в плоскость с разрезом по положительной части действительной оси); 4) во всю плоскость с разрезом по спирали  $\rho = e^{\theta}$ ; 5) в сектор  $\rho < 1$ ,  $0 < \theta < \alpha$  (при  $\alpha = 2\pi$  — в единичный круг с разрезом по радиусу  $v = 0$ ,  $0 \leq u \leq 1$ ); 6) в область  $\rho > 1$ ,  $0 < \theta < \alpha$  (при  $\alpha = 2\pi$  — во внешность единичного круга с разрезом по лучу  $v = 0$ ,  $1 \leq u < \infty$ ); 7) в область  $e^\alpha < \rho < e^\beta$ ,  $\gamma < \theta < \delta$  (при  $\delta - \gamma = 2\pi$  эта область является концентрическим кольцом с разрезом по отрезку  $\theta = \gamma$ ,  $e^\alpha \leq \rho \leq e^\beta$ ). 37. 1) В прямоугольную декартову сетку  $u = c$ ,  $v = c$ ; 2) в прямые; 3) в полосу  $0 < v < \alpha$ ; 4) в полуполосу  $u < 0$ ,  $0 < v < \alpha$ ; 5) в прямоугольный  $\ln r_1 < u < \ln r_2$ ,  $0 < v < 2\pi$ . 38. 1) В полуполосу  $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ ,  $v > 0$ ; 2) в полосу  $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ ;

3) в полуполосу  $0 < u < \frac{\pi}{2}$ ,  $v > 0$ ; 4) в полосу  $-\frac{\pi}{2} < u < 0$ . 41.  $w = \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}-1}(\sqrt{z}-i)\right)$ .

$$42. w = -\frac{\exp\left(\pi i \frac{z+i}{z-1}\right) + 2-i}{\exp\left(\pi i \frac{z+i}{z-1}\right) + 2+i}. \quad 43. w = \sqrt{\frac{\cos \pi z - \cos \pi h_1}{\cos \pi z + \cos \pi h_2}}. \quad 44. w = \sqrt{\frac{\cos 2z + \operatorname{ch} 2h_1}{\cos 2z + \operatorname{ch} 2h_2}}. \quad 45. w = \sqrt{\frac{\sin \frac{x}{\alpha}}{1 + \sin \frac{x}{\alpha}}}.$$

$$46. w = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{4\pi}{\alpha}}{\cos \frac{4\pi}{\alpha} - \cos \frac{4\pi}{\alpha}}}. \quad 47. w = \sqrt{\frac{\cos \frac{4\pi}{\alpha} - \cos \frac{4\pi}{\alpha}}{\cos \frac{4\pi}{\alpha} - \cos \frac{4\pi}{\alpha}}}. \quad 48. w = \sqrt{\frac{\exp\left(-\frac{2\pi}{\beta}\right) - \exp\left(\frac{2\pi i}{\alpha}\right)}{\exp\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - \exp\left(\frac{2\pi i}{\alpha}\right)}}.$$

## Глава 4

1. а) 0; б)  $\pi i$ . 2. а)  $e(2 - e^{-1} - 1)$ ; б)  $1 + e^{-1}(e - 2)$ . 3. а) 1; б) 2; в) 2. 4. а)  $\frac{e-1}{8}(1 + i\sqrt{3})$ ; б)  $\frac{1}{8}(1 - i\sqrt{3}) \left( \exp\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{3}\right) - 1 \right)$ . 5.  $-\ln \sqrt{\operatorname{sh}^2 1 + \operatorname{ch}^2 1} + i \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{th} 1)$ . 6.  $\pi i$ . 12. 0.

$$15. \text{ а) } f(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } |z| < 1, \\ -\frac{1}{z}, & \text{если } |z| > 1; \end{cases} \quad \text{б) } g(z) = \begin{cases} -\frac{1}{2z}, & \text{если } \left|z + \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{3}, \\ -\frac{1}{2z}, & \text{если } |z| > 1, \\ \frac{2z+5}{2(2z^2+5z+2)}, & \text{если } z \in D. \end{cases}$$

## Глава 5

1. а)  $\frac{1}{4}$ ; б) 1; в) 1; г)  $\sqrt[3]{3}$ ; д) 1. 2. а)  $|z+i| < 1$ ; б)  $|z-1-i| < 3$ ; в)  $|z| < 1$ ; г)  $|z| < 1$ ; д)  $|z| < \frac{1}{3}$ ; е)  $|z| < \frac{1}{3}$ ; ж)  $|z| < +\infty$ ; з) если  $\alpha$  — целое неотрицательное, то  $|z| < +\infty$ ; для остальных  $\alpha$  — круг  $|z| < 1$ . 3. а) Сходится во всех точках окружности  $|z| = 1$ ; б) сходится во всех точках окружности  $|z| = \frac{1}{4}$ , кроме  $z = \frac{1}{4}$ ; в) сходится во всех точках окружности  $|z| = 1$ , кроме  $z = -1$  и  $z = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$ ; г) сходится во всех точках окружности  $|z| = 1$ , кроме  $z = 1$  и  $z = \pm i$ ; д) сходится во всех точках окружности  $|z| = 1$ , кроме  $z = 1$  и  $z = \pm i$ . 4. а)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^{6n}$ ,  $|z| < 1$ ;
- б)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2^{3n+2} z^{3n+2} - 2^{3n} z^{3n})$ ,  $|z| < \frac{1}{2}$ ; в)  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z^{8n} - z^{8n+1})$ ,  $|z| < 1$ ; г)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} \frac{z^{4n}}{(4n)!}$ ,  $|z| < +\infty$ . 6. а)  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) \frac{z^n}{n}$ ,  $|z| < 1$ ; б)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)}$ ,  $|z| < +\infty$ . 7. а)  $1 + 2z + \frac{19}{6}z^2 + \dots$ ,  $|z| < 1$ ; б)  $1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{12} + \dots$ ,  $|z| < 1$ . 8. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2^{n+1}}$ ,  $|z| < 1$ ; б)  $1 - \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{z^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots$ ,  $|z| < +\infty$ ; в)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n} (n!)^2}{(2n)!} z^{2n}$ ,  $|z| < 1$ . 13. а) Пустое множество; б) кольцо  $0 < |z| < \infty$  при  $|a| > 1$  и пустое множество при  $|a| \leq 1$ ; в) кольцо  $\frac{1}{|a|} < |z| < |a|$  при  $|a| > 1$  и пустое множество при  $|a| \leq 1$ . 14. а)  $e^2 \left( \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \right) (z-1)^n \right)$  при  $0 < |z-1| < \infty$ ;
- б)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}$  при  $0 < |z| < 1$  или  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! z^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$  при  $|z| > 1$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^n$  при  $|z| < 1$  или  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{z^{n+1}}$  при  $|z| > 1$ . 15. а)  $\frac{1}{9} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+7}{4^{n+2}} z^{2n} \right)$ ; б)  $\frac{1}{9} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(3n-7)4^{n-2}}{z^{2n}}$ ; в)  $\frac{1}{z} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n-1}$ , где  $a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi k)^{2n}} \forall n \in \mathbb{N}$ ; г)  $\frac{3}{z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{2n}}{z^{2n+1}} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n-1}$ ,  $a_n = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\pi k)^{2n}} \forall n \in \mathbb{N}$ . 18. а) Правильная точка; б) полюс 5-го порядка; в) простой полюс; г) полюс 3-го порядка; д) существенно особая точка. 19. а) Существенно особая точка; б) существенно особая точка; в) полюс 4-го порядка; г) нуль 4-го порядка. 20. а)  $z = 1$  — существенно особая точка,  $z = 2k\pi i$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) — простые полюсы,  $z = \infty$  — неизоллированная особая точка (предельная точка множества полюсов); б)  $z = -\frac{\pi}{4} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) — простые полюсы,  $z = \infty$  — неизоллированная особая точка; в)  $z = (2k+1)\pi i$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) — простые полюсы,  $z = \infty$  — неизоллированная особая точка.

## Глава 6

1.  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(1+i)^{n+1}}$ ,  $z \in K'$ . 2.  $f_1(z) = \ln |z| + 2\pi i + i \arg z$ ,  $f_2(z) = \ln |z| + i \arg z$ ,  $z \in D_2$ . 6.  $z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{2^n n! (2n+1)} z^{2n+1}$ . 7. Нет. 9. Сумма ряда совпадает с  $z$  при  $0 < \delta < |z| < 1$  и соответственно с  $\frac{1}{z}$  при  $|z| > 1$ ; нет.



## Глава 7

1. а)  $\operatorname{res}_{z_k} f(z) = \frac{z_k^{n+1}}{n}$ , где  $z_k = e^{i \frac{2k+1}{n} \pi}$  ( $k = 0, n-1$ );  $\operatorname{res}_{\infty} f(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1, \\ -1, & \text{если } n = 1. \end{cases}$  б)  $\operatorname{res}_{-1} f(z) = (-1)^{n+1} c_{2n+1}^{n+1}$ ;  $\operatorname{res}_{\infty} f(z) = (-1)^n c_{2n+1}^{n+1}$ ; в)  $\operatorname{res}_{\infty} f(z) = 0$ ; г)  $\operatorname{res}_{\infty} f(z) = 0$ ; д)  $\operatorname{res}_{-1} f(z) = \frac{1}{e}$ ;  $\operatorname{res}_{\infty} f(z) = -\frac{1}{e}$ ;  
е)  $\operatorname{res}_{\infty} f(z) = e^b - e^a$ . 2. а)  $\operatorname{res}_{-i} f(z) = \frac{4}{9} i \operatorname{sh} 2$ ;  $\operatorname{res}_{\frac{i}{2}} f(z) = -\frac{4}{9} i (e + 2e^{-1})$ ; б)  $\operatorname{res}_0 f(z) = -\frac{4}{\pi^2}$ ;  $\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} f(z) = 0$ .  
3. -n. 4.  $-2e^{i2k\pi a}$ . 8. а)  $2(1 - e^{-1})\pi i$ ; б) 0; в) 0. 10. а)  $-2\pi i$ , если  $\operatorname{Ln}(z-2)|_{z=1} = -\pi i$  и 0 для остальных ветвей; б) 0 для всех ветвей; в) 0, если  $\sqrt{z}|_{z=1} = 1$  и  $-4\pi i e$ , если  $\sqrt{z}|_{z=1} = -1$ .  
11. а) 0; б)  $\frac{2}{3}\pi(1+2i)$ . 13.  $f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z(2n-z)}{n(z-n)^2}$ . 16. а)  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < e^{-1}\}$ ; б)  $\mathbb{C}$ .

## Глава 8

2. n. 4. 2. 8.  $g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{an}^n \frac{w^n}{a^n}$ ;  $R = |(a-1)^{a-1} a^{-a}|$ . 15. На многоугольную звезду с углами  $\pi - \frac{2\pi}{n} - \lambda\pi$  и  $\pi + \lambda\pi$  попеременно, с центром в начале координат и одной из вершин первого вида углов в точке  $w(1) = 2^{-\frac{2}{n}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2} - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right) \sin \frac{\pi(1+\lambda)}{2}}{\sin \frac{\pi}{n}}$ . 16.  $w = \frac{a}{\zeta}$ , где  $\zeta = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2t}{1-t^2} + \ln \frac{1-t}{1+t} \right)$ ,  $t = \sqrt{\frac{z-1}{z}}$ . 17.  $w = \frac{2h}{\pi} \left( \sqrt{z^2 - 1} + \arcsin \frac{1}{z} \right)$ .

# Литература

1. *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1972.
2. *Волковський Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1970.
3. *Грищенко А. Е., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П.* Теория функций комплексного переменного, — Киев: Вища школа, 1986.
4. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. — М.: Наука, 1965.
5. *Евграфов М. А.* Сборник задач по теории аналитических функций. — М.: Наука, 1969.
6. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1958.
7. *Ляшко И. И., Емельянов В. Ф., Боярчук А. К.* Основы классического и современного математического анализа. — Киев: Вища школа, 1988.
8. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. — М.: Физматгиз, 1961.
9. *Mitrinotić D. S.* Kompleksna analiza: Zbornik zadatka i problema. — Beograd: Naučna kniga, 1972.
10. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1967.
11. *Соколов Ю. Д.* Елементи теорії функцій комплексної змінної. — Киев: Радянська школа, 1954.
12. *Титчмарш Е.* Теория функций. — М.: Наука, 1980.
13. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1976.

# Предметный указатель

Настоящий предметный указатель призван облегчить поиск терминов по алфавитному признаку. Для поиска терминов по тематическому признаку пользуйтесь подробно составленным оглавлением.

В настоящем предметном указателе, как правило, приводятся ссылки на страницу, где термин определяется. Составитель указателя не ставил своей целью отследить все упоминания приведенных терминов в книге. Исключения составляют термины, описывающие методы, приемы, практические результаты: для них в некоторых случаях указаны также задачи, в которых они используются. Номера задач указаны курсивом по схеме "число:число", где первое число — номер главы, второе — порядковый номер задачи.

## А

### *Абеля*

- теорема, 202
- — вторая, 207–208
- — первая, 207
- тождество, 202
- абсолютное значение
  - в поле, 11
  - в теле, 11
- автоморфизм конформный, 312
- аддитивность
  - интеграла относительно пределов интегрирования, 151
  - криволинейного интеграла, 159
- аксиома индукции, 5
- аксиомы
  - абсолютного значения, 11
  - векторного пространства, 11
  - длины, 11
  - метрики, 12
  - модуля, 11
  - нормы, 11
- Аполлония* окружность, 41
- аргумент комплексного числа, 28
  - , главное значение, 28
- Архимеда* спираль, 40

## Б

### *Бернулли*

- лемниската, 59
- числа, 215
- Бесселя* функция, 226
- бета-функция *Эйлера*, 328
- Больцано*—*Вейерштрасса* теорема, 47
- Бореля*—*Лебега* теорема, 48 2:60

## В

### *Вейерштрасса*

- бесконечное произведение, 268
- мажорантный признак равномерной сходимости функционального ряда, 201
- теорема, 50, 204–205
- о представлении целой функции в виде бесконечного произведения, 269

### вектор-функция, 50

### векторное пространство над полем, 11

### векторы, 11

### ветви многозначной функции однозначные, 92

### ветви многозначной функции $L$ и $l$ главная, 96

### *Виета* теорема, 2:21, 2:40, 2:41

### внешность простой замкнутой кривой, 52

### внутренность

### — множества, 15

### — простой замкнутой кривой, 52

### вычет

- аналитической функции относительно ее изолированной особой точки, 245
- функции
- — логарифмический, 296
- — относительно бесконечности, 246

## Г

### *Гаусса* утверждение, 37

### *Гейне* определение

- непрерывности отображения в точке, 21
- предела отображения, 21

### *Гельдера* условие, 179

### главное значение

### — аргумента комплексного числа, 28

### — интеграла типа *Коши* в точке, 179

### гомеоморфизм, 25

### гомотопия

### — замкнутой кривой в замкнутую кривую, 161

### — кривой в кривую, 161

### — с фиксированным началом и концом, 161

### граница множества, 17, 45

### график отображения, 8, 9

### группа, 10

### — абелева, 10

### — автоморфизмов области, 312

### — аддитивная, 10

### — коммутативная, 10

### — мультипликативная, 10

### *Гурвица* теорема, 311

## Д

### *Д'Аламбера* признак, 2:51

### действительная часть

### — комплексного числа, 27

### — функции, 48

### деформация одной кривой в другую, 161

### диаметр множества, 14

### *Дирихле*

### — теорема, 155, 203

### — признак, 5:8, 5:11

### дифференциал функции в точке, 66

### дифференцируемость вектор-функции на сегменте, 51

### длина в векторном пространстве, 11

### долгота, 31

### дополнение одного множества в другом, 6

## Ж

### *Жордана*

### — лемма, 275, 7:59

### — теорема, 52

Жуковского функция, 99, 318, 3:28, 3:72, 3:74, 3:87–93,  
3:95, 3:97, 3:99, 3:100, 3:101

## З

замыкание множества, 16, 45

знаки

— включения, 5

— принадлежности, 5

значение

— аргумента комплексного числа главное, 28

— бесконечного произведения, 265

— интеграла типа Коши в точке

— — — главное, 179

— — предельное слева от кривой, 180

— — предельное справа от кривой, 180

— отображения, 9

## И

изоморфизм

— дробно-линейный, 87

— конформный, 312

— множества на множество, 10

интеграл

— Ньютона—Лейбница

— — — определенный, 150

— — с фиксированным нижним пределом и  
переменным верхним пределом интегрирования,  
150

— в смысле главного значения по Коши, 179

— Коши, 173

— криволинейный функции по кривой, 159

— — второго рода, 159

— — первого рода, 159

— Кристоффеля—Шварца, 320

— — второго рода, 321

— — первого рода, 321

— типа Коши, 175

— — — значение в точке

— — — главное, 179

— — — предельное

— — — — слева от кривой, 180

— — — — справа от кривой, 180

— Шварца, 181

— Эйлера—Пуассона, 191

— эллиптический первого рода, 323

— — — полный, 324

I-интеграл, 153

n-интеграл, 154

## К

Кантора теорема, 18, 25

Каратеодори теорема, 315

Кардано формулы, 2:41

квантор

— общности, 4

— существования, 4

кольцо, 10

— коммутативное, 10

— унитарное, 10

компакт, 18, 47

комплексная плоскость, 27

комплексные числа, 27

комплексный потенциал, 72, 2:83

композиция отображений, 9

компонента упорядоченной пары

— вторая, 7

— первая, 7

компоненты связанные, 52

континуум, 52

— линейный, 52

контур, 160

координата упорядоченной пары

— вторая, 7

— первая, 7

Коши

— интеграл, 173

— критерий, 46, 198, 200

— — для функционального ряда, 201

— определение

— — непрерывности отображения, 22

— — предела отображения, 22

— теорема

— — — интегральная, 166–167

— — — — —, обобщение на случай функции, не  
являющейся аналитической на контуре  
интегрирования, 168–170

— — о вычетах, 247, 7:42, 7:47

— — — обобщение на случай неодносвязной области,  
171–172

— формула интегральная, 172–173

— ядро, 179

Коши—Адамара

— теорема, 207

— формула, 5:10, 5:11, 8:6

Коши—Римана условия, 67, 2:72, 2:73, 2:75, 2:77–80

кривая

— гладкая

— — —, ориентация, 51

— — — ориентированная, 51

— — —, параметрическое представление, 51

— — — простая, 51

— — — жорданова, 51

— — — замкнутая, 51

— — — замкнутая, 51

— — — канторова, 52

— — — кусочно-гладкая, 52

— — — непрерывная, 51

— — — ориентированная

— — — противоположно по отношению к данной, 51

— — —, параметрическое представление, 51

— — — простая, 51

— — — замкнутая

— — — — —, внешность, 52

— — — — —, внутренность, 52

Кристоффеля—Шварца

— интеграл, 320

— — — второго рода, 321

— — — первого рода, 321

— формула, 320, 8:22, 8:25

критерий

— дифференцируемости функции  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , 67, 2:79

— компактности в себе, 47–48

— Коши, 46, 198, 200

— — для функционального ряда, 201

круг сходимости аналитического элемента, 233

круговое свойство дробно-линейных отображений, 85

## Л

Лагранжа

— ряд, 302

— теорема, 73

Ландау символы, 11

Лапласа оператор, 178

лемма

— Жордана, 275, 7:59

— Шварца, 305, 8:15–17

леммы

— Паскаля, 5

лемниската Бернулли, 59

Линделёфа результат, 316

линейное пространство над полем, 11

линейность криволинейного интеграла, 159

Лиувилля теорема, 178–179, 4:25

Лопиталя правило, 7:8

Лорана теорема, 219–220

**М**

- мера жорданова множества, 79
- метод
  - математической индукции, 5–6, 2:53
  - от противного, 4
- метрика, 12
  - сферическая, 43
- Миттаг-Леффлера* теорема, 258–259, 7:25, 7:27
- мнимая часть
  - комплексного числа, 27
  - функции, 48
- многочлен *Тейлора*, 156
- множества
  - изоморфные, 10
  - непересекающиеся, 6
  - равные, 5
- множество
  - внешних точек данного множества, 15
  - , внутренность, 15
  - вполне ограниченное в метрическом пространстве, 18
  - , граница, 17, 45
  - , диаметр, 14
  - жорданово
    - , мера, 79
    - , площадь, 79
  - замкнутое, 16, 45
  - связанное, 45
  - , замыкание, 16, 45
  - значений отображения, 9
  - компактное, 20
  - — в метрическом пространстве, 18
  - в себе, 18, 47
  - относительно метрического пространства, 18
  - линейно-связное, 149
  - , образ при отображении, 9
  - ограниченное, 14, 44
  - определения отображения, 9
  - открытое, 14, 45
  - — связанное, 45
  - , покрытие, 18
  - , прообраз при отображении, 9
  - пустое, 5
  - связанное в метрическом пространстве, 20
  - точек кусочно-гладкой кривой, 52
  - функций
    - компактное
    - — в данной области, 309
    - — в себе, 311
    - равномерно ограниченное внутри данной области, 309
    - — равносвязно непрерывное, 309
    - — внутри данной области, 309
- модуль
  - в поле, 11
  - в теле, 11
  - комплексного числа, 26
- Монтеля* признак компактности, 309–310
- Морера* теорема, 179
- Муавра* формула, 29, 2:17

**Н**

- направление обхода границы области положительное, 162
- непрерывность
  - отображений взаимная, 25
  - отображения, 21, 23
  - в точке, 23
  - — в смысле *Гейне*, 21
  - — в смысле *Коши*, 22
  - равномерная, 24
  - функции в точке, 48
- неравенство треугольника
  - для абсолютного значения, 11

- для метрики, 12
- для модуля, 11
- для нормы (длины) в векторном пространстве, 11
- норма
  - в векторном пространстве, 11
  - вектора, 11
  - функций равномерная, 199
  - —, свойства, 199
- нуль функции, 212
  - кратности  $n$ , 212
- Ньютона—Лейбница* формула, 150
  - для  $n$ -интеграла, 154–155

**О**

- области
  - дробно-линейно изоморфные, 87
  - конформно-изоморфные, 312
- область, 20, 45
  - бесконечносвязная, 53
  - замкнутая, 20, 45
  - значений отображения, 9
  - компактная, 53
  - многосвязная, 52
  - неодносвязная, 53
  - односвязная, 53, 162
  - — относительно комплексной плоскости, 52
  - — относительно расширенной комплексной плоскости, 52
- определения
  - — отображения, 9
  - — полной аналитической функции естественная, 237
  - — отправления отображения, 8
  - — прибытия отображения, 8
  - — существования полной аналитической функции, 237
- образ множества при отображении, 9
- обращение отношения, 8
- объединение множеств, 6
- окрестность
  - множества, 15
  - — открытая, 15
  - точки в множестве, 53
- $\delta$ -окрестность точки, 13
- $\varepsilon$ -окрестность бесконечно удаленной точки, 44
- $\varepsilon$ -окрестность точки, 44
- окружность *Аполлония*, 41
- оператор *Лапласа*, 178
- операции над множествами, 6–7
- операция
  - обращения отношения, 8
  - сложения комплексных чисел, 26
  - транспонирования отношения, 8
  - умножения комплексных чисел, 27
- ориентация
  - гладкой кривой, 51
  - — противоположная, 51
- $n$ -остаток ряда, 203
- отношение
  - бинарное
    - — между элементами множеств, 7
    - обратное, 8
    - —, проекция
    - — вторая, 8
    - — первая, 7
    - — функциональное, 8
    - , обращение, 8
    - , транспонирование, 8
- отображение
  - биективное, 9
  - взаимно однозначное, 9
  - гиперболическое, 125
  - , график, 8, 9
  - дробно-линейное
  - —, нормальная форма, 125

- заданное параметрически, 9
- , значение, 9
- из множества в множество, 8
- конформное
  - в области, 71
  - в точке, 71
- локсодромическое, 125
- множества *в* множество, 9
- множества *на* множество, 9
- , множество значений, 9
- , множество определения, 9
- непрерывное, 21, 23
  - в точке, 23
  - в смысле *Гейне*, 21
  - в смысле *Коши*, 22
- , область значений, 9
- , область определения, 9
- , область отправления, 8
- , область прибытия, 8
- обратимое, 9
- обратное, 9
- открытое, 301
- — внутреннее, 301
- равномерно непрерывное на множестве, 24
- разрывное в точке, 21
- эллиптическое, 125
- отображения
  - взаимно непрерывные, 25
  - , композиция, 9
- отрезок
  - на комплексной плоскости, 45
  - , параметрическое представление, 45

## П

- пара упорядоченная, 7
  - , вторая компонента (вторая координата), 7
  - , первая компонента (первая координата), 7
- параллель, 31
- параметр, 9
- Паскаля* дсммы, 5
- первообразная функции, 149
  - вдоль кривой, 165
  - вдоль пути, 165
- пересечение множеств, 6
- петля, 160
- Пикара* теорема, 224
- плоскость
  - комплексная, 27
  - — расширенная, 29
  - экваториальная, 30
- плотность, 179
- площадь жорданова множества, 79
- подмножество, 5
  - максимально связанное, 52
- подпространство метрического пространства, 17
- показательная форма записи комплексного числа, 28
- покрытие множества, 18
- поле, 11
  - нормированное, 11
- полином *Чебышева*, 229
- положительное направление обхода границы области, 162
- полумеридиан, 31
- полус
  - северный, 31
  - функции, 221
  - — простой, 221
  - южный, 31
- порядок
  - полюса, 221
  - связности, 53
  - *A*-точки, 211
  - целой функции, 270

- последовательность
  - векторов
    - — фундаментальная, 12
    - комплексных чисел
      - бимонотонная, 202
    - сходящаяся, 46
    - точек метрического пространства
      - — сходящаяся, 13
      - — фундаментальная, 13
      - —  $(C, \rho)$ , 45
    - функциональная, 198
    - поточечно сходящаяся к данной функции, 198
    - равномерно сходящаяся к данной функции на данном множестве, 199
    - равномерно фундаментальная, 200
    - числовая, 9
    - элементов множества, 9
  - потенциал комплексный, 72, 2:83
  - правила дифференцирования интеграла
    - по верхнему переменному пределу интегрирования, 151
    - по нижнему переменному пределу интегрирования, 151
  - правило
    - дифференцирования произведения функций, 65
    - *Лопиталя*, 7:8
    - перестановки пределов интегрирования, 151
  - предл
    - отображения, 21
    - — в смысле *Гейне*, 21
    - — в точке в смысле *Коши*, 22
    - частичный, 21
    - последовательности, 45
    - векторов в нормированном пространстве, 11
    - точек в метрическом пространстве, 13
    - частичный, 47
    - функции в точке, 48
    - частичный, 48
    - функциональной последовательности равномерный, 200
  - представление параметрическое
    - гладкой кривой, 51
    - естественное, 51
    - кривой, 51
    - натуральное, 51
    - нормальное, 51
    - обобщенной непрерывной кривой, 52
    - отрезка, 45
  - представления параметрические эквивалентные
    - гладкой кривой, 51
    - непрерывной кривой, 51
  - признак
    - *Вейерштрасса* равномерной сходимости функционального ряда мажорантный, 201
    - *Д'Аламбера*, 2:51
    - *Дирхле*, 5:8, 5:11
    - компактности *Монтеля*, 309—310
    - сходимости ряда необходимый, 198
  - Прингсгейма* теорема, 242
  - принцип
    - аргумента, 297
    - двойственности, 7
    - исключенного третьего, 4
    - максимума модуля, 8:8—10, 8:14
    - — вторая формулировка, 305
    - — первая формулировка, 304
    - непрерывности, 240—241
    - однолистности, 303
    - симметрии, 317, 8:18, 8:19
    - — *Римана—Шварца*, 137, 241, 3:95
    - сохранения области, 300—301
  - продолжение функции, 9
  - аналитическое, 232

- проекция
  - бинарного отношения
  - — вторая, 8
  - — первая, 7
  - стереографическая, 30
- произведение
  - бесконечное
  - — Вейерштрасса, 268
  - — , значение, 265
  - — сходящееся, 265
  - — абсолютно, 266
  - — равномерно в области, 267
- многочленов, 208
- множества
  - — декартово, 7
  - — прямое, 7
  - — степенных рядов, 208
- 1-производная, 153
- $n$ -производная Ферма—Лагранжа функции в точке, 156
- $n + 1$ -производная, 153
- производная вектор-функции, 50
- образ множества при отображении, 9
- пространства метрические гомеоморфные, 25
- пространство
  - банахово, 12
  - векторное
  - — над полем, 11
  - — нормированное, 11
  - — линейное над полем, 11
  - метрическое, 12
  - — полное, 13
  - — связанное, 20
  - — нормированное полное, 12
  - топологическое, 45
  - — , свойства, 45
- Пуанкаре теорема, 270
- Пуанкаре—Вольтерра теорема, 237
- Пуассона формула, 182, 4:8
- Р**
- равенство
  - множества, 5
  - упорядоченных пар, 7
- радиус сходимости степенного ряда, 206
- $\rho$ -раздутье множества, 309
- разность множеств, 6
- расстояние
  - индуцированное, 17
  - между точками метрического пространства, 14
  - хордальное, 44
- расстояния
  - топологически эквивалентные, 25
  - эквивалентные, 25
- расширенная комплексная плоскость, 29
- результат
  - Линделёфа, 316
  - Шварца, 316
- Римана
  - сфера, 30, 2:43–47
  - теорема, 314–315
- Римана—Шварца принцип симметрии, 137, 241, 3:95, 3:97, 3:100, 3:102
- род бесконечного произведения, 270
- Рунге теорема, 297–298, 8:1, 8:3
- ряд
  - Тейлора, 209
  - Лагранжа, 302
  - Лорана функции в кольце, 220
  - мероморфных функций сходящийся, 258
  - — равномерно, 258
  - функциональный, 197, 198
  - — степенной, 206
  - — сходящийся нормально, 201
  - — сходящийся поточечно, 199
  - — сходящийся равномерно, 200
  - — удовлетворяющий равномерному условию Коши, 201
  - Фурье, 7:30
  - числовой, 197
  - — расходящийся, 197
  - — сходящийся, 197
- С**
- свойства
  - аналитической функции, 69–70
  - векторного пространства, 11
  - нормы функции равномерной, 199
  - показательной функции, 28
  - стереографической проекции, 30
  - топологического пространства, 45
- северный полюс, 31
- $\varepsilon$ -сеть множества, 18
- сечение
  - второе, 8
  - первое, 8
- символ
  - дитъюнкции, 4
  - импликации, 4
  - конъюнкции, 4
  - отрицания, 4
  - эквивалентности, 4
- символы Ландау, 11
- синус эллиптический, 324
- след кусочно-гладкой кривой, 52
- сопряженное число, 27
- Сохоцкого
  - теорема, 223–224
  - формулы, 181
- спираль Архимеда, 40
- стереографическая проекция, 30
  - , свойства, 30
- структура математическая, 10
- сужение функции, 9
  - на множество, 9
- сумма ряда, 197
  - функционального
  - — поточечная на данном множестве, 199
  - — равномерная, 200
  - — частичная, 198
  - частичная, 197
- сфера, 13
  - Римана, 30, 2:43–47
- Т**
- Тейлора
  - многочлен, 156
  - теорема, 209
  - формула с остаточным членом, записанным посредством  $n$ -интеграла, 156
- Тейлора—Леона формула, 157–158
- тело, 10
  - нормированное, 11
- теорема
  - Абеля, 202
  - — вторая, 207–208
  - — первая, 207
  - алгебры основная, 298
  - Больцано—Вейерштрасса, 47
  - Бореля—Лебега, 48, 2:60
  - Вейерштрасса, 50, 204–205
  - — о представлении целой функции в виде бесконечного произведения, 269
  - Виета, 2:21, 2:40, 2:41
  - Гурвица, 311
  - Дирихле, 155, 203
  - Жордана, 52

- Кантора, 18, 25
- Каратеодори, 315
- Коши
  - интегральная, 166–167
- — обобщение на случай функции, не являющейся аналитической на контуре интегрирования, 168–170
- о вычетах, 247, 7:42, 7:47
- , обобщение на случай неодиоветной области, 171–172
- Коши—Адамара, 207
- Лагранжа, 73
- Лиувилля, 178–179, 4:25
- Лорана, 219–220
- Миттаг-Леффлера, 258–259, 7:25, 7:27
- Морера, 179
- о биективных и непрерывных отображениях, 52
- о вычетах основная, 247, 7:42, 7:47
- о дифференцируемости произведения бесконечно малой дифференцируемой функции и непрерывной функции, 64
- о достаточных условиях
  - равномерной сходимости бесконечного произведения, 267
  - существования первообразной в круте, 162–163
  - замены переменных интегрирования, 152
  - линейности
    - интеграла, 151–152
    - операции дифференцирования, 64
    - равномерного предела, 200
    - о логарифмическом вычете, 296
    - о монотонии, 236
    - о непрерывном образе компакта, 21, 50
    - о непрерывности
      - дифференцируемой функции, 64
      - композиции
        - отображений, 21
        - функций, 49
      - нормы, 11
    - обратного отображения, 22
    - сужения отображения, 23
  - о почленном интегрировании равномерно сходящегося функционального ряда, 204
  - о пределе композиции функций, 49
  - о производной
    - $n$ -интеграла по пределам интегрирования, 155
    - композиции, 63–64
    - обратной функции, 65
    - частного, 65
  - о равномерной равносходимости функциональных рядов, связанных преобразованием Абеля, 202
  - о равносходимости бесконечного произведения и числового ряда, 265
  - о среднем, 173
  - о существовании первообразной аналитической функции, заданной в односвязной области, 170–171
  - об инвариантности
    - интеграла при гомотопиях пути интегрирования, 166–167
  - симметричных точек при дробно-линейном отображении, 86
  - об интегрировании по частям, 152
  - об обращении формулы Тейлора—Пеано, 158
  - об ограниченности компакта, 47
  - Пикара, 224
  - Прингсгейма, 242
  - Пуанкаре, 270
  - Пуанкаре—Вальтерра, 237
  - Римана, 314–315
  - Руше, 297–298, 8:1–3
  - Сохоцкого, 223–224
  - Тейлора, 209
  - Фреше, 19
  - Хаусдорфа, 19
  - Штольца, 2:50
  - тождество Абеля, 202
  - топология, 44
  - метрического пространства, 25
  - относительная, 53
  - точка
    - бесконечно удаленная, 29
    - кривой
      - конечная, 51
      - кратная, 51
      - начальная, 51
    - множества
      - внешняя, 15
      - внутренняя, 15, 45
      - граничная, 17, 45
      - изолированная, 17
      - предельная, 17, 45
    - особая
      - аналитической функции, 239
      - изолированная, 221
      - многозначного характера, 239
      - однозначного характера, 239
      - устранимая, 221
    - последовательности предельная, 47
    - прикосновения, 16, 45
    - разветвления, 93, 239, 240
    - —  $(n-1)$ -го порядка, 93, 240
    - алгебраическая, 93
    - —  $(n-1)$ -го порядка, 93
    - бесконечного порядка, 93, 240
    - логарифмическая, 240
    - существенно особая, 221
    - устранимого разрыва, 21
  - $A$ -точка функции, 211
  - кратная, 211
  - , кратность, 211
  - , порядок, 211
  - простая, 211
  - точки
    - метрического пространства, 12
    - симметричные
      - относительно окружности, 85, 86
      - относительно прямой, 85
  - траектория
    - гладкая
      - простая, 51
      - непрерывная, 51
  - транспонирование отношения, 8
  - тригонометрическая форма записи комплексного числа, 28
  - троихонда, 60
  - У**
    - угол между путями в точке, 84
    - упорядоченная пара, 7
    - уравнение деления круга, 35
    - условие Гельдера, 179
    - условия Коши—Римана, 67, 2:72, 2:73, 2:75, 2:77–80
    - утверждение Гаусса, 37
  - Ф**
    - форма
      - дробно-линейного отображения нормальная, 125
      - записи комплексного числа
        - показательная, 28
        - тригонометрическая, 28
    - формула
      - Коши интегральная, 172–173
      - Коши—Адамара, 5:10, 5:11, 8:6
      - Кристоффеля—Шварца, 320, 8:22, 8:25
      - Муавра, 29, 2:17
      - Ньютона—Лейбница, 150



- для  $n$ -интеграла, 154–155
- Пуассона, 182, 4:8
- Тейлора с остаточным членом, записанным посредством  $n$ -интеграла, 156
- Тейлора—Пеано, 157–158
- Шварца, 181
- формулы
  - Кардано, 2:41
  - Сохоцкого, 181
- стереографической проекции основные, 30, 2:43–47
- Эйлера, 101, 7:23, 7:24
- Фреше теорема, 19
- функции
  - аналитические равные, 237
  - гиперболические, 101
  - тригонометрические, 101
- функционал, 310
- непрерывный на данном элементе, 310
- функция
  - авторморфная, 325
  - аналитическая
    - в бесконечно удаленной точке, 219
    - в замкнутой области, 69
    - в области, 68
    - в точке, 68
    - на бесконечности, 69
    - на кривой, 68
    - на открытом множестве, 68
    - на произвольном множестве, 68
    - полная, 237
    - , свойства, 69–70
  - Бесселя, 226
  - гармоническая в области, 177
  - гармонически сопряженная с данной, 178
  - голоморфная, 68
  - $C$ -дифференцируемая, 67
  - $R^2$ -дифференцируемая, 67
  - 1-дифференцируемая, 153
  - $n$ -дифференцируемая в точке в смысле Ферма—Лагранжа, 156
  - $n + 1$ -дифференцируемая, 153
  - дифференцируемая в точке, 63
  - дробно-линейная, 83
  - Жукковского, 99, 3:28, 3:72, 3:74, 3:87–93, 3:95, 3:97, 3:99–101, 8:18
  - 1-интегрируемая, 153
  - интегрируемая в смысле Ньютона—Лейбница, 150
  - кусочно-линейная, 45
  - линейная, 66
  - ломаная, 45
  - мсроморфная, 257, 271
  - — в области, 259
  - моногенная, 65
  - непрерывная в точке, 48
  - несяная, 10
  - обобщенно-непрерывная, 50
  - ограниченная на множестве, 50
  - однолистная, 48
  - показательная, 28, 94
  - — общая, 98
  - — , свойства, 28
  - , продолжение, 9
  - — аналитическое, 232
  - степенная, 91
  - — общая, 97–98

- , сужение
  - на множество, 9
  - с множества на множество, 9
- тока, 72
- целая, 257
- — бесконечного рода, 270
- — конечного рода, 270
- — трансцендентная, 257
- эллиптическая, 325
- Фурье ряд, 7:30

## Х

- Хаусдорфа теорема, 19

## Ц

- циклоида, 60
- удлиненная, 60
- укороченная, 60

## Ч

- часть ряда Лорана
  - главная, 220
  - правильная, 220
- Чебышева полином, 229
- числа
  - Бернулли, 215
  - комплексные, 27
- число комплексное сопряженное данному, 27
- член
  - ряда общий, 197
  - функционального ряда, 198
  - функциональной последовательности, 198

## Ш

- шар
  - замкнутый, 13
  - открытый, 13
- Шварца
  - интеграл, 181
  - лемма, 305, 8:15–17
  - результат, 316
  - формула, 181
- широта, 31
- Штольца теорема, 2:50

## Э

- Эйлера
  - бета-функция, 328
  - формулы, 101, 7:23, 7:24
- Эйлера—Пуассона интеграл, 191
- элемент
  - аналитический, 232
  - группы
    - — единственный, 10
    - — нейтральный, 10
    - — нулевой, 10
    - — обратный данному, 10
  - канонический с центром в данной точке, 233

## Ю

- южный полюс, 31

## Я

- ядро
  - Дирихле, 35
  - Коши, 179

# Оглавление

<b>Предисловие</b> .....	<b>3</b>
<b>Глава 1. Основные структуры математического анализа</b> .....	<b>4</b>
<b>§ 1. Элементы теории множеств и отображений</b> .....	<b>4</b>
Некоторые логические символы (4) Обозначения, используемые в теории множеств (5) Натуральные числа. Метод математической индукции (5) Простейшие операции над множествами (6) Упорядоченная пара и декартово произведение множеств (7) Бинарные отношения. Проекция и сечения бинарного отношения. Обратное бинарное отношение (7) Функциональное бинарное отношение. Функция и простейшие понятия, связанные с ней (8) Обратная функция. Композиция отображений (9) Параметрическое и неявное отображения (9) Изоморфизм (10)	
<b>§ 2. Математические структуры</b> .....	<b>10</b>
Группа (10) Кольцо (10) Тело (10) Поле (11) Векторное пространство над полем $K$ . Нормированное пространство (11)	
<b>§ 3. Метрические пространства</b> .....	<b>12</b>
Аксиомы метрики. Предел последовательности точек метрического пространства (12) Шары, сферы, диаметр множества (13) Открытые множества (14) Внутренность множества (15) Замкнутые множества, точки прикосновения, замыкание множества (16)	
<b>§ 4. Компактные множества</b> .....	<b>18</b>
<b>§ 5. Связные пространства и связные множества</b> .....	<b>20</b>
<b>§ 6. Предел и непрерывность отображения из одного метрического пространства в другое</b> .....	<b>20</b>
Предел и непрерывность отображения (20) Непрерывность композиции отображений (21) Непрерывность обратного отображения (22) Предел и непрерывность отображения в смысле Коши. Некоторые свойства непрерывных отображений (22) Равномерно непрерывные отображения (24) Гомеоморфизмы. Эквивалентные расстояния (25)	
<b>Глава 2. Комплексные числа и функции комплексного переменного</b> .....	<b>26</b>
<b>§ 1. Комплексные числа и комплексная плоскость</b> .....	<b>26</b>
Определение комплексного числа (26) Аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная формы его записи. Умножение и деление комплексных чисел. Операция извлечения корня из комплексного числа (28) Стереографическая проекция и ее свойства (29) Примеры (31)	
<b>§ 2. Топология комплексной плоскости. Последовательности комплексных чисел. Свойства функций, непрерывных на компакте</b> .....	<b>43</b>
Топология комплексной плоскости (43) Замкнутые множества, отрезок и ломаная. Связные множества (45) Последовательность комплексных чисел и ее предел (45) Свойства компакта $K \subset \mathbb{C}$ (47) Предел и непрерывность функции комплексного переменного (48) Арифметические операции над пределами и непрерывными функциями (49) Предел и непрерывность композиции функций (49) Свойства функций, непрерывных на компакте (50)	
<b>§ 3. Непрерывные и гладкие кривые. Односвязные и многосвязные области</b> .....	<b>50</b>
Примеры (53)	

<b>§ 4. Дифференцируемые функции комплексного переменного.</b>	
Связь между $\mathbb{C}$ -дифференцируемостью и $\mathbb{R}^2$ -дифференцируемостью.	
Аналитические функции .....	63
Определение дифференцируемой функции. Правила дифференцирования (63) Дифференциал функции (66) Критерий дифференцируемости функции комплексного переменного (67) Аналитические функции (68) Геометрический смысл производной функции комплексного переменного. Понятие конформного отображения (70) Плоские физические поля и их связь с аналитическими функциями (71) Неравенство Лагранжа (73) Примеры (73)	
<b>Упражнения для самостоятельной работы .....</b>	<b>79</b>
<b>Глава 3. Элементарные функции в комплексной плоскости .....</b>	<b>83</b>
<b>§ 1. Дробно-линейные функции и их свойства .....</b>	<b>83</b>
Определение дробно-линейной функции. Конформность отображения (83) Геометрические свойства дробно-линейных отображений (84) Дробно-линейные изоморфизмы и автоморфизмы (86) Примеры (88)	
<b>§ 2. Степенная функция <math>w = z^n</math> (<math>n \in \mathbb{N}</math>, <math>n \geq 2</math>).</b>	
Мнозначная функция $w = \sqrt[n]{z}$ и ее поверхность Римана .....	91
Степенная функция (91) Мнозначная функция $w = \sqrt[n]{z}$ и ее поверхность Римана (92) Примеры (93)	
<b>§ 3. Показательная функция <math>w = e^z</math> и многозначная функция <math>z = \operatorname{Ln} w</math> .....</b>	<b>94</b>
Показательная функция $w = e^z$ (94) Многозначная функция $z = \operatorname{Ln} w$ (96) Примеры (96)	
<b>§ 4. Общая степенная и общая показательная функции .....</b>	<b>97</b>
Общая степенная функция (97) Общая показательная функция (98)	
<b>§ 5. Функция Жуковского .....</b>	<b>99</b>
Определение функции Жуковского. Конформность (99) Примеры (100)	
<b>§ 6. Тригонометрические и гиперболические функции .....</b>	<b>101</b>
Примеры (105)	
<b>Упражнения для самостоятельной работы .....</b>	<b>145</b>
<b>Глава 4. Интегрирование в комплексной плоскости.</b>	
<b>Интегралы Ньютона—Лейбница и Коши .....</b>	<b>149</b>
<b>§ 1. Интеграл Ньютона—Лейбница .....</b>	<b>149</b>
Первообразная (149) Интеграл Ньютона—Лейбница (150) Линейность интеграла. Замена переменных и формула интегрирования по частям (151)	
<b>§ 2. Производные и интегралы Ньютона—Лейбница любых порядков .....</b>	<b>153</b>
Определение $n$ -производной и $n$ -интеграла (153) Формула Ньютона—Лейбница. Производные по пределам интегрирования (154) Формула Тейлора (156)	
<b>§ 3. Производная Ферма—Лагранжа. Формула Тейлора—Пеано .....</b>	<b>156</b>
Производная Ферма—Лагранжа (156) Теорема Тейлора—Пеано и ее обращение (157)	
<b>§ 4. Криволинейные интегралы .....</b>	<b>159</b>
Интегрирование функций по ориентированной гладкой кривой (159) Гомотопия двух кривых (путей) (161)	
<b>§ 5. Теорема и интеграл Коши .....</b>	<b>162</b>
Существование локальной первообразной аналитической функции (162) Первообразная вдоль кривой (вдоль пути) (165) Теорема Коши (166) Интегральная формула Коши (172) Примеры (173)	
<b>§ 6. Интеграл типа Коши .....</b>	<b>175</b>
Определение и основное свойство интеграла типа Коши (175) Гармоничность действительной и мнимой частей аналитической функции. Восстановление аналитической функции по	

ее действительной (мнимой) части (177) Теоремы Лиувилля и Морера (178) Главное значение и предельные значения интеграла типа Коши (179) Формулы Шварца и Пуассона (181) Примеры (184)

## **Упражнения для самостоятельной работы** ..... 195

## **Глава 5. Ряды аналитических функций.**

### **Изолированные особые точки** ..... 197

#### **§ 1. Ряд Тейлора** ..... 197

Общие сведения о рядах (197) Последовательность функций и функциональный ряд. Поточечная сходимость (198) Равномерная норма функций. Равномерная сходимость последовательности функций и функционального ряда (199) Нормальная сходимость функционального ряда. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов (201) Функциональные свойства равномерной суммы функционального ряда (203) Степенные ряды (206) Теорема Тейлора (208) Теорема единственности (210) Примеры (212)

#### **§ 2. Ряд Лорана и изолированные особые точки аналитических функций** ..... 219

Теорема Лорана (219) Классификация изолированных особых точек в  $\mathbb{C}$  (221) Поведение аналитической функции при подходе к изолированной особой точке (222) Бесконечная изолированная особая точка (224) Примеры (225)

## **Упражнения для самостоятельной работы** ..... 229

## **Глава 6. Аналитическое продолжение** ..... 231

#### **§ 1. Основные понятия. Аналитическое продолжение вдоль пути** ..... 232

Свойство единственности аналитической функции. Определение аналитического продолжения (232) Аналитическое продолжение вдоль пути (234) Инвариантность аналитического продолжения вдоль пути относительно гомотопных деформаций этого пути (235)

#### **§ 2. Полные аналитические функции** ..... 237

Понятие полной аналитической функции (237) Примеры полных аналитических функций (238) Особые точки полной аналитической функции (239) Существование особой точки на границе круга сходимости степенного ряда (240)

#### **§ 3. Принципы аналитического продолжения** ..... 240

Примеры (241)

## **Упражнения для самостоятельной работы** ..... 243

## **Глава 7. Вычеты и их применения** ..... 245

#### **§ 1. Определение вычета. Основная теорема** ..... 245

Вычет относительно изолированной конечной точки (245) Вычет относительно бесконечности (246) Теорема о вычетах (247) Примеры (248)

#### **§ 2. Целые и мероморфные функции** ..... 257

Целые функции (257) Мероморфные функции. Теорема Миттаг-Леффлера (257) Разложение мероморфных функций на простейшие дроби (259) Примеры (262)

#### **§ 3. Бесконечные произведения** ..... 264

Числовые бесконечные произведения (265) Равномерно сходящиеся бесконечные произведения (267) Представление целой функции в виде бесконечного произведения (267) Разложение  $\sin z$  в бесконечное произведение (269) Род и порядок целой функции (270) Мероморфная функция как отношение двух целых функций (270) Примеры (271)

<b>§ 4. Применение вычетов для вычисления интегралов и сумм рядов</b> .....	274
Применение вычетов для вычисления определенных интегралов (274) Применение вычетов к вычислению сумм рядов (278) Примеры (279)	
<b>Упражнения для самостоятельной работы</b> .....	291
<b>Глава 8. Некоторые общие вопросы геометрической теории аналитических функций</b> .....	295
<b>§ 1. Принцип аргумента. Теорема Руше</b> .....	295
Вычисление интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\varphi(z)f'(z)}{f(z)-A} dz$ (295) Теорема о логарифмическом вычете (296)	
Принцип аргумента (296) Теорема Руше (297) Примеры (298)	
<b>§ 2. Сохранение области и локальное обращение аналитической функции</b> .....	300
Принцип сохранения области (300) Локальное обращение аналитических функций (301) Примеры (303)	
<b>§ 3. Экстремальные свойства модуля аналитической функции</b> .....	304
Принцип максимума модуля аналитической функции (304) Лемма Шварца (305) Примеры (305)	
<b>§ 4. Принцип компактности. Функционалы на семействе аналитических функций</b> .....	308
Равномерно ограниченные и равномерно непрерывные семейства функций (308) Принцип компактности (309) Функционалы, определенные на множествах функций (310) Теорема Гурвица (311)	
<b>§ 5. Существование и единственность конформного отображения</b> .....	312
Конформные изоморфизмы и автоморфизмы (312) Примеры автоморфизмов (312) Существование и единственность изоморфизмов областей, изоморфных единичному кругу (313) Теорема существования (314)	
<b>§ 6. Соответствие границ и принцип симметрии при конформном отображении</b> .....	315
Теорема о соответствии границ (315) Принцип симметрии (316) Примеры (317)	
<b>§ 7. Конформное отображение многоугольников. Интеграл Кристоффеля—Шварца</b> ..	318
Отображение верхней полуплоскости на многоугольник (318) Случай многоугольника, имеющего вершины в бесконечности (322) Отображение верхней полуплоскости на внешность многоугольника (322) Отображение верхней полуплоскости на прямоугольник (323) Эллиптический синус и его двоякая периодичность (324) Отображение единичного круга на многоугольник (326) Примеры (328)	
<b>Упражнения для самостоятельной работы</b> .....	332
<b>Ответы</b> .....	334
<b>Литература</b> .....	338
<b>Предметный указатель</b> .....	339

**Боярчук Алексей Климентьевич**

**Справочное пособие по высшей математике. Т. 4: Функции комплексного переменного: теория и практика.** — М.: Едиториал УРСС, 2001. — 352 с.

ISBN 5-354-00020-3

«Справочное пособие по высшей математике» выходит в пяти томах и представляет собой новое, исправленное и существенно дополненное издание «Справочного пособия по математическому анализу» тех же авторов. В новом издании пособие охватывает три крупных раздела курса высшей математики — математический анализ, теорию дифференциальных уравнений, теорию функций комплексной переменной.

Том 4 является логическим продолжением трех предыдущих ориентированных на практику томов и содержит более четырехсот подробно решенных задач, но при этом отличается более детальным изложением теоретических вопросов и может служить самостоятельным замкнутым курсом теории функций комплексного переменного. Помимо вопросов, обычно включаемых в курсы такого рода, в книге излагается ряд нестандартных — таких, как интеграл Ньютона—Лейбница и производная Ферма—Лагранжа.

Пособие предназначено для студентов, преподавателей и работников физико-математических, экономических и инженерно-технических специальностей, специалистов по прикладной математике, а также лиц, самостоятельно изучающих высшую математику.